Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 840–847

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:20:00

УДК 512.643

О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам

Х. Д. Икрамов

Известны условия, при которых комплексная $(n \times n)$ -матрица A может быть посредством подобия преобразована в вещественную матрицу. Возможно ли такое преобразование осуществить посредством не произвольного, а унитарного подобия? На этот вопрос в данной статье дан такой ответ: матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда может быть овеществлена унитарным подобием, когда A и $\bar{A}$ унитарно подобны и подобие между ними можно осуществить посредством матрицы P , одновременно унитарной и симметричной. Обсуждены способы эффективной проверки этого критерия.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $M_n(\mathbb{C})$ – пространство комплексных $(n \times n)$ -матриц. Предположим, что для матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ существует подобная ей *вещественная* матрица

$$B = Q^{-1}AQ. \quad (1)$$

Тогда A должна иметь те же особенности спектра и жордановой структуры, какими обладают вещественные матрицы. Перечислим эти особенности:

а) если невещественное число λ является собственным значением для A , то $\bar{\lambda}$ – также собственное значение, причем той же кратности;

б) число и порядки жордановых клеток, относящихся к $\bar{\lambda}$, те же, что и для λ .
Условия а) и б) необходимы для подобия (1). Но эти же условия достаточны для того, чтобы A можно было подобием перевести в вещественную матрицу. В самом деле, выполним подобие, преобразующее A в ее жорданову форму J . Если A имеет чисто вещественный спектр, то J – вещественная матрица и доказывать нечего. Предположим, что имеются и невещественные собственные значения. Выбирая подходящий порядок жордановых клеток, можем считать, что в матрице J вслед за каждой клеткой $J_k(\lambda)$, где $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau \neq 0$, стоит клетка $J_k(\bar{\lambda})$. Здесь $J_k(\lambda)$ – стандартное обозначение жордановой клетки порядка k , относящейся к числу λ .

Матрица

$$J_k(\lambda) \oplus J_k(\bar{\lambda}) \quad (2)$$

подобна вещественной блочной матрице

$$\begin{pmatrix} C & I_2 & & \\ & C & I_2 & \\ & & \dots & \dots \\ & & & \dots \\ & & & & C \end{pmatrix} \quad (3)$$

порядка $2k$ с диагональным блоком

$$C = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix} \quad (4)$$

(см. об этом подробнее [1; § 6.6]). Символ I_n есть стандартное обозначение единичной матрицы порядка n . Заменяя в J каждую пару клеток вида (2) соответствующей матрицей (3), получим вещественную матрицу, подобную A (и называемую ее *вещественной жордановой формой*).

Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ обладает свойствами а) и б). Зададимся вопросом о том, можно ли для соотношения (1), где B – вещественная матрица, подобрать унитарную матрицу Q . Иначе говоря, можно ли овеществить A посредством унитарного подобия? Множество $(n \times n)$ -матриц A , для которых ответ на этот вопрос положителен, будем обозначать через $\mathcal{UR}_n$.

В п. 3 мы устанавливаем следующий критерий для включения $A \in \mathcal{UR}_n$.

ТЕОРЕМА 1. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда может быть овеществлена унитарным подобием, когда A и $\bar{A}$ унитарно подобны и подобие между ними можно осуществить посредством матрицы P , одновременно унитарной и симметричной.*

Как обычно, черта над символом матрицы обозначает поэлементное комплексное сопряжение.

Наличие или отсутствие унитарного подобия между матрицами $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ можно проверить с помощью классической теоремы Шпехта (см. [2; теорема 2.2.6]).

ТЕОРЕМА 2 (Шпехт). *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \quad (5)$$

для любого слова $W(s, t)$ от двух некоммутирующих переменных s и t .

Согласно уточнению этого критерия, найденному Пирси [3], равенства (5) достаточно проверить для слов степени не больше $2n^2$. При этом степень слова

$$W(s, t) = s^{m_1} t^{n_1} s^{m_2} t^{n_2} \dots s^{m_k} t^{n_k}$$

называется число

$$m_1 + n_1 + \dots + m_k + n_k.$$

Проверка второго условия теоремы 1 (т.е. симметрии трансформирующей унитарной матрицы P) является значительно более сложным вопросом. Дело в том, что критерий Шпехта может установить существование матрицы P , но он не дает метода ее построения.

В настоящее время автору не известен способ эффективной проверки этого условия. В связи с этим в п. 4 рассмотрен специальный случай, когда критерий теоремы 1 выполнен.

Назовем матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ *неприводимой*, если A и A^* не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств. Иначе говоря, A неприводима, если не существует унитарного подобия, которое превращало бы A в прямую сумму матриц меньшего порядка. Эффективный способ проверки неприводимости указан в [4].

В п. 4 доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Если неприводимая матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ нечетного порядка n унитарно подобна матрице $\bar{A}$, то $A \in \mathcal{UR}_n$.*

В п. 2, содержащем вспомогательные сведения, и в обсуждении, сопровождающем теорему 3, мы объясняем, почему условие нечетности порядка существенно.

