Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, О. А. Съедина, А. А. Тужилин, Структура минимальных деревьев Штейнера в окрестностях лунок их ребер, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 353–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:47:16

Структура минимальных деревьев Штейнера в окрестностях лунок их ребер

А. О. Иванов, О. А. Съедина, А. А. Тужилин

В настоящей работе дается полное описание малых окрестностей замыканий лунок ребер минимальных деревьев Штейнера (теорема 1.1), для чего доказывается обобщение теоремы стабилизации вложенного локально минимального дерева [1]; рассмотрен случай двух таких непересекающихся деревьев (теорема 2.2).

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Задача о построении минимального по длине связного графа, соединяющего данные точки плоскости, известна как *классическая проблема Штейнера*. На практике такого рода задача возникает, если, например, нужно построить кратчайшую систему дорог, соединяющую выбранные города. Графы, которые являются решениями данной задачи, называют *минимальными деревьями Штейнера*, или *кратчайшими деревьями*. Кратчайшее дерево является плоским линейным деревом, т.е. плоским связным ациклическим графом, каждое ребро которого – прямолинейный отрезок.

Локальное устройство кратчайших деревьев хорошо известно, а именно, ребра таких деревьев стыкуются в вершинах под углами не менее 120° , поэтому степени вершин не превосходят трех (см., например, [2; гл. 2]). На практике важно уметь быстро строить кратчайшие деревья для большого количества заранее выбранных точек. Однако, как было показано в [3], задача построения кратчайшего дерева является *NP*-трудной.

Помимо указанного выше свойства, которое описывает структуру минимального дерева Штейнера в окрестности его вершин, хорошо известны еще несколько свойств таких деревьев. Одно из них – это, так называемое, свойство лунки. Напомним, что *лункой* $L(u_1 u_2) = L(e)$ отрезка $e = [u_1, u_2]$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется пересечение открытых кругов $D^2(u_1)$ и $D^2(u_2)$ с центрами в точках u_1 и u_2 соответственно, и радиусами, равными длине отрезка e . Граница лунки состоит из двух замкнутых дуг, точки пересечения которых назовем *вершинами лунки*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00748), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3224.2010.1), программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракт 14.740.11.0794) и гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 (свойство лунки [4]). *Лунка произвольного ребра кратчайшего дерева G не содержит точек дерева G , не лежащих на этом ребре.*

Заметим, что лунка – открытое множество, а утверждение 1.1 ничего не говорит о наличии точек из G на границе лунки. В данной работе исследованы пересечения кратчайших деревьев с достаточно малыми окрестностями лунок их ребер.

Начнем со следующего простого замечания.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Кратчайшее дерево может пересекать границу лунки произвольного своего ребра только по своим вершинам.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если некоторое ребро кратчайшего дерева G касается границы лунки некоторого ребра u_1u_2 по своей внутренней точке x , то, заменяя ребро u_1u_2 на один из отрезков xu_i , мы получим дерево, затягивающее исходное граничное множество и имеющее длину, не превосходящую, а, значит, равную длине дерева G . Поэтому перестроенное дерево является кратчайшим, однако оно не удовлетворяет упомянутому выше условию 120° – противоречие, завершающее доказательство.

Таким образом, достаточно описать, как могут распределяться вершины, попавшие на границу лунки, и как могут быть расположены инцидентные им ребра.

Прежде чем сформулировать основной результат, дадим несколько определений. Пусть $e = [u_1, u_2]$ – отрезок на плоскости $\mathbb{R}^2$, и $\bar{W}$ – произвольное конечное подмножество границы лунки $L(u_1u_2)$, содержащее u_1 и u_2 . Определим на $\bar{W}$ два отображения: N и ind .

Первое из них сопоставляет каждому элементу $w \in \bar{W}$ конечное подмножество $N(w)$ стандартной единичной окружности с центром в начале координат (окружности направлений) и называется *оснащением лунки $L(u_1u_2)$* . Обозначим через $\#N(w)$ число элементов в образе точки w .

Второе отображение ставит в соответствие каждой точке w из $\bar{W}$ число 1 или 2, которое называется *индексом* этой точки. Тройку $(\bar{W}, N, \text{ind})$ назовем *расширением лунки $L(u_1u_2)$* .

Определим теперь *правильное расширение лунки*. Для этого введем на плоскости $\mathbb{R}^2$ стандартно ориентированную декартову систему координат, выбрав в качестве начала O середину отрезка $[u_1, u_2]$, в качестве оси Ox – прямую (u_1, u_2) , направленную от u_1 к u_2 , а в качестве оси Oy – прямую, проходящую через вершины лунки. Обозначим эти вершины через v_1 и v_2 так, чтобы v_2 лежала на положительной полуоси Oy .

Положим $W = \bar{W} \setminus \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ и $W_{\text{ver}} = \bar{W} \cap \{v_1, v_2\}$. Разобьем W на четыре подмножества $W_i^\pm$, $i = 1, 2$, заданных в описанной только что системе координат так (см. рис. 1):

$$W_1^\pm = \{(x, y) \in W \mid x < 0, \pm y > 0\}, \quad W_2^\pm = \{(x, y) \in W \mid x > 0, \pm y > 0\}.$$

Положим

$$W_i = W_i^+ \cup W_i^- \quad \text{и} \quad \bar{W}_i = W_i \cup \{u_i\} \cup \{w \in W_{\text{ver}} \mid \text{ind } w = i\}.$$

Таким образом, $\bar{W} = \bar{W}_1 \sqcup \bar{W}_2$.

Для каждой упорядоченной пары (x, y) различных точек плоскости обозначим через $C(x, y)$ угол величины 120° с вершиной в начале координат O , ограниченный лучами, выходящими из O и образующими с вектором xy углы, равные 120° .

Рис. 1. Множества W_1^+ , W_2^+ , W_1^- , W_2^-

Отметим, что здесь и далее все векторы рассматриваются как элементы соответствующего линейного пространства, т.е. откладываются от начала координат. В этом смысле можно говорить об углах, образованных этими векторами с векторами из окружности направлений.

Назовем расширение лунки *правильным*, если для каждой пары $\{i, j\} = \{1, 2\}$ выполнены следующие условия:

- (1) если $W_i^+ \neq \emptyset$ (или $W_i^- \neq \emptyset$), то $W_j^+ = \emptyset$ (соответственно $W_j^- = \emptyset$);
- (2) для каждой точки $w \in W_i$ имеем $\text{ind } w = i$;
- (3) если $v_1 \in \overline{W}$ и $W_i^- \neq \emptyset$, то $\text{ind } v_1 = i$; аналогично, если $v_2 \in \overline{W}$ и $W_i^+ \neq \emptyset$, то $\text{ind } v_2 = i$;
- (4) если $w \in \overline{W}_i \setminus \{u_i\}$, то $N(w) \subset C(w, u_j)$;
- (5) $N(u_i) \subset \bigcap_{w \in \overline{W}_j} C(u_i, w)$;
- (6) для любого $w \in \overline{W}$ имеем $\#N(w) \leq 2$, и если $N(w) = \{n_1, n_2\}$, а $\text{ind } w = i$, то направления векторов n_1 , n_2 и wu_j образуют попарно углы в 120° .

