Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Существование метрики Кэлера–Эйнштейна на некоторых полных пересечениях Фано, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 575–582

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:49:12

Существование метрики Кэлера–Эйнштейна на некоторых полных пересечениях Фано

А. В. Пухликов

Для некоторых семейств полных пересечений Фано доказана оценка снизу для глобального (лог) канонического порога, откуда следует существование метрики Кэлера–Эйнштейна на общих многообразиях в этих семействах.

Библиография: 9 названий.

Памяти А. А. Карацубы

1. Формулировка основного результата. Пусть $k \geq 2$ – фиксированное целое число. Рассмотрим произвольный набор $(d_1, \dots, d_k)$ целых положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$d_k \geq \dots \geq d_1 \geq 2 \quad \text{и} \quad d_1 + \dots + d_k \geq 5k + 1.$$

Определим целое число $M \geq 4k + 1$ условием

$$d_1 + \dots + d_k = M + k.$$

Зафиксируем комплексное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{M+k}$ и рассмотрим семейство $\mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$ неособых полных пересечений типа $d_1 \cdots d_k$ в $\mathbb{P}$:

$$V = F_1 \cap \dots \cap F_k \subset \mathbb{P},$$

$F_i \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхность степени d_i , $\text{codim } V = k$.

В [1] был доказан следующий факт.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $d_k \geq 8$. Тогда глобальный канонический порог общего многообразия $V \in \mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$ равен 1.*

Определение глобального канонического порога и лог канонического порога см. ниже в п. 3. В данный момент для нас важно лишь, что из теоремы 1 немедленно вытекает (в силу хорошо известных результатов работ [2]–[4]) такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В условиях теоремы 1 на общем многообразии $V \in \mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$ существует метрика Кэлера–Эйнштейна.*

Однако достаточное условие существования метрики Кэлера–Эйнштейна несколько слабее, чем утверждение теоремы 1. Цель настоящей заметки – установить существование метрики Кэлера–Эйнштейна на некоторых полных пересечениях Фано, не удовлетворяющих предположению теоремы 1, для которых это достаточное условие, тем не менее, выполнено. Будет доказана

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнено любое из трех следующих условий:*

- (i) $d_k = d_{k-1} = 7$ и $M \leq 47$;
- (ii) $d_k = 7, d_{k-1} \leq 6$ и $M \leq 19$;
- (iii) $k = 2, d_1 = d_2 = 6, M = 10$.

Тогда канонический (и тем более, лог канонический) порог $\text{ct}(V)$ общего многообразия $V \in \mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$ удовлетворяет неравенству

$$\text{ct}(V) > \frac{M}{M+1}.$$

Отсюда в силу [2]–[4] немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *В условиях теоремы 2 на общем многообразии $V \in \mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$ существует метрика Кэлера–Эйнштейна.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Каждое из условий (i), (ii) определяет конечный набор типов полных пересечений Фано. Семейств, удовлетворяющих условию (i), довольно много. Семейства, удовлетворяющие условиям (ii) и (iii), нетрудно перечислить явно:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(4, 6, 6, 7), \quad \mathcal{F}(5, 5, 6, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{23}, \\ & \mathcal{F}(3, 6, 6, 7), \quad \mathcal{F}(4, 5, 6, 7), \quad \mathcal{F}(5, 5, 5, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{22}, \\ & \mathcal{F}(2, 6, 6, 7), \quad \mathcal{F}(4, 4, 6, 7), \quad \mathcal{F}(3, 5, 6, 7), \quad \mathcal{F}(4, 5, 5, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{21}, \\ & \mathcal{F}(6, 6, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{19}, \\ & \mathcal{F}(5, 6, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{18}, \\ & \mathcal{F}(4, 6, 7), \quad \mathcal{F}(5, 5, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{17}, \\ & \mathcal{F}(3, 6, 7), \quad \mathcal{F}(4, 5, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{16}, \\ & \mathcal{F}(6, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{13}, \\ & \mathcal{F}(5, 7), \quad \mathcal{F}(6, 6) \quad \text{в } \mathbb{P}^{12}, \\ & \mathcal{F}(4, 7) \quad \text{в } \mathbb{P}^{11}. \end{aligned}$$

В частности, многообразие наименьшей размерности, удовлетворяющее условиям теоремы 2 – это девятимерное полное пересечение $V_{4,7} \subset \mathbb{P}^{11}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Хотя основное применение теоремы 2 (существование метрики Кэлера–Эйнштейна) относится к комплексной дифференциальной геометрии, метод ее доказательства был развит в бирациональной геометрии для совсем других задач – для изучения бирациональных отображений полных пересечений Фано (см. [5], [6]). В [7; теорема 2] было доказано равенство $\text{ct}(V) = 1$ для общих гиперповерхностей $V_d \subset \mathbb{P}^d$ степени $d \geq 6$, откуда следует, что на эти многообразия распространяется действие теоремы о прямых произведениях Фано [7]. Именно для тех же целей бирациональной геометрии была доказана и теорема 1 [1]. Существование метрики Кэлера–Эйнштейна является побочным продуктом этой работы; связь между методами теории бирациональной жесткости и комплексной дифференциальной геометрии начала эксплуатироваться совсем недавно [8].

2. Условия общности положения. Объясним теперь, что понимается под общностью полного пересечения $V \in \mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$, $V = F_1 \cap \dots \cap F_k$. Пусть $x \in V$ –

некоторая точка, $(z_1, \dots, z_{M+k})$ – система аффинных координат на $\mathbb{P}$ с началом в точке x ,

$$f_i = q_{i,1} + \dots + q_{i,d_i}$$

– уравнение гиперповерхности F_i относительно (неоднородных) координат z_* , разложенное на однородные по z_* компоненты $q_{i,j}$, $\deg q_{i,j} = j$. Поскольку V – неособое многообразие, система линейных уравнений

$$q_{1,1} = \dots = q_{k,1} = 0$$

задает линейное подпространство $T_x V \subset \mathbb{C}^{M+k}$ коразмерности k , касательное пространство к многообразию V в точке x .

Определим конечное множество пар $I \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ следующим образом:

$$I = \left\{ \begin{aligned} &\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i, (i, j) \notin \{(k, d_k), (k-1, d_{k-1})\}\}, & d_{k-1} = d_k, \\ &\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d_i, (i, j) \notin \{(k, d_k), (k, d_k-1)\}\}, & d_{k-1} \leq d_k - 1. \end{aligned} \right.$$

Скажем теперь, что полное пересечение V *регулярно в точке x* , если для любой линейной формы $l(z_*)$, не обращающейся тождественно в нуль на подпространстве $T_x V$, множество однородных многочленов

$$\{l\} \cup \{q_{i,j} \mid (i, j) \in I\}$$

образует регулярную последовательность в $\mathcal{O}_{x, \mathbb{P}}$, т.е. система уравнений в $\mathbb{C}^{M+k}$

$$l = 0, \quad q_{i,j} = 0, \quad (i, j) \in I,$$

задает подмножество коразмерности $\#I + 1$.

Наконец, скажем, что полное пересечение V *регулярно*, если оно регулярно в каждой точке. В [1; предложение 0.2] и [6; предложение 3] было установлено, что при $M \geq 4k + 1$ достаточно общее полное пересечение $V \in \mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$ регулярно, т.е. существует непустое открытое по Зарисскому подмножество

$$\mathcal{F}_{\text{reg}}(d_1, \dots, d_k) \subset \mathcal{F}(d_1, \dots, d_k)$$

такое, что любое многообразие $V \in \mathcal{F}_{\text{reg}}(d_1, \dots, d_k)$ регулярно. Под общностью в теоремах 1 и 2 понимается регулярность.

3. Достаточное условие существования метрики Кэлера–Эйнштейна.

Пусть X – гладкое многообразие Фано, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X$, $D \sim -nK_X$ – некоторый эффективный дивизор, $n \geq 1$. Напомним, что пара $(X, \alpha D)$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, *не канонична* (соответственно *не лог канонична*), если найдется бирациональный морфизм $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$, где $\tilde{X}$ – гладкое проективное многообразие, и исключительный дивизор $E \subset \tilde{X}$ такие, что

$$\alpha \text{ord}_E \varphi^* D > a(E)$$

(соответственно $\alpha \text{ord}_E \varphi^* D > a(E) + 1$), где $a(E) = a(X, E)$ – дискрепантность E относительно модели X . Теперь канонический (соответственно лог канонический) пороги многообразия X определяются равенствами

$$\begin{aligned} \text{ct}(X) &= \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{пара } \left(X, \frac{\lambda}{n} D \right) \text{ канонична для всех } D \right\}, \\ \text{lct}(X) &= \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{пара } \left(X, \frac{\lambda}{n} D \right) \text{ лог канонична для всех } D \right\}. \end{aligned}$$

(В обеих формулах подразумевается, что $D \sim -nK_X$, т.е. целочисленный параметр $n \geq 1$ зависит от эффективного дивизора D .)