2. Предварительные сведения. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *псевдоинволюцией* (*coninvolution*), если

$$A\bar{A} = I_n. \quad (6)$$

Нам потребуется следующий факт, связанный с псевдоинволюциями (см. [2; лемма 4.6.9]).

ТЕОРЕМА 4. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда является псевдоинволюцией, когда A может быть представлена в виде*

$$A = S\bar{S}^{-1} \quad (7)$$

для некоторой невырожденной матрицы $S \in M_n(\mathbb{C})$.

В доказательстве теоремы 1 используется классический, но, тем не менее, не слишком широко известный факт, называемый *факторизацией Такаги* (см. [2; следствие 4.4.4]).

ТЕОРЕМА 5. *Для всякой симметричной матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ найдутся унитарная матрица $U \in M_n(\mathbb{C})$ и диагональная матрица*

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (8)$$

такие, что

$$A = U\Sigma U^T. \quad (9)$$

Матрицу U в теореме 5 можно выбрать так, чтобы Σ была неотрицательной матрицей. В этом случае диагональными элементами $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ будут сингулярные числа матрицы A (т.е. неотрицательные квадратные корни из собственных значений матрицы $AA^* = A\bar{A}$).

Пусть n – четное число: $n = 2m$. Положим

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Назовем *блочным кватернионом* всякую матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющую соотношению

$$\bar{A}J = JA. \quad (11)$$

Если блочный кватернион A представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (12)$$

с блоками размера $m \times m$, то эти блоки связаны соотношениями

$$A_{21} = -\bar{A}_{12}, \quad A_{22} = \bar{A}_{11}. \quad (13)$$

Из определения (11) видно, что блочный кватернион A унитарно подобен матрице $\bar{A}$. Однако трансформирующая матрица J кососимметрична, а не симметрична, как того требует теорема 1. Поэтому ни откуда не следует, что $A \in \mathcal{UR}_n$. Если все же $A \in \mathcal{UR}_n$, то A обязательно является приводимой матрицей. В самом деле, пусть

$$A = QRQ^*, \quad (14)$$

где

$$QQ^* = I_n \quad \text{и} \quad R \in M_n(\mathbb{R}).$$

Подставляя (14) в (11), имеем

$$\bar{Q}RQ^T J = JQRQ^*$$

или

$$R(Q^T J Q) = (Q^T J Q)R. \quad (15)$$

Как и J , матрица

$$K = Q^T J Q$$

унитарная и кососимметричная. Поэтому равенство

$$K = \alpha I_n$$

невозможно ни при каком α . Следовательно, K имеет нетривиальную пару ортогональных инвариантных подпространств, отвечающих взаимно дополнительным частям ее спектра. В силу (15) те же подпространства инвариантны относительно R , т.е. являются общими инвариантными подпространствами для R и R^* . Итак, R приводима, а тогда приводима и унитарно подобная ей матрица A .

Пусть P – произвольная матрица, одновременно унитарная и кососимметричная. (Это сочетание свойств возможно только для четного n ; оно имеет место, в частности, для матриц J и K .) Из соотношений

$$PP^* = I_n \quad \text{и} \quad P^T = -P \quad (16)$$

следует, что

$$P\bar{P} = -I_n. \quad (17)$$

Всякая матрица P , удовлетворяющая условию (17), называется *косой псевдоинволюцией* (*skew-coninvolution*).

По аналогии с (11) определим для унитарной кососимметричной матрицы P класс матриц B таких, что

$$\bar{B}P = PB. \quad (18)$$

Как и блочные кватернионы, матрицы B унитарно подобны своим (поэлементно) сопряженным матрицам $\bar{B}$.

Заметим, что матрица P , удовлетворяющая соотношениям (16), может быть посредством унитарной конгруэнции преобразована в матрицу J (см., например, [2; задача 4.4.26]):

$$UPU^T = J, \quad UU^* = I_n.$$

Переписывая (18) в виде

$$(U\bar{B}U^*)(UPU^T) = (UPU^T)(\bar{U}BU^T),$$

закключаем, что унитарное подобие

$$B \rightarrow A = \bar{U}BU^T$$

переводит матрицы B из класса (18) в блочные кватернионы. Отсюда и из проведенного выше обсуждения мы делаем следующий вывод.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если матрица B из класса (18) унитарно подобна вещественной матрице, то B приводима.*

3. Доказательство теоремы 1. Необходимость условия теоремы почти очевидна. В самом деле, пусть матрица

$$B = Q^*AQ$$

вещественна, а матрица Q унитарна. Тогда

$$B = Q^T \bar{A} \bar{Q}$$

и

$$\bar{A} = \bar{Q}Q^*AQQ^T = P^*AP,$$

где

$$P = QQ^T.$$

Таким образом, матрица P , трансформирующая A в $\bar{A}$, не только унитарна, но и симметрична.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть

$$\bar{A} = P^*AP, \tag{19}$$

где P – унитарная симметричная матрица. Поскольку A и $\bar{A}$ унитарно подобны, спектр матрицы A должен удовлетворять условиям а) и б). Поэтому A можно представить в виде

$$A = QMQ^{-1}, \tag{20}$$

где M – вещественная матрица (например, вещественная жорданова форма матрицы A). Подставляя (20) в (19), имеем

$$\bar{Q}M\bar{Q}^{-1} = P^*QMQ^{-1}P,$$

или

$$(Q^{-1}P\overline{Q})M = M(Q^{-1}P\overline{Q}).$$

Положим

$$D = Q^{-1}P\overline{Q}. \quad (21)$$

Таким образом,

$$DM = MD. \quad (22)$$

Заметим, что

$$D\overline{D} = (Q^{-1}P\overline{Q})(\overline{Q}^{-1}\overline{P}Q) = Q^{-1}P\overline{P}Q = I_n.$$

Последнее равенство объясняется тем, что

$$PP^* = I_n, \quad P = P^T$$

и, следовательно,

$$P\overline{P} = I_n. \quad (23)$$

Согласно теореме 4 матрица D может быть представлена в виде

$$D = S\overline{S}^{-1}. \quad (24)$$

Подставляя это выражение в (22), находим

$$S\overline{S}^{-1}M = MS\overline{S}^{-1}$$

или

$$\overline{S}^{-1}M\overline{S} = S^{-1}MS.$$

Таким образом, матрица

$$L = S^{-1}MS$$

вещественна.

Подставим выражение (24) и в (21). Имеем

$$P = QD\overline{Q}^{-1} = QS\overline{S}^{-1}\overline{Q}^{-1} = V\overline{V}^{-1},$$

где

$$V = QS. \quad (25)$$

Поскольку все сингулярные числа унитарной матрицы P равны единице, ее факторизация Такаги имеет вид

$$P = UU^T, \quad UU^* = I_n$$

(см. теорему 5). Итак,

$$V\overline{V}^{-1} = UU^T,$$

или

$$U^*V = U^T\overline{V},$$

т.е.

$$R = U^*V \quad (26)$$

есть вещественная матрица.

Используя (20), (25) и (26), получаем

$$A = QMQ^{-1} = VS^{-1}MSV^{-1} = VLV^{-1} = U(RLR^{-1})U^*.$$

Матрица RLR^{-1} вещественна, а U унитарна. Таким образом, $A \in \mathcal{UR}_n$ и теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Пусть

$$\bar{A} = P^*AP, \quad PP^* = I_n.$$

Отсюда

$$A = P^T \bar{A} \bar{P} = P^T P^* A P \bar{P},$$

т.е.

$$QA = AQ, \tag{27}$$

где матрица $Q = P\bar{P}$ унитарна. Если Q не является скалярной матрицей, то равенство (27) противоречит неприводимости матрицы A . Действительно, в этом случае Q имеет нетривиальную пару взаимно дополнительных ортогональных подпространств, отвечающих различным частям ее спектра. Эта пара подпространств приводит к матрице A .

Итак, Q должна быть скалярной матрицей и, следовательно, имеет единственное собственное значение. Учтем теперь следующие особенности спектров матриц вида $Q = P\bar{P}$ (см., например, [2; задачи 4.6.6, 4.6.7]):

- 1) если λ является собственным значением матрицы Q , то $\bar{\lambda}$ – также собственное значение;
- 2) если Q имеет отрицательное собственное значение, то его кратность должна быть четной.

Свойство 1) означает, что в равенстве

$$Q = \alpha I_n$$

число α обязательно вещественно. Свойство 2) и условие теоремы 3 о нечетности порядка n исключают случай $\alpha = -1$. Следовательно,

$$Q = P\bar{P} = I_n.$$

Соединяя это с равенством $PP^* = I_n$, мы заключаем, что матрица P симметрична. Теперь нужное утверждение вытекает из основной теоремы 1. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При четном n равенство

$$Q = -I_n$$

возможно. В этом случае A является либо блочным кватернионом, либо матрицей, унитарно подобной некоторому блочному кватерниону (см. п. 2). Если такая матрица принадлежит классу $\mathcal{UR}_n$, то она с необходимостью приводима и, следовательно, включение $A \in \mathcal{UR}_n$ никак не может быть выведено из теоремы 3.

Условие неприводимости исключает применение теоремы 3 к таким матричным классам, как нормальные матрицы или матрицы с квадратичными минимальными многочленами. Однако эти два матричных класса принадлежат $\mathcal{UR}_n$, что из других соображений показано в [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*, Наука, М., 1969.
- [2] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [3] С. Pearcy, “A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^* -algebras of type I”, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1405–1416.
- [4] Х. Д. Икрамов, “О конечном рациональном критерии неприводимости матриц”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем., кибернет.*, 2007, № 3, 16–18.
- [5] Х. Д. Икрамов, “О комплексных матрицах, охватываемых посредством унитарного подобия”, *Докл. РАН*, **430**:1 (2010), 15–17.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

03.08.2009

Исправленный вариант

01.12.2009