Пусть G – произвольное кратчайшее дерево, и $e = u_1u_2$ – некоторое его ребро. Дерево G порождает расширение лунки $L(e)$ так. В качестве $\overline{W}$ возьмем $G \cap \partial L(e)$ (напомним, что по утверждению 1.2 каждая точка $w \in \overline{W}$ – вершина графа G , поэтому $\overline{W}$ – конечное подмножество границы лунки $L(e)$, содержащее u_1 и u_2). Определим оснащение N , положив $N(w)$ равным множеству направлений всех выходящих из w ребер дерева G . Наконец, определим $\text{ind } w$ следующим образом. Если $w = u_i$, то положим $\text{ind } w = i$. Иначе рассмотрим путь в G , начинающийся в w и заканчивающийся ребром e . Тогда одна из вершин u_1 , u_2 является внутренней для этого пути. Если это вершина u_i , то положим $\text{ind } w = i$. Построенное расширение лунки будем называть *геометрическим*.

В настоящей работе получены следующие два основных результата.

ТЕОРЕМА 1.1. *Геометрическое расширение лунки произвольного ребра кратчайшего дерева является правильным.*

Обратно, каждое правильное расширение лунки всякого отрезка $[u_1, u_2]$ на плоскости является геометрическим расширением, порожденным некоторым кратчайшим деревом (для которого отрезок $[u_1, u_2]$ является ребром).

Отметим, что при доказательстве теоремы 1.1 фактически построены примеры кратчайших деревьев, порождающих произвольно заданные правильные расширения лунок. Ввиду отсутствия просто проверяемых критериев минимальности деревьев задача построения таких примеров является нетривиальной. Для преодоления этих трудностей было получено обобщение (теорема 2.2) теоремы стабилизации (теорема 2.1), опубликованной в [1].

2. Предварительные результаты. Пусть G – произвольный граф. Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать множества вершин и ребер этого графа соответственно.

Пусть $G = \{I_k\}$ – конечная совокупность отрезков на плоскости. Построим по ней граф, взяв в качестве множества вершин все точки плоскости, являющиеся концами отрезков из G , и объявив пару $\{x, y\}$ ребром, если и только если отрезок $[x, y]$ совпадает с одним из I_k . Множество G , рассматриваемое вместе с этой структурой графа, назовем *линейным графом* на плоскости. Если ребра такого графа (рассматриваемые как отрезки) пересекаются только по общим вершинам, то назовем граф *вложенным*. Если линейный граф (как граф) является деревом, то будем называть его *линейным деревом*.

Пусть ρ – функция расстояния на стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и G – линейный граф. *Длиной ребра* $e = [v, w]$ графа G называется число $\rho(e) = \rho(v, w)$, а *длиной* $\rho(G)$ графа G – сумма длин всех его ребер.

Пусть M – произвольное конечное подмножество плоскости. Связный линейный граф, множество вершин которого совпадает с M , а длина – наименьшая возможная среди длин всех таких графов, является, очевидно, деревом и называется *минимальным остовным деревом для M* или *минимальным остовным деревом, затягивающим M* . Минимальное остовное дерево, очевидно, является вложенным линейным деревом. Отметим, что минимальное дерево Штейнера для конечного множества M (также говорят, что это дерево *соединяет M*) можно эквивалентным образом определить как минимальное остовное дерево, затягивающее конечное подмножество $N \subset \mathbb{R}^2$, $N \supset M$, и имеющее наименьшую возможную длину по всем таким N . Множество минимальных деревьев Штейнера обозначим через $SMT(M)$. Вершины из множества $N \setminus M$ называют *подвижными*, а из множества M – *граничными*. Множество граничных вершин минимального дерева Штейнера называется *границей* этого дерева.

Как было сказано во введении, степени $\deg v$ вершин v минимального дерева Штейнера не превосходят трех. Более того, в подвижных вершинах степени 2 ребра стыкуются под углом 180° , поэтому исключение их из множества вершин, а также добавление таких вершин не меняет свойства дерева быть кратчайшим. Последнее приводит к естественному соглашению считать, что все рассматриваемые кратчайшие деревья подвижных вершин степени 2 не содержат. Таким образом, с учетом сделанного соглашения, граница минимального дерева Штейнера содержит все вершины степени 1 и 2. Последнее приводит к следующему естественному определению границы произвольного графа.

Графом с границей назовем произвольный граф G , для которого задано некоторое подмножество ∂G множества вершин, содержащее все вершины степени 1 и 2. Множество ∂G называется *границей графа G* , а вершины из ∂G – *граничными*.

Пусть G_i , $i = 1, 2$, – графы с границами ∂G_i . Через $G_1 \cup G_2$ обозначим граф G , для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ (графы G_i могут

иметь общие вершины и ребра, которые в G “считаются” ровно один раз). Так как $\partial G_1 \cup \partial G_2$ содержит все вершины из G степени 1 и 2, это подмножество в $V(G)$ может быть выбрано в качестве естественной границы графа ∂G . Если не оговорено противное, мы всегда будем полагать $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$. Если множества $V(G_i)$ не пересекаются, то во введенных выше обозначениях будем заменять символ $\cup$ на $\sqcup$.

Определим операцию разрезания дерева G по вершине v степени $d > 1$, перестав отождествлять концы ребер, которые склеиваются в вершину v . При этом дерево распадается на поддеревья G_i , про которые будем говорить, что они получены *разрезанием дерева G по вершине v* . Если G – дерево с границей ∂G , то положим $\partial G_i = (G_i \cap \partial G) \cup \{v\}$.

Дерево G с границей ∂G будем называть *бинарным*, если степени его вершин равны 1 или 3, а ∂G состоит в точности из всех вершин степени 1. *Деревом Штейнера* назовем произвольное дерево с границей, степени вершин которого не превосходят 3. Отметим, что если произвольное дерево Штейнера разрезать по всем граничным вершинам степени больше 1, то оно распадется на бинарные деревья, называемые обычно *бинарными компонентами*.

Далее приведем результаты, играющие важную роль при доказательстве теоремы 1.1. Первый из них является непосредственным обобщением нескольких утверждений из [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть G – произвольное дерево с $n > 1$ граничными вершинами. Тогда, для каждой вершины $v \in V(G)$ кратчайший по числу ребер путь, соединяющий v с $\partial G \setminus \{v\}$, состоит не более чем из $\log_2(2n)$ ребер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать дерево G как корневое с корнем v . Тогда определено разбиение множества $V(G)$ на уровни: вершину $w \in V(G)$ отнесем к уровню с номером i , если и только если путь, соединяющий v и w , состоит из i ребер. В частности, корень v лежит на нулевом уровне.

Пусть m – номер первого ненулевого уровня, содержащего граничные вершины. Тогда кратчайший по числу ребер путь из v в $\partial G \setminus \{v\}$ состоит из m ребер. Так как граница ∂G дерева G содержит все вершины степени 1 и 2, уровни с номерами $0 < i < m$ состоят из вершин степени не меньше 3. Таким образом, на уровне с номером m лежит не меньше $2^{m-1} \deg v$ вершин. Заметим также, что корневое поддерево с корнем w , принадлежащим уровню с номером m , содержит, по крайней мере, одну граничную вершину, поэтому число вершин на m -м уровне не больше чем n , откуда $2^{m-1} \deg v \leq n$. Таким образом,

$$m \leq 1 + \log_2 \frac{n}{\deg v} \leq \log_2(2n).$$

Доказательство закончено.

Пусть G – некоторое дерево с границей $M = \partial G$. При выбрасывании произвольного ребра $e \in E(G)$ дерево G распадается на две компоненты G_1 и G_2 . При этом возникает *разбиение* границы M на два подмножества $M_i = M \cap G_i$, $i = 1, 2$. Полученное разбиение будем обозначать через $\mathcal{P}_G(e)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Всякие два различных ребра e_1 и e_2 произвольного дерева G с границей ∂G порождают различные разбиения $\mathcal{P}_G(e_1)$ и $\mathcal{P}_G(e_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – внутренняя вершина пути, соединяющего e_1 с e_2 , а γ – некоторый максимальный путь, содержащий одновременно e_1 и e_2 . Тогда концевые вершины v_1 и v_2 пути γ отличны от v , имеют степень 1 и, поэтому, принадлежат ∂G . Пусть обозначения v_i выбраны так, что часть пути γ между v_1 и e_1 не содержит e_2 . Пусть δ – максимальный путь, начинающийся с v и пересекающий γ только по вершине v . Заметим, что δ содержит некоторую граничную вершину w дерева G . Действительно, если путь δ одновершинный, т.е. совпадающий с v , то вершина v имеет степень 2 и, значит, является граничной. Если же δ состоит более чем из одной вершины, то он приходит в вершину степени 1, т.е. в граничную вершину. Осталось заметить, что компонента леса $G \setminus e_1$, содержащая v_2 , также содержит w . Однако компонента леса $G \setminus e_2$, содержащая v_1 , вершины w не содержит, поэтому разбиения $\mathcal{P}_G(e_1)$ и $\mathcal{P}_G(e_2)$ различны. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть Δ_1 и Δ_2 – произвольные деревья с непересекающимися множествами вершин. Положим $M_i = V(\Delta_i)$, $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, $M = V(\Delta) = M_1 \sqcup M_2$, и пусть G – произвольное дерево с границей M . Тогда для всех ребер $e \in E(G)$ за исключением, быть может, одного, в дереве G существует путь γ , проходящий через e и соединяющий вершины, смежные в Δ . Если существует e , для которого каждый содержащий его путь в дереве G не соединяет смежные вершины в Δ , то $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$. Обратно, если $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$, то концы любого пути в G , проходящего через e , не смежны в Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 2.2 для всех ребер e дерева G , кроме, быть может, одного, разбиение $\mathcal{P}_G(e)$ отлично от $\{M_1, M_2\}$. Пусть e – такое ребро, и пусть $\mathcal{P}_G(e) = \{N_1, N_2\} \neq \{M_1, M_2\}$. Тогда одно из M_i , скажем M_1 , содержит как вершины из N_1 , так и вершины из N_2 . Поэтому в дереве Δ_1 имеется такое ребро $n_1 n_2$, что $n_i \in N_i$ и, значит, путь γ в G , соединяющий n_1 с n_2 , искомый. Так как существование пути γ доказано для каждого e , порождающего разбиение $\mathcal{P}_G(e)$, отличное от $\{M_1, M_2\}$, то отсутствие такого пути для ребра e означает, что $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$. Обратное утверждение вытекает из того, что Δ_1 и Δ_2 не пересекаются. Доказательство закончено.

Пусть G – линейное дерево с границей M , и $\mathcal{P}_G(e) = \{M_1, M_2\}$ для некоторого ребра $e \in E(G)$. Евклидово расстояние между M_1 и M_2 будем обозначать через $d_G(e)$. Следующее утверждение хорошо известно, см., например, [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Для всякого ребра e дерева $G \in \text{SMT}(M)$ верно неравенство $\rho(e) \leq d_G(e)$.

Для произвольного конечного подмножества M плоскости $\mathbb{R}^2$ положим $D(M) = \max\{\rho(M_1, M_2) \mid M = M_1 \sqcup M_2, M_i \neq \emptyset\}$. Полученную величину назовем *разреженностью* множества M .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для всякого ребра e дерева $G \in \text{SMT}(M)$ верно неравенство $\rho(e) \leq D(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по определению разреженности выполнено $d_G(e) \leq D(M)$. Осталось воспользоваться утверждением 2.3. Следствие доказано.

Напомним, что *подразбиением плоского линейного графа с границей* называется граф, полученный из исходного добавлением граничных вершин степени 2 на его

ребра. *Плотностью* подразделения назовем максимум длин ребер этого подразделения. Более общо, *плотностью* $\sigma(G)$ *линейного графа* G назовем максимум длин его ребер.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Пусть G – произвольное линейное дерево с множеством вершин M . Тогда $D(M) \leq \sigma(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{M_1, M_2\}$ – произвольное разбиение множества M на непустые M_i , а $v_i \in M_i$ таковы, что $\rho(v_1, v_2) = \rho(M_1, M_2)$. В силу связности дерева G , существует путь γ в G , соединяющий v_1 и v_2 . Ясно, что на этом пути имеется такое ребро w_1w_2 , что $w_i \in M_i$. Так как на точках v_i достигается расстояние между множествами M_i , имеем $\rho(w_1, w_2) \geq \rho(v_1, v_2)$. Поэтому, применяя это рассуждение к разбиению $\{M_1, M_2\}$, для которого $\rho(M_1, M_2) = D(M)$, получаем

$$D(M) = \rho(M_1, M_2) \leq \rho(w_1, w_2) \leq \max\{\rho(e) \mid e \in E(G)\} = \sigma(G),$$

что и требовалось.

Линейное дерево Штейнера называется *локально минимальным*, если его ребра стыкуются под углами, не меньшими 120° .

ТЕОРЕМА 2.1 [1]. Для любого вложенного локально минимального дерева существует такое $\varepsilon > 0$, что каждое его подразбиение плотности меньше ε является кратчайшим деревом.

Подразбиение плоского линейного графа G называется p -разбиением, если каждое ребро исходного графа делится на 2^p равных частей. Результат p -разбиения графа G обозначим через G^p .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Пусть G – линейное дерево с границей $\partial G = V(G)$. Тогда для любого целого неотрицательного p имеем

$$D(\partial G^p) \leq \frac{\sigma(G)}{2^p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как при рассматриваемом подразбиении каждое ребро дерева G разбилось на равные 2^p частей, имеем

$$\sigma(G^p) = \frac{\sigma(G)}{2^p}.$$

Осталось применить утверждение 2.4. Доказательство закончено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Пусть G – линейный лес с границей ∂G , состоящей из $n \geq 1$ вершин. Пусть $n(p)$ – количество точек в ∂G^p . Тогда

$$n(p) \leq n \cdot 2^{p+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ неравенство очевидно.

Пусть теперь $n > 1$. У леса с n граничными вершинами количество ребер не превосходит $2n - 3$, т.е. количества ребер бинарного дерева с границей из n вершин. При p -подразбиении линейного графа к множеству граничных вершин добавляется $2^p - 1$ вершина для каждого ребра, поэтому

$$n(p) \leq n + (2n - 3)(2^p - 1) = 2n \cdot 2^p + (3 - n - 3 \cdot 2^p) \leq n \cdot 2^{p+1},$$

что и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. Пусть Δ_1 и Δ_2 – непересекающиеся линейные деревья, причем $\partial\Delta_i = V(\Delta_i)$, $i = 1, 2$. Положим $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$. Пусть p – произвольное неотрицательное целое число. Тогда для любого ребра e произвольного дерева $G \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$, кроме, быть может, одного, выполняется $\rho(e) \leq \sigma(\Delta)/2^p$. Если существует $e \in E(G)$, для которого $\rho(e) > \sigma(\Delta)/2^p$, то такое e единственно и $\mathcal{P}_G(e) = \{\partial\Delta_1^p, \partial\Delta_2^p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2.1 для всех ребер $e \in E(G)$, кроме, быть может, одного, существует путь, проходящий через e и соединяющий смежные в Δ^p вершины, скажем v_1 и v_2 . Так как G – кратчайшее дерево, имеем $\rho(e) \leq \rho(v_1, v_2)$. Поскольку Δ^p состоит из двух деревьев Δ_i^p , а вершины v_i смежны, они лежат в одном из Δ_i^p , поэтому

$$\rho(v_1, v_2) \leq \max\{\sigma(\Delta_1^p), \sigma(\Delta_2^p)\} = \frac{1}{2^p} \max\{\sigma(\Delta_1), \sigma(\Delta_2)\} = \frac{\sigma(\Delta)}{2^p},$$

откуда $\rho(e) \leq \sigma(\Delta)/2^p$. Поскольку выполнение этого условия доказано для всех e , входящих в некоторые пути, соединяющие смежные вершины из Δ^p , невыполнение этого условия означает отсутствие соответствующих путей, что, по тому же следствию 2.1, влечет выполнение условия $\mathcal{P}_G(e) = \{\partial\Delta_1^p, \partial\Delta_2^p\}$. Единственность e вытекает из утверждения 2.2. Доказательство закончено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Пусть Δ_1 и Δ_2 – непересекающиеся линейные деревья, причем $\partial\Delta_i = V(\Delta_i)$, $i = 1, 2$. Положим $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое p_0 , что для любого целого неотрицательного $p > p_0$ расстояние от любой вершины v произвольного дерева $G \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$ до $\partial\Delta^p$ не превосходит ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – произвольная вершина дерева G . Если $v \in \partial\Delta^p$, то $\rho(v, \partial\Delta^p) = 0$, и утверждение выполнено для любого ε .

Пусть теперь $v \notin \partial\Delta^p$. Тогда v – подвижная вершина дерева G , поэтому $\deg v = 3$. Разрежем дерево G по вершине v . Тогда G распадется на три дерева Штейнера G_i . Так как степень вершины v равна 3 в G , каждое дерево G_i , а, значит, и его граница, состоят не менее чем из двух вершин. Таким образом, если m_i – количество граничных вершин дерева G_i , то $m_i > 1$.

Пусть n и $n(p)$ обозначают количества точек в $\partial\Delta$ и $\partial\Delta^p$ соответственно. По утверждению 2.6 имеем

$$n(p) \leq n \cdot 2^{p+1},$$

откуда

$$m_i \leq n(p) \leq n \cdot 2^{p+1}.$$

По утверждению 2.7 для всех ребер дерева G , за исключением, быть может, одного, выполняется $\rho(e) \leq \sigma(\Delta)/2^p$, поэтому все ребра одного из деревьев G_i не длиннее $\sigma(\Delta)/2^p$. Пусть этим свойством обладает G_1 .

Рассмотрим кратчайший по числу ребер путь в G_1 , соединяющий v с $\partial G_1 \setminus \{v\}$. По утверждению 2.1 путь γ состоит не более чем из $\log_2(2m_1)$ ребер, поэтому его евклидова длина, а, значит, и $\rho(v, \partial\Delta^p)$, не превосходят

$$\frac{\sigma(\Delta)}{2^p} \log_2(2m_1) \leq \frac{\sigma(\Delta)}{2^p} \log_2(4n \cdot 2^p).$$

Последняя величина стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$, откуда и вытекает справедливость утверждения. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть Δ_1 и Δ_2 – непересекающиеся линейные деревья, причем $\partial\Delta_i = V(\Delta_i)$, $i = 1, 2$, и пусть $d = \rho(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ – расстояние между ними. Положим $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$. Тогда существует такое p_0 , что для любого целого неотрицательного $p > p_0$ у произвольного дерева $G \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$ найдется (единственное) ребро e , для которого $\mathcal{P}_G(e) = \{\partial\Delta_1^p, \partial\Delta_2^p\}$. Более того, для любого $\delta > 0$ число p_0 можно выбрать столь большим, чтобы выполнялось $\rho(e) > d - \delta$, и для любого отличного от e ребра $e' \in E(G)$ имели бы $\rho(e') < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось $2\varepsilon < \delta$ и чтобы ε -окрестности U_i деревьев Δ_i не пересекались. Подберем p_0 в соответствие с утверждением 2.8; тогда в силу этого утверждения все вершины дерева G лежат в $U_1 \sqcup U_2$. Так как G связно, существует ребро e дерева G , которое соединяет некоторую вершину v_1 из U_1 с некоторой вершиной v_2 из U_2 . Уменьшим, если необходимо, ε так, чтобы выполнялось $d - 2\varepsilon > \varepsilon$; тогда $\rho(e) > \varepsilon$.

По утверждению 2.7 длина любого ребра дерева G , за исключением, быть может, одного, не превосходит $\sigma(\Delta)/2^p$. Выберем p_0 таким, для которого $\sigma(\Delta)/2^p < \varepsilon$. Тогда для выбранных ε и p_0 имеем $\rho(e) > \varepsilon > \sigma(\Delta)/2^p$, откуда по утверждению 2.7 ребро e единственно и $\mathcal{P}_G(e) = \{\partial\Delta_1^p, \partial\Delta_2^p\}$. Кроме того, по этому же утверждению все остальные ребра дерева G короче ε и, значит, короче δ . Длина же ребра e больше чем $d - 2\varepsilon > d - \delta$, что и требовалось.

Пусть a и b – два неколлинеарных вектора на стандартно ориентированной плоскости. *Ориентированным углом* $\alpha(a, b)$ упорядоченной пары (a, b) называется величина наименьшего из двух углов между направлениями этих векторов, взятая со знаком, равным знаку ориентации репера (a, b) . Если векторы a и b ненулевые и сонаправленные, то положим $\alpha(a, b) = 0$.

Пусть L – вложенная ломаная на плоскости с концевым звеном e , ориентированная от этого звена, и $e_1 = e, e_2, \dots, e_m$ – последовательные ребра ломаной L , рассматриваемые как вектора, направления которых согласованы с ориентацией L . Если все углы $\alpha(e_i, e_{i+1})$ одинаковы, то ломаная L называется *монотонной с углом поворота* $\alpha = \alpha(e_i, e_{i+1})$. Класс таких ломаных будем обозначать через $L(e, \alpha)$.

Пусть $[A, B]$ – произвольный отрезок на плоскости, и $0 < \varepsilon < |AB|/2$. Через AB обозначим соответствующий вектор. Выберем одну из вершин отрезка $[A, B]$, скажем B , и выпустим из нее два ориентированных от вершины B отрезка $e_{\pm}$ таких, что $\alpha(AB, e_{\pm}) = \pm\pi/3$. Рассмотрим две четырехзвенные ломаные $L_{\pm} \in L(e_{\pm}, \pm\pi/3)$, у которых первые три звена имеют длину ε , а последнее звено – длину 2ε . Ломаные $L_{\pm}$ ограничивают замкнутый многоугольник, который мы назовем ε -бабочкой вершины B отрезка $[A, B]$ и обозначим через $\mathcal{B}(A, B, \varepsilon)$. Выкинем из бабочки $\mathcal{B}(A, B, \varepsilon)$ ее пересечение с отрезком $[A, B]$, и к каждой из двух полученных связных компонент добавим вершину B . Построенные множества назовем *крыльями бабочки* $\mathcal{B}(A, B, \varepsilon)$. Обозначим через $\mathcal{W}_{\pm}(A, B, \varepsilon)$ то крыло бабочки $\mathcal{B}(A, B, \varepsilon)$, которое содержит отрезок $e_{\pm}$. Лучи, выходящие из B и содержащие $e_{\pm}$, назовем B -*усами* отрезка $[A, B]$ и будем обозначать через $r_{\pm}(A, B)$. Введенные понятия проиллюстрированы на рис. 2. Отметим, что если $|AB| > 4\varepsilon > 0$, то ε -бабочки вершин A и B не пересекаются.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. Во введенных выше обозначениях пусть $0 < \varepsilon < |AB|/2$ и пусть f – ориентированный отрезок, начинающийся в вершине B отрезка $[A, B]$ и сонаправленный с одним из e_s , $s = +$ или $-$. Пусть L – монотонная ломаная из

Рис. 2. Крылья бабочек $\mathcal{B}(A, B, \varepsilon)$ и $\mathcal{B}(B, A, \varepsilon)$, а также усы отрезка $[A, B]$

класса $L(f, \pi/3)$. Предположим, что все звенья ломаной L не длиннее ε , и что L пересекает $[A, B]$ только по точке B . Тогда соответствующее крыло $\mathcal{W}_s(A, B, \varepsilon)$ содержит всю ломаную L .

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть G – локально минимальное дерево, $w_1 w_2$ – некоторое его ребро. Пусть $0 < \varepsilon < \rho(w_1 w_2)/2$, и предположим, что все ребра дерева G , за исключением ребра $w_1 w_2$, не длиннее ε . Пусть G_i – связные компоненты леса $G \setminus w_1 w_2$, причем $w_i \in V(G_i)$. Тогда каждое крыло $\mathcal{W}_s(w_1, w_2, \varepsilon)$, $s = +$ или $-$, содержит граничную вершину дерева G , лежащую в G_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если w_2 – граничная вершина дерева G , то она, по определению крыльев, содержится в каждом $\mathcal{W}_s(w_1, w_2, \varepsilon)$.

Предположим теперь, что w_2 – внутренняя вершина дерева G , и пусть e_s обозначает отличное от $w_1 w_2$ ребро дерева G , инцидентное w_2 , ориентированное от w_2 и такое, что $\alpha(w_1 w_2, e_s) = \pi/3$. Обозначим через γ_s максимальный путь, начинающийся на ребре $w_1 w_2$, проходящий через e_s , являющийся монотонной ломаной и не содержащий внутри себя граничных вершин. По утверждению 2.9 путь γ_s лежит в крыле $\mathcal{W}_s(w_1, w_2, \varepsilon)$. Осталось заметить, что в силу максимальной каждый из этих путей заканчивается граничной вершиной, лежащей в G_2 , поскольку весь путь там лежит. Следствие доказано.

Пусть $[A_1, A_2]$ – произвольный отрезок. Для каждого $\{i, j\} = \{1, 2\}$ обозначим через $\mathcal{H}(A_j, A_i)$ угол величины 120° между A_i -усами отрезка $[A_1, A_2]$. Множество $\{\mathcal{H}(A_2, A_1), \mathcal{H}(A_1, A_2)\}$ назовем *расщепленным клином отрезка* $[A_1, A_2]$, см. рис. 3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10. Рассмотрим два отрезка $[A_1, A_2]$ и $[B_1, B_2]$ и пусть $0 < \varepsilon < \rho(B_1, B_2)/2$. Предположим, что для каждого $s \in \{+, -\}$

$$[B_1, B_2] \cap \mathcal{H}(A_1, A_2) = \emptyset \quad \text{и} \quad \mathcal{W}_s(B_1, B_2, \varepsilon) \cap \mathcal{H}(A_1, A_2) \neq \emptyset.$$

Тогда при каждом $s \in \{+, -\}$ имеем $r_s(B_1, B_2) \cap r_s(A_1, A_2) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}(A_j, A_i)$ и $\mathcal{W}_\pm^i = \mathcal{W}_\pm(B_j, B_i, \varepsilon)$, см. рис. 4. Пусть X_s – произвольная точка из $\mathcal{W}_s^2 \cap \mathcal{H}_2$. Из выпуклости $\mathcal{H}_2$ вытекает, что $[X_-, X_+] \subset \mathcal{H}_2$. Так как $[B_1, B_2] \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$, отрезок $[X_-, X_+]$ пересекает оба луча $r_\pm(B_1, B_2)$. Положим $Y_s = r_s(B_1, B_2) \cap [X_-, X_+]$. Отметим, что $Y_s \in \mathcal{H}_2$. Так

Рис. 3. Расщепленный клин

Рис. 4. Доказательство утверждения 2.10

как $B_2 \notin \mathcal{H}_2$, отрезок $[B_2, Y_s] \subset r_s(B_1, B_2)$ пересекает границу $\mathcal{H}_2$, т.е. $r_1(A_1, A_2) \cup r_2(A_1, A_2)$. Обозначим через Z_s первую точку луча $r_s(B_1, B_2)$, попавшую в $\mathcal{H}_2$ и, значит, на его границу.

Отметим, что точки Z_s не могут находиться на разных лучах $r_{\pm}(A_1, A_2)$, так как иначе образуется четырехугольник $B_2Z_-A_2Z_+$, в котором сумма углов в вершинах B_2 и A_2 равна 360° . Поэтому обе Z_s лежат на одном из $r_{\pm}(A_1, A_2)$.

Без ограничения общности предположим, что Z_s лежат на $r_+(A_1, A_2)$. Осталось показать, что луч $r_-(B_1, B_2)$ пересекает $r_-(A_1, A_2)$. Обозначим через $\alpha_{\pm}$ угол треугольника $B_2Z_+Z_-$ в вершине $Z_{\pm}$. Так как угол этого треугольника в вершине B_2 равен 120° , имеем $\alpha_{\pm} < 60^\circ$, поэтому угол между лучом $r_-(B_1, B_2)$ и вектором Z_-A_2 , равный α_- как вертикальный, также меньше 60° , поэтому луч $r_-(B_1, B_2)$ пересекает $r_-(A_1, A_2)$ в силу того, что последний образует угол с вектором Z_-A_2 , равный 60° . Доказательство закончено.

Рис. 5. Доказательство утверждения 2.11, случаи (1) и (2)

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11. Пусть $[A_1, A_2]$ – это произвольный отрезок длины d и $\{\mathcal{H}(A_2, A_1), \mathcal{H}(A_1, A_2)\}$ – его расщепленный клин. Предположим, что для некоторого $0 < \varepsilon < d/2$ отрезка $[B_1, B_2] \neq [A_1, A_2]$ и при всех $\{i, j\} = \{1, 2\}$ выполняется $\mathcal{W}_{\pm}(B_i, B_j, \varepsilon) \cap \mathcal{H}(A_i, A_j) \neq \emptyset$. Тогда $\rho(B_1, B_2) > d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. в сделанных предположениях $\rho(B_1, B_2) \leq d$. Положим $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}(A_j, A_i)$ и $\mathcal{W}_{\pm}^i = \mathcal{W}_{\pm}(B_j, B_i, \varepsilon)$. Рассмотрим три случая, проиллюстрированных на рис. 5 и рис. 6.

(1) Если $B_i \in \mathcal{H}_i$ при каждом i , то в силу того, что $[A_1, A_2] \neq [B_1, B_2]$, имеем $\rho(B_1, B_2) > d$. Поэтому по крайней мере одна из точек B_i , скажем, B_2 , не лежит в $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_2$.

(2) Пусть сначала $B_1 \in \mathcal{H}_1$. Так как $B_2 \notin \mathcal{H}_2$, отрезок $[B_1, B_2]$ не пересекает $\mathcal{H}_2$, поэтому можно применить утверждение 2.10, из которого вытекает, что $r_s(B_1, B_2) \cap r_s(A_1, A_2) \neq \emptyset$ при каждом $s \in \{-, +\}$.

Пусть Z_s – произвольная точка из $r_s(B_1, B_2) \cap r_s(A_1, A_2)$, а X – единственная точка из $\mathcal{H}_2$ такая, что треугольник Z_+Z_-X правильный. В четырехугольнике $Z_+B_2Z_-X$ сумма противоположных углов равна 180° , поэтому этот четырехугольник можно вписать в окружность и, значит, углы Z_+B_2X и XB_2Z_- равны, откуда луч B_1B_2 содержит точку X . Также показывается, что через точку X проходит и луч A_1A_2 .

Рассмотрим вертикальный угол α величины 60° , ограниченный прямыми $\ell_{\pm}(A_1, A_2)$, проходящими соответственно через лучи $r_{\pm}(A_1, A_2)$. Так как $B_2 \notin \mathcal{H}_2$, имеем $B_2 \in \alpha$, иначе $B_2Z_+A_2Z_-$ – четырехугольник, сумма углов в вершинах B_2 и A_2 которого равна 360° . Так как $X \notin \mathcal{H}_1$, а $B_1 \in \mathcal{H}_1$, то луч XB_2 пересекает границу $\mathcal{H}_1$ в некоторой точке B . Так как эта граница состоит из лучей $r_{\pm}(A_2, A_1)$, точка B принадлежит одному из этих лучей, скажем $r_-(A_2, A_1)$. Пусть $r'_{\pm}(A_1, A_2)$ –

Рис. 6. Доказательство утверждения 2.11, случай (3)

луч, симметричный $r_{\pm}(A_1, A_2)$ на прямой $\ell_{\pm}(A_1, A_2)$. Тогда из сказанного выше вытекает, что отрезок $[X, B]$ пересекает $r'_-(A_1, A_2)$ в некоторой точке B' . Осталось заметить, что $\rho(B, B') > \rho(A_2, A_1) = d$, так как луч с началом в A_2 в направлении вектора $B'B$ пересекает $r_-(A_2, A_1)$ в некоторой точке C такой, что A_2CBB' – параллелограмм, откуда $\rho(B', B) = \rho(A_2, C)$, однако в треугольнике A_2A_1C угол A_1 равен 120° и, значит, сторона A_2C этого треугольника – самая длинная. Поскольку $\rho(B_1, B_2) > \rho(B, B')$, утверждение справедливо в рассматриваемом случае.

(3) Наконец, пусть $B_i \notin \mathcal{H}_i$ при каждом $i = 1, 2$. Заметим, что крылья $\mathcal{W}_{\pm}^i$ лежат в замкнутой 2ε -окрестности точки B_i , поэтому, так как $\mathcal{W}_{\pm}^i \cap \mathcal{H}_i \neq \emptyset$, имеем $\rho(B_i, \mathcal{H}_i) \leq 2\varepsilon$. Отсюда вытекает, что если для некоторого i выполняется $B_i \in \mathcal{H}_j$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$, то

$$d = \rho(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j) \leq \rho(B_i, \mathcal{H}_i) + \rho(B_i, \mathcal{H}_j) \leq 2\varepsilon;$$

противоречие с выбором ε . Таким образом, точки B_i не лежат в $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

Покажем теперь, что $[B_1, B_2]$ не пересекает $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$. Предположим противное, т.е. $[B_1, B_2]$ пересекает одно из $\mathcal{H}_i$, скажем, $\mathcal{H}_2$. Пусть ℓ – прямая, проходящая через $[B_1, B_2]$. Так как B_1 и B_2 не лежат в $\mathcal{H}_2$, прямая ℓ не пересекает области, ограниченной лучами $r_{\pm}(A_2, A_1)$ и $r'_{\pm}(A_1, A_2)$, поэтому $\rho(\mathcal{H}_1, \ell) \geq d$, откуда $\rho(\mathcal{H}_1, B_1) \geq d$; противоречие с доказанным выше неравенством $\rho(\mathcal{H}_i, B_i) < 2\varepsilon < d$. Таким образом, применимо утверждение 2.10, в силу которого лучи $r_{\pm}(B_i, B_j)$ пересекают соответствующие лучи $r_{\pm}(A_i, A_j)$ при каждом $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Выберем в каждом множестве $r_{\pm}(B_i, B_j) \cap r_{\pm}(A_i, A_j)$ некоторую точку $Z_{\pm}^i$. Тогда отрезки $[Z_{\pm}^i, B_i]$ и $[B_1, B_2]$ являются ребрами локально минимальной сети с той же границей и с той же структурой плоского графа, что и сеть, порожденная отрезками $[Z_{\pm}^i, A_i]$ и $[A_1, A_2]$. Однако, как известно, см., например, [2], локально минимальные сети с одинаковыми границами и структурами плоского графа (т.е. планарно эквивалентные) совпадают, поэтому $[B_1, B_2] = [A_1, A_2]$; противоречие с условием. Утверждение полностью доказано.

Разработанная выше техника позволяет доказать обобщение теоремы стабилизации [1].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть Δ_1 и Δ_2 – непересекающиеся вложенные локально минимальные деревья, причем $\partial\Delta_i = V(\Delta_i)$, и пусть $d = \rho(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ – расстояние между ними. Положим $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$. Предположим, что для каждой пары (v_1, v_2) , на которой достигается d , дерево $\Delta \cup v_1v_2$ является локально минимальным. Тогда d достигается только на парах (v_1, v_2) вершин деревьев Δ_i , $v_i \in V(\Delta_i)$; в частности, таких пар – конечное число. Более того, существует такое p_0 , что для любого целого неотрицательного $p > p_0$ и каждой пары вершин $v_i \in V(\Delta_i)$, для которых $\rho(v_1, v_2) = d$, дерево $\Delta^p \cup v_1v_2$ принадлежит $\text{SMT}(\partial\Delta^p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы вытекает из вида локальной структуры локально минимальных деревьев.

Далее, пусть v – произвольная вершина из Δ . Через $\Delta - v$ обозначим граф, полученный из Δ удалением вершины v и всех инцидентных ей ребер. Пусть $\nu_v = \rho(v, \Delta - v)$, и положим

$$\nu = \min\{\nu_v \mid v \in V(\Delta)\}.$$

Выберем произвольное $0 < \varepsilon < \nu/4$, и пусть U_v^ε обозначает ε -окрестность с центром в точке v . Тогда для любых различных вершин v и w леса Δ окрестности U_v^ε и U_w^ε не пересекаются, расстояние между точками разных окрестностей больше 2ε , т.е. расстояния между любыми точками из одной окрестности, и каждая окрестность U_v^ε пересекается только с ребрами, инцидентными v .

Рассмотрим все пары вершин деревьев Δ_i , на которых достигается расстояние d между этими деревьями, и множество вершин, входящих в эти пары, обозначим через V^d . Положим $V_i^d = V^d \cap \Delta_i$, $U_i = \bigcup_{v \in V_i^d} U_v^\varepsilon$, и пусть, для $\{i, j\} = \{1, 2\}$,

$$\eta_i = \rho(\Delta_i \setminus U_i, \Delta_j), \quad \eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}.$$

Ясно, что $\eta > d$. Более того, если $a_i \in \Delta_i$ и $\rho(a_1, a_2) < \eta$, то $a_i \in U_i$.

В обозначениях следствия 2.3 выберем произвольное $0 < \delta < (\eta - d)/4$, для которого дополнительно верно $d - \delta > 2\delta$ и $2\delta < \varepsilon$. Пусть p_0 таково, что выполняется утверждение этого следствия, а также что Δ_i^p – кратчайшие деревья (чего можно добиться в силу теоремы 2.1). Выполнение условий следствия означает, что в каждом $G \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$ имеется ровно одно “длинное” ребро e , для которого $\rho(e) > d - \delta$, $\mathcal{P}_e(G) = \{\partial\Delta_1^p, \partial\Delta_2^p\}$, и по утверждению 2.3 $\rho(e) \leq d$. При этом все остальные ребра e' короче δ .

Пусть G_i – связные компоненты леса $G \setminus e$, причем $\partial\Delta_i^p \subset V(G_i)$. Тогда в сделанных предположениях $\rho(G_i) \geq \rho(\Delta_i^p)$. На самом деле, как мы покажем, ребро e обязано соединять вершины леса Δ , на которых достигается расстояние между Δ_1 и Δ_2 , поэтому $\rho(e) = d$, откуда

$$\rho(G) = \rho(G_1) + \rho(G_2) + \rho(e) \geq \rho(\Delta_1^p) + \rho(\Delta_2^p) + \rho(e) = \rho(\Delta^p \cup e)$$

и, значит, $\Delta^p \cup e \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$, причем здесь в качестве e можно выбрать любой отрезок длины d , соединяющий вершины деревьев Δ_1 и Δ_2 , что и завершит доказательство теоремы.

Предположим противное, т.е. e не соединяет вершины леса Δ , на которых достигается d . Если обе вершины ребра e граничные, то они являются точками линейных

деревьев Δ_1 и Δ_2 , поэтому $\rho(e) > d$, что противоречит отмеченному выше обратному неравенству. Таким образом, одна из вершин ребра e подвижная.

Пусть $e = w_1 w_2$, вершина w_2 подвижная в дереве G , и пусть, для определенности, $w_i \in V(G_i)$. Так как все ребра дерева G , за исключением ребра e , короче $\delta < (d - \delta)/2 < \rho(e)/2$, применимо следствие 2.4, в силу которого каждое крыло $\mathcal{W}_s(w_1, w_2, \delta)$ содержит граничную вершину a_2^s дерева G , принадлежащую G_2 т.е. некоторую точку из $\partial\Delta_2^p$. Кроме того, или $w_1 \in \partial\Delta_1^p$, или аналогичными рассуждениями получаем, что крылья $\mathcal{W}_t(w_2, w_1, \delta)$ содержат точки a_1^t из $\partial\Delta_1^p$. Положим $B_1 = \{w_1\}$ в случае, когда $w_1 \in \partial\Delta_1^p$, иначе $B_1 = \{a_1^+, a_1^-\}$.

Заметим, что крылья $\mathcal{W}_\pm(w_i, w_j, \delta)$ лежат в $U_{w_j}^{2\delta} \subset U_{w_j}^\varepsilon$, поэтому расстояние между a_2^s и каждой точкой из B_1 меньше $d + 4\delta < \eta$, откуда в силу отмеченного выше $B_1 \subset U_1$ и $a_2^s \in U_2$. С другой стороны, каждое U_i представляет собой несвязное объединение ε -окрестностей точек из V_i^d , причем расстояние между этими окрестностями больше их диаметра. Отсюда вытекает, что обе точки $a_2^\pm$ лежат в одной из таких окрестностей, скажем, в $U_{v_2}^\varepsilon$. Аналогично, $B_1 \subset U_{v_1}^\varepsilon$. Далее, каждая такая окрестность U_v^ε пересекает дерево Δ только по ребрам, инцидентным вершине v . Напомним, что по определению подразбиения все граничные вершины дерева G лежат на ребрах исходного леса Δ . Поэтому в силу локальной минимальности дерева $\Delta \cup v_1 v_2$ имеем $B_1 \subset \mathcal{H}(v_2, v_1)$ и $\{a_2^+, a_2^-\} \subset \mathcal{H}(v_1, v_2)$ и, значит, применимо утверждение 2.11, в силу которого $\rho(w_1, w_2) > d$. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. По-видимому, теорема 2.2 может быть обобщена на случай трех и более вложенных, попарно не пересекающихся локально минимальных деревьев.

3. Доказательство основной теоремы. Начнем с доказательства первой части теоремы 1.1. Итак, пусть $u_1 u_2$ – произвольное ребро кратчайшего дерева G . Будем пользоваться обозначениями, определенными во введении. Рассмотрим заданное деревом G геометрическое оснащение $(\bar{W}, N, \text{ind})$ лунки $L(u_1 u_2)$ ребра $u_1 u_2$ и покажем, что это оснащение является правильным. Для этого мы должны проверить выполнение всех пунктов из определения правильного оснащения.

Начнем с проверки пункта (2). Предположим противное, т.е. для некоторой вершины $w \in W_i$ имеем $\text{ind } w = j$. Рассмотрим путь γ в G , соединяющий w с $u_1 u_2$. Тогда, по определению ind , вершина u_j – внутренняя для γ , поэтому $\gamma \cup u_i w$, являясь единственным циклом в $G \cup u_i w$, содержит ребро $u_1 u_2$, откуда $G \cup u_i w \setminus u_1 u_2$ – дерево, соединяющее ∂G . Однако $\rho(u_i, w) < \rho(u_1, u_2)$, поэтому последнее дерево короче кратчайшего дерева G ; противоречие.

Докажем теперь пункт (1). Предположим противное, и пусть, для определенности, W_1^+ и W_2^+ одновременно непусты. Заметим, что для любых $w_i \in W_i^+$ имеем $\rho(w_1, w_2) < \rho(u_1, u_2)$. Так как по доказанному выше пункту (2) выполняется $\text{ind } w_i = i$, путь γ в дереве G , соединяющий w_1 и w_2 , проходит через ребро $u_1 u_2$, поэтому $G \cup w_1 w_2 \setminus u_1 u_2$ – дерево, соединяющее ∂G и имеющее меньшую длину, чем кратчайшее дерево G ; противоречие.

Для доказательства пункта (3) предположим, для определенности, что $v_1 \in \bar{W}$ и $W_i^- \neq \emptyset$, однако $\text{ind } v_1 = j$. Выберем произвольную вершину $w \in W_i^-$; тогда $\rho(w, v_1) < \rho(u_1, u_2)$ и по доказанному выше $\text{ind } w = i$. Таким образом, путь, соединяющий w и v_1 , содержит ребро $u_1 u_2$, поэтому мы можем укоротить кратчайшее дерево G , заменив его на $G \cup v_1 w \setminus u_1 u_2$; противоречие.

Рис. 7. Множество дуг и отрезков вида $[w, a_i^w]$

Для доказательства оставшихся пунктов заметим, что все графы, получающиеся из G заменой ребра u_1u_2 на ребро u_iw , где $w \in \bar{W}_j$, являются деревьями, соединяющими ∂G и имеющими ту же длину, что и G , поэтому все они – кратчайшие для ∂G . Отсюда вытекает, что для каждого из них должно выполняться условие на локальную структуру, а именно, угол между любой парой смежных ребер любого из полученных деревьев должен быть не меньше 120° . Последнее и отражено в пунктах (4)–(6). Таким образом, прямое утверждение теоремы доказано.

Докажем теперь обратное утверждение теоремы. Пусть $[u_1, u_2]$ – произвольный отрезок на плоскости и $(\bar{W}, N, \text{ind})$ – некоторое правильное расширение лунки $L(u_1u_2)$. Выпустим из каждой точки $w \in \bar{W}$ лучи в направлениях из множества $N(w)$. Для каждого $n_i \in N(w)$ обозначим через ℓ_i^w луч с началом в w , идущий в направлении n_i .

Отметим, что каждый из лучей ℓ_i^w пересекает лунку только по своей вершине w в силу пунктов (4) и (5) из определения правильного расширения лунки. Положим $[u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon]$ – отрезок, содержащий $[u_1, u_2]$, для которого $\rho(u_i, u_i^\varepsilon) = \varepsilon$. Тогда в силу сделанного только что замечания существует такое $\varepsilon > 0$, что точки пересечения разных лучей ℓ_i^w не лежат как на $\partial L(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon)$, так и внутри открытой области, ограниченной кривыми $\partial L(u_1u_2)$ и $\partial L(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon)$. Обозначим через a_i^w точку пересечения луча ℓ_i^w с $\partial L(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon)$. Тогда в силу сказанного выше все эти точки различны. Части кривой $\partial L(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon)$ между соседними точками a_i^w будем называть *дугами*.

Рассмотрим множество, содержащее следующие дуги, см. пример на рис. 7:

- все дуги, соединяющие a_i^w и a_j^u , соответствующие разным точкам u и w , лежащим в одном $W_i^\pm$, а также
- если $W_i^\pm \neq \emptyset$, то дугу, соединяющую $a_j^{u_i}$ с соседней точкой a_j^w , где $w \in W_i^\pm$, а также
- если вершина лунки v_i входит в $\bar{W}$ и имеет индекс k , то дугу, соединяющую $a_j^{v_i}$ с соседней точкой a_j^w , где $w \in W_k \cup \{u_k\}$.

В каждую из выбранных дуг впишем ломаную, не пересекающую $\partial L(u_1u_2)$. Множество звеньев всех полученных ломаных обозначим через $\mathcal{D}$.

Пусть $G_{\mathcal{D}}$ – линейный граф, порожденный отрезками из $\mathcal{D}$, а также всеми отрезками вида $[w, a_i^w]$ и отрезком $[u_1, u_2]$. Заметим, что граф $G_{\mathcal{D}}$ является деревом, пересекает замыкание лунки $L(u_1u_2)$ только по множеству $\bar{W}$, и в точках из $\bar{W}$

ребра графа $G_{\mathcal{D}}$ стыкуются под углами не меньшими 120° в силу условия (6) из определения правильного расширения лунки.

ЛЕММА 3.1. Пусть Δ – произвольное линейное дерево на плоскости. Обозначим через $\mathcal{R}(\Delta)$ множество всех вершин из Δ , в которых некоторые ребра стыкуются под углами, меньшими 120° . Тогда для любого $\delta > 0$ существует локально минимальное дерево, которое совпадает с Δ вне открытых δ -окрестностей точек из $\mathcal{R}(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{R}_3(\Delta)$ – множество всех вершин из $\mathcal{R}(\Delta)$ степени 3 и выше и $n_3(\Delta)$ – суммарная степень вершин из $\mathcal{R}_3(\Delta)$. Если $\mathcal{R}_3(\Delta)$ не пусто, т.е. $n_3(\Delta) \neq 0$, то выберем произвольную $v \in \mathcal{R}_3(\Delta)$ и пусть e_1, e_2 – инцидентные v ребра, стыкующиеся под углом, меньшим 120° , и соседние при обходе вокруг v . Рассмотрим окружность S с центром в v и радиусом, меньшим как $\delta/2$, так и длины кратчайшего из ребер e_i . Положим $x_i = S \cap e_i$; тогда треугольник vx_1x_2 – равнобедренный с углом при вершине, меньшим 120° . Хорошо известно, что кратчайшее дерево G_v с границей $\{v, x_1, x_2\}$ состоит из трех ребер, соединяющих некоторую внутреннюю точку s рассматриваемого треугольника с его вершинами (см. [2]). Добавим x_i и s к множеству вершин, удалим старые ребра vx_i и, затем, добавим ребра sv, sx_1 и sx_2 так, чтобы подграф, порожденный множеством вершин $\{v, x_1, x_2, s\}$, совпадал с деревом G_v . Вновь полученное дерево обозначим через Δ_1 . Отметим, что степень v в Δ_1 на единицу меньше степени v в Δ , поэтому $n_3(\Delta_1) < n_3(\Delta)$. Таким образом, повторяя описанный выше процесс нужное число раз, мы перестроим Δ в $\delta/2$ -окрестностях вершин из $\mathcal{R}_3(\Delta)$ и избавимся от $\mathcal{R}_3(\Delta)$. Точнее, если полученное дерево обозначить через G' , то $\mathcal{R}_3(G') = \emptyset$.

Итак, множество $\mathcal{R}(G')$ состоит из вершин степени 2. Пусть $v \in \mathcal{R}(G')$ – произвольная такая вершина, а e_1 и e_2 – инцидентные ей ребра. Впишем в угол между ребрами e_i окружность S настолько малого радиуса, чтобы ее точки касания x_i ребер e_i лежали внутри ребер e_i и чтобы S оказалась в $\delta/2$ окрестности точки v . Точки x_i делят S на две дуги. Пусть U – та из этих дуг, которая расположена ближе к v . Впишем в U ломаную L_v , соединяющую x_1 и x_2 так, чтобы все внутренние углы ломаной, полученной из L_v добавлением звеньев $e_i \setminus (x_i, v]$, были бы не меньше 120° . Подразобьем дерево G' , добавив x_i в множество вершин, а затем удалим ребра vx_i и добавим к полученному графу все внутренние вершины ломаной L_v , а также ребра, соответствующие ее звеньям. Вновь полученное дерево обозначим через G'_1 . Отметим, что множество $\mathcal{R}(G'_1)$ получается из $\mathcal{R}(G')$ удалением вершины v . Повторяя описанный выше процесс нужное число раз, мы перестроим G' в $\delta/2$ окрестностях вершин из $\mathcal{R}(G')$ и избавимся от $\mathcal{R}(G')$, поэтому построенное дерево является локально минимальным и получено из Δ изменением только внутри δ окрестностей вершин из $\mathcal{R}(\Delta)$. Доказательство закончено.

Рассмотрим локально минимальное дерево, которое совпадает с $G_{\mathcal{D}}$ вне открытых $\varepsilon/2$ -окрестностей точек из $\mathcal{R}(G_{\mathcal{D}})$ (существование такого дерева гарантирует лемма 3.1). Очевидно, оно также пересекает замыкание лунки $L(u_1, u_2)$ только по $\bar{W}$. Выкинем из него ребро u_1u_2 , и в качестве границ, полученных в результате компонент Δ_1 и Δ_2 , возьмем множества всех их вершин. Тогда Δ_i – локально минимальные деревья. Без ограничения общности будем считать, что $u_i \in V(\Delta_i)$. По построению (см. выше) дерево Δ_i пересекает $\partial L(u_1u_2)$ по множеству $\bar{W}_i$. Более того, расстояние d между Δ_1 и Δ_2 достигается на вершинах w_i , лежащих в $\bar{W}_i$,

причем для всех таких w_i имеем $\rho(w_1, w_2) = \rho(u_1, u_2)$. Кроме того, из определения правильного расширения лунки вытекает, что каждое дерево вида $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup w_1 w_2$ является локально минимальным, поэтому можно применить теорему 2.2, в силу которой существует такое p -разбиение дерева $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, что $\Delta^p \cup u_1 u_2$ является кратчайшим. По построению геометрическое расширение лунки ребра $u_1 u_2$ этого дерева совпадает с исходным правильным расширением. Теорема полностью доказана.

Авторы выражают сердечную благодарность А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Стабилизация локально минимальных деревьев”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 512–524.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Изд-во ИКИ, М., 2003.
- [3] M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, “Some NP-complete geometric problems”, *Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (Hershey, Pa., 1976), Assoc. Comput. Mach., New York, 1976, 10–22.
- [4] E. N. Gilbert, H. O. Pollak, “Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**:1 (1968), 1–29.

А. О. Иванов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Поступило

08.07.2009

Исправленный вариант

25.03.2011

О. А. Съедина

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: olga.sedina@mail.ru

А. А. Тужилин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: tuz@mech.math.msu.su