Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Одно обобщение теоремы Куртисса для производящих функций моментов, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 947–952

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:52:05

Одно обобщение теоремы Куртисса для производящих функций моментов

А. Л. Якимив

В теореме Куртисса рассматривается связь между слабой сходимостью вероятностных мер на прямой и сходимостью их производящих функций моментов в некоторой окрестности нуля. В настоящей заметке дано многомерное обобщение этого результата. При этом рассматриваются произвольные σ -конечные меры, производящие функции моментов которых существуют в некоторой области многомерного евклидова пространства, не обязательно содержащей нуль. Доказано также и соответствующее обратное утверждение.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть $U(\cdot)$ – вероятностная мера на прямой. Функция

$$\tilde{U}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} U(dx),$$

где z – действительное, интеграл сходится на некотором интервале действительной прямой, называется *производящей функцией моментов* меры U . Куртисс [1] в 1942 г. доказал следующую теорему (мы сформулируем ее в несколько ином, более удобном для нас виде).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\tilde{U}_k(z)$ – производящие функции моментов последовательности вероятностных мер на прямой U_k . Если $\tilde{U}_k(z)$ существуют для $|z| < z_1$ и для всех $k > k_0$ и если существует функция $\omega(z)$, определенная и ограниченная при $|z| \leq z_2 < z_1$, такая, что

$$\tilde{U}_k(z) \rightarrow \omega(z)$$

при $k \rightarrow \infty$ для произвольного $z \in [-z_2, z_2]$, то существует вероятностная мера на прямой U такая, что последовательность мер U_k слабо сходится при $k \rightarrow \infty$ к мере U , т.е. для произвольного борелевского множества $A \subseteq \mathbb{R}^1$ такого, что $U(\partial A) = 0$

$$U_k(A) \rightarrow U(A), \quad k \rightarrow \infty.$$

При этом производящая функция моментов $\tilde{U}(z)$ меры U существует при $|z| \leq z_2$ и равна $\omega(z)$ в этом интервале.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00563, 10-01-00580).

Эта теорема Куртисса получила многочисленные приложения в теории вероятностей и дискретной математике, см., например, [2]–[4]. Недавно Мукхерджеа, Рао и Суен [5] распространили теорему Куртисса на случай, когда интервал, в котором определены производящие функции моментов $\tilde{U}_k(z)$, не обязательно содержит точку ноль. В настоящей заметке этот результат обобщается в двух направлениях: на многомерный случай и для произвольных σ -конечных мер U_k . Кроме того, приводится и соответствующее обратное утверждение.

2. Основной результат. Все меры, рассматриваемые далее, будут считаться неотрицательными, σ -аддитивными и σ -конечными, определенными на δ -кольце $\mathfrak{A}$ всех ограниченных борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$.

Мы будем говорить, что последовательность мер U_k , $k \in \mathbb{N}$, *слабо сходится* к мере U , и писать, что $U_k \Rightarrow U$, $k \rightarrow \infty$, если $U_k(A) \rightarrow U(A)$, $k \rightarrow \infty$, для каждого $A \in \mathfrak{A}$ такого, что $U(\partial A) = 0$ (здесь и далее через ∂A обозначается граница множества A). Также мы будем говорить, что совокупность мер M *слабо относительно компактна* или *слабо предкомпактна*, если из каждой последовательности мер из M можно выделить слабо сходящуюся.

Справедливо следующее обобщение теоремы Куртисса [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть для последовательности мер U_k , $k \in \mathbb{N}$, в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ существуют производящие функции моментов:

$$\tilde{U}_k(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(z,x)} U_k(dx) < \infty \quad \text{для всех } z \in D.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Если при $k \rightarrow \infty$

$$\tilde{U}_k(z) \rightarrow \omega(z) < \infty \quad \text{для всех } z \in D, \quad (1)$$

то $\omega(z)$ является производящей функцией моментов некоторой меры U на $\mathbb{R}^n$ и $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$.

2) Обратно, если $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$ и $\tilde{U}_k(a)$ ограничены для произвольного $a \in \partial D$ (область D здесь считается ограниченной), то выполнено соотношение (1) и для меры U существует при $z \in D$ производящая функция моментов $\tilde{U}(z)$ и $\tilde{U}(z) = \omega(z)$ при $z \in D$.

В отличие от теоремы Куртисса, в теореме 2 область $D \subseteq \mathbb{R}^n$ не обязательно содержит точку ноль, что оказывается существенным для приложений. Если меры U_k являются вероятностными, то для того, чтобы предельная мера U была вероятностной, достаточно, чтобы функция $\omega(z)$ имела аналитическое продолжение в некоторую окрестность нуля n -мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ и $\omega(0) = 1$. Отметим также, что для существования производящей функции моментов меры U в форме, определенной в теореме 2, в некоторой области D , не содержащей нуля, вовсе не нужно существования каких-либо моментов этой меры. Однако в названии этого преобразования мы отдаем должное традициям (см., например, [2], [3], [6]). Одномерный вариант теоремы 2 представлен в работе автора [7; лемма 5]. При помощи этого варианта теоремы 2 в упомянутой работе получена предельная теорема для логарифма порядка случайной A -подстановки.

Теорема 2 опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть для мер U и V существуют их производящие функции моментов

$$\tilde{U}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(z,x)} U(dx) < \infty, \quad \tilde{V}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(z,x)} V(dx) < \infty$$

при $z \in D$ для некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, причем

$$\tilde{U}(z) = \tilde{V}(z) \quad \text{для всех } z \in D.$$

Тогда $U = V$.