В [2]–[4] доказан следующий факт.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что выполнено неравенство*

$$\mathrm{lct}(X) > \frac{\dim X}{\dim X + 1}.$$

Тогда на многообразии X существует метрика Кэлера–Эйнштейна.

См. обсуждение этого факта в [8] (особено в приложении А, написанном Ж.-П. Демайи).

Условие каноничности сильнее лог каноничности, так что имеет место неравенство $\mathrm{lct}(X) \geq \mathrm{ct}(X)$. С учетом этого неравенства следствие 2 вытекает из теоремы 2 автоматически в силу теоремы 3. Оставшаяся часть заметки посвящена доказательству теоремы 2.

4. Техника гиперкасательных дивизоров. Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}^L$ – неособое неприводимое проективное многообразие, $x \in X$ – некоторая точка, $\varphi: X^+ \rightarrow X$ – ее раздутие, $E = \varphi^{-1}(x)$ – исключительный дивизор. Символом $|H|$ обозначаем линейную систему гиперплоских сечений многообразия X . Для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset X$ справедливо неравенство $\mathrm{mult}_x Y \leq \deg Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Эффективный дивизор D на X называется *гиперкасательным* (относительно точки x), если

$$D^+ \in |kH - lE|,$$

где $l \geq k + 1$, D^+ – собственный прообраз дивизора D на X^+ . Число $\beta(D) = l/k > 1$ назовем *наклоном* дивизора D .

Пусть $\mathcal{D}$ – конечное множество гиперкасательных дивизоров, $\#\mathcal{D} = N \leq \dim X - 1$. Предположим, что имеет место равенство

$$\mathrm{codim}_x \left(\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D \right) = \#\mathcal{D}, \quad (1)$$

где codim_x обозначает коразмерность в малой окрестности точки x .

Имеет место следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [9]. *Имеет место оценка*

$$\frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} Y \leq \left(\min^*_{\mathcal{B} \subset \mathcal{D}} \prod_{D \in \mathcal{B}} \beta(D) \right)^{-1},$$

где символ $\min^*$ означает, что минимум берется по всем подмножествам $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ мощности

$$\#\mathcal{B} = \min\{\dim Y - 1, N - \mathrm{codim} Y\} = b.$$

Подробное доказательство см. в [9; следствие 3.2]. Здесь приведем его набросок. Напомним, что из условия (1) вытекает, что найдется подмножество $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ мощности b такое, что

$$\mathrm{codim}_x \left(\bigcap_{D \in \mathcal{B}} D \cap Y \right) = \mathrm{codim} Y + b.$$

Полагая $\mathcal{B} = \{D_1, \dots, D_b\}$, строим последовательность неприводимых многообразий $Y_0 = Y, Y_1, \dots, Y_b$, где Y_{i+1} – неприводимая компонента эффективного цикла $(Y_i \circ D_{i+1})$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} Y_{i+1} \geq \beta(D_{i+1}) \frac{\text{mult}_x}{\deg} Y_i.$$

Учитывая, что кратность подмногообразия Y_b в точке x не превосходит $\deg Y_b$, получаем утверждение предложения.

Однако в некоторых случаях бывает удобнее работать не с гиперкасательными дивизорами, а с линейными системами, порожденными этими дивизорами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Непустая линейная система Σ на X называется *гиперкасательной* (относительно точки x), если

$$\Sigma^+ \subset |kH - lE|,$$

где $l \geq k + 1$, Σ^+ – собственный прообраз системы Σ на X^+ . Число $\beta(\Sigma) = l/k > 1$ назовем *наклоном* системы Σ .

Важнейшая характеристика гиперкасательной линейной системы Σ – коразмерность $\text{codim}_x \text{Bs } \Sigma$ ее базисного множества в окрестности точки x .

Множество гиперкасательных дивизоров $D \in \mathcal{D}$, $D^+ \in |k_D H - l_D E|$, порождает гиперкасательную систему $\Sigma_k = \Sigma_k(\mathcal{D})$ при $k \geq \min_{D \in \mathcal{D}} \{k_D\}$ следующим образом. Пусть

$$f_D \in H^0(X, \mathcal{O}_X(k_D H))$$

– сечение, задающее дивизор D . Положим

$$\Sigma_k = \left| \sum_{k_D \leq k} f_D s_D = 0 \right|,$$

где суммирование ведется по всем гиперкасательным дивизорам $D \in \mathcal{D}$ таким, что $k_D \leq k$, $s_D \in H^0(\mathbb{P}^L, \mathcal{O}(k - k_D))|_X$ – ограничение на X произвольного многочлена степени $k - k_D$, имеющего нуль порядка $k - k_D$ в точке x . Легко видеть, что

$$\beta(\Sigma_k) \geq \min_{D \in \mathcal{D}, k_D \leq k} \left\{ \frac{k + l_D - k_D}{k} \right\}.$$

Кроме того, имеем равенство

$$\text{codim}_x \text{Bs } \Sigma_k = \#\{D \in \mathcal{D} \mid k_D \leq k\}.$$

Из этого равенства, в частности, видно, что целочисленная функция $\text{codim}_x \text{Bs } \Sigma_k$ возрастает при переходе от $k - 1$ к k , если $k = k_D$ для некоторого $D \in \mathcal{D}$, и только для таких значений k . Определим *упорядочивающую функцию*

$$\chi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathcal{K} = \{k_D \mid D \in \mathcal{D}\}$$

соотношением

$$\#\{D \in \mathcal{D} \mid k_D < \chi(i)\} < i \leq \#\{D \in \mathcal{D} \mid k_D \leq \chi(i)\}. \quad (2)$$

Например,

$$\chi(1) = \min\{k_D \mid D \in \mathcal{D}\}, \quad \chi(N) = \max\{k_D \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

Из формулы (2) и явной конструкции гиперкасательной системы Σ_j следует оценка

$$\operatorname{codim}_x \operatorname{Bs} \Sigma_{\chi(i)} \geq i.$$

Удобство работы с упорядочивающей функцией состоит в том, что для общего набора гиперкасательных дивизоров

$$\mathbb{D} = (D_1, \dots, D_N) \in \prod_{i=1}^N \Sigma_{\chi(i)}$$

и произвольного подмногообразия Y коразмерности l , содержащего точку x , имеем $Y \not\subset \operatorname{Supp} D_i$ при $i \geq l+1$. В частности, корректно определен эффективный цикл $(Y \circ D_{l+1})$ коразмерности $l+1$, удовлетворяющий неравенству

$$\operatorname{mult}_x(Y \circ D_{l+1}) \geq \beta(\Sigma_{l+1}) \frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} Y \deg(Y \circ D_{l+1}).$$

Ввиду линейности этого неравенства по циклу $(Y \circ D_{l+1})$ существует неприводимая компонента этого цикла – неприводимое подмногообразие Y_1 коразмерности $l+1$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} Y_1 \geq \beta(\Sigma_{l+1}) \frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} Y_1.$$

Повторяя эту процедуру $b = \min\{\dim Y - 1, N - \operatorname{codim} Y\}$ раз, получаем неприводимое подмногообразие Y_b , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} Y_b \geq \frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} Y \prod_{i=1}^b \beta(\Sigma_{l+i}).$$

Как и выше, оценивая кратность $\operatorname{mult}_x Y_b$ сверху числом $\deg Y_b$, получаем оценку

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} Y \leq \left(\prod_{i=1}^b \beta(\Sigma_{l+i}) \right)^{-1}.$$

5. Доказательство теоремы 2. Будем рассуждать от противного: предположим, что

$$\operatorname{ct}(V) \leq \frac{M}{M+1}.$$

В силу определения канонического порога, это означает, что для каждого рационального числа $\lambda > M/(M+1)$ имеется эффективный дивизор $D \sim -nK_V$ такой, что пара $(V, \lambda D/n)$ не канонична, т.е. для некоторого бирационального морфизма $\psi: \tilde{V} \rightarrow V$ и некоторого исключительного дивизора $E \subset \tilde{V}$ выполнено неравенство

$$\operatorname{ord}_E \psi^* D > \frac{1}{\lambda} na(E).$$

Напомним, что дивизор D и исключительный дивизор E зависят от λ . Можно считать, что λ сколь угодно близко к $M/(M+1)$, в частности, $\lambda < 1$, так что имеет место обычное неравенство Нётера–Фано: $\text{ord}_E \psi^* D > na(E)$. Рассуждая дословно так же, как в доказательстве теоремы 4 в [1], исключаем возможность $\text{codim } \psi(E) = 2$ и находим точку $x \in \psi(E)$ и гиперплоскость $\Pi \subset E^+$ в исключительном дивизоре $E^+ \subset V^+$ раздутия $\varphi: V^+ \rightarrow V$ точки x такие, что выполнено неравенство

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_\Pi D^+ > \frac{2n}{\lambda},$$

D^+ – собственный прообраз D на V^+ . Повторяя доказательство теоремы 4 в [1], рассмотрим общее гиперплоское сечение $T \ni x$, гладкое в точке x , такое, что $T^+ \supset \Pi$. Многообразие T есть полное пересечение типа $d_1 \cdots d_k$ в $\mathbb{P}^{M+k-1}$. Ограничение D_T дивизора D на T удовлетворяет оценке

$$\text{mult}_x D_T > \frac{2n}{\lambda}.$$

Пусть $T_i = \{q_{i,1}|_T = 0\}$, $i = 1, \dots, k$, – касательные гиперплоские сечения многообразия T в точке x . В силу условий регулярности, где $l(z_*)$ – уравнение гиперплоскости, высекающей T на V , для любого набора различных индексов $\{j_1, \dots, j_i\} \subset \{1, \dots, k\}$ имеем

$$\text{mult}_x (T_{j_1} \cap \cdots \cap T_{j_i}) = 2^i, \quad (3)$$

причем по теореме Лефшеца пересечение $T_{j_1} \cap \cdots \cap T_{j_i}$ неприводимо и приведено.

Построим последовательность неприводимых подмногообразий $R_1, \dots, R_{k+1}$ ко-размерности $\text{codim}(R_i \subset T) = i$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} R_i > \frac{1}{\lambda} \frac{2^i}{\deg V}, \quad (4)$$

$\deg V = d_1 \cdots d_k$. Такое построение возможно, потому что в качестве R_1 можно взять подходящую неприводимую компоненту дивизора D_T , а далее рассуждаем по индукции: в силу равенства (3) и неравенства (4), доказанного на предыдущем шаге, найдется касательное сечение $T_j \not\supset R_i$ при $i = 1, \dots, k$, так что в качестве R_{i+1} можно взять подходящую неприводимую компоненту эффeктивного цикла $(R_i \circ T_j)$. По построению, неприводимое подмногообразие $R = R_{k+1}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} R > \frac{1}{\lambda} \frac{2^{k+1}}{\deg V}.$$

Применим теперь к R технику гиперкасательных дивизоров дословно так же, как в [6], беря в качестве гиперкасательных дивизоров

$$D_{i,j} = \{(q_{i,1} + \cdots + q_{i,j})|_T = 0\},$$

$$1 \leq j \leq d_i - 1,$$

$$(i, j) \notin \begin{cases} \{(k, d_k - 1), (k - 1, d_{k-1} - 1)\}, & \text{если } d_{k-1} = d_k, \\ \{(k, d_k - 1), (k, d_k - 2)\}, & \text{если } d_{k-1} \leq d_k - 1. \end{cases}$$

В результате получим неравенство

$$\frac{1}{\lambda} < \max \left\{ 1, \frac{3}{4} \cdot \frac{d_k}{d_k - 1} \cdot \frac{d_+}{d_+ - 1} \right\},$$

где

$$d_+ = \begin{cases} d_k, & \text{если } d_{k-1} = d_k, \\ d_k - 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow M/(M+1)$, получаем

$$\max \left\{ 1, \frac{3}{4} \cdot \frac{d_k}{d_k - 1} \cdot \frac{d_+}{d_+ - 1} \right\} \geq \frac{M+1}{M}.$$

Однако легко убедиться, что в предположениях теоремы 2 это неравенство не выполнено (левая часть строго меньше правой), что и завершает доказательство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano complete intersections”, *Manuscripta Math.*, **121**:4 (2006), 491–526.
- [2] J.-P. Demailly, J. Kollár, “Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **34**:4 (2001), 525–556.
- [3] A. M. Nadel, “Multiplier ideal sheaves and Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature”, *Ann. of Math.* (2), **132**:3 (1990), 549–596.
- [4] G. Tian, “On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$ ”, *Invent. Math.*, **89**:2 (1987), 225–246.
- [5] A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
- [6] A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano complete intersections”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 55–79.
- [7] А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186.
- [8] И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Лог-канонические пороги неособых трехмерных многообразий Фано”, *УМН*, **63**:5 (2008), 73–180.
- [9] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 139–182.

А. В. Пухликов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
University of Liverpool, Великобритания
E-mail: pukh@liv.ac.uk, pukh@mi.ras.ru

Поступило

04.09.2009