Выведем сначала теорему 2 из леммы 1, а потом докажем лемму 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть K – замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ с 2^n вершинами $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где α_i принимают значения 1 или -1 , $i = 1, \dots, n$, K_0 – совокупность его вершин. Начнем с доказательства пункта 2). Выберем такую последовательность $t_m \uparrow \infty$, чтобы было

$$U(\partial B_m) = 0, \quad \text{где } B_m = t_m K.$$

Пусть $U_k^{(m)}$ и $U^{(m)}$ – сужения мер U_k и U на B_m соответственно. В силу определения слабой сходимости мер для каждого $m \in \mathbb{N}$ $U_k^{(m)} \Rightarrow U^{(m)}$ при $k \rightarrow \infty$, следовательно (см. [8]), при $k \rightarrow \infty$

$$\int_{B_m} e^{(z,x)} U_k(dx) \rightarrow \int_{B_m} e^{(z,x)} U(dx) \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Зафиксируем $z \in D$. Согласно (2) мы имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(z,x)} U(dx) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_m} e^{(z,x)} U(dx) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_m} e^{(z,x)} U_k(dx). \quad (3)$$

Далее,

$$\int_{B_m} e^{(z,x)} U_k(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{(z,x)} U_k(dx) \leq \sum_{\alpha \in K_0} \int_{\mathbb{R}_\alpha^n} e^{(z,x)} U_k(dx), \quad (4)$$

где

$$\mathbb{R}_\alpha^n = \{x : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i \alpha_i \geq 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, n\}$$

– n -мерный гипероктант, содержащий точку $\alpha \in K_0$. Пусть $\lambda > 0$ такое, что $a_\alpha = z + \lambda \alpha \in \partial D$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_\alpha^n} e^{(z,x)} U_k(dx) &= \int_{\mathbb{R}_\alpha^n} e^{(a_\alpha - \lambda \alpha, x)} U_k(dx) = \int_{\mathbb{R}_\alpha^n} e^{(a_\alpha, x) - \lambda(\alpha, x)} U_k(dx) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_\alpha^n} e^{(a_\alpha, x)} U_k(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{(a_\alpha, x)} U_k(dx) = \tilde{U}_k(a_\alpha), \end{aligned} \quad (5)$$

так как

$$\lambda(\alpha, x) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq 0$$

при $x \in \mathbb{R}_\alpha^n$. Из соотношений (3), (4) и (5) и условия пункта 2) теоремы 2 следует, что при $z \in D$

$$\tilde{U}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(z,x)} U(dx) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in K_0} \tilde{U}_k(a_\alpha) < \infty. \quad (6)$$

Для произвольных $k, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in K_0$ при $C_m = \mathbb{R}^n \setminus B_m$ и $C_{m\alpha} = \mathbb{R}_\alpha^n \cap C_m$

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_k(z) - \tilde{U}(z)| &\leq \int_{C_m} e^{(z,x)} U_k(dx) + \int_{C_m} e^{(z,x)} U(dx) \\ &\quad + \left| \int_{B_m} e^{(z,x)} U_k(dx) - \int_{B_m} e^{(z,x)} U(dx) \right| \\ &\leq \sum_{\alpha \in K_0} \int_{C_{m\alpha}} e^{(z,x)} U_k(dx) + \int_{C_m} e^{(z,x)} U(dx) \\ &\quad + \left| \int_{B_m} e^{(z,x)} U_k(dx) - \int_{B_m} e^{(z,x)} U(dx) \right|. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{C_{m\alpha}} e^{(z,x)} U_k(dx) &= \int_{C_{m\alpha}} e^{(a_\alpha - \lambda\alpha, x)} U_k(dx) \\ &= \int_{C_{m\alpha}} e^{(a_\alpha, x) - \lambda(\alpha, x)} U_k(dx) \leq \tilde{U}_k(a_\alpha) e^{-\lambda t_m} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (8)$$

при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$, так как при $x \in C_{m\alpha} = \mathbb{R}_\alpha^n \setminus (t_m K \cap \mathbb{R}_\alpha^n)$ существует $j \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\alpha x_j \geq t_m$, откуда

$$\lambda(\alpha, x) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \lambda \alpha_j x_j \geq \lambda t_m.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем такое $m \in \mathbb{N}$, чтобы для произвольных $k \in \mathbb{N}$ было

$$\int_{C_m} e^{(z,x)} U(dx) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (9)$$

$$\sum_{\alpha \in K_0} \int_{C_{m\alpha}} e^{(z,x)} U_k(dx) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (10)$$

(это можно сделать согласно соотношениям (5) и (8)). Для полученного m согласно (2) выберем такое k_0 , чтобы при $k \geq k_0$ было

$$\left| \int_{B_m} e^{(z,x)} U_k(dx) - \int_{B_m} e^{(z,x)} U(dx) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (11)$$

Из неравенств (7), (9), (10) и (11) следует, что при $k \geq k_0$

$$|\tilde{U}_k(z) - \tilde{U}(z)| < \varepsilon,$$

что доказывает пункт 2) теоремы 2.

В предположениях пункта 1) теоремы 2 для каждого ограниченного борелевского множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и произвольных $k \in \mathbb{N}$ и $z \in D$

$$\tilde{U}_k(z) \geq \int_A e^{(z,x)} U_k(dx) \geq U_k(A) \cdot \inf_{x \in A} e^{(z,x)},$$

или же

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} U_k(A) < \infty,$$

откуда по теореме 1.2.2 из [4] следует слабая предкомпактность последовательности мер U_k . Если подпоследовательность $U_{k(j)} \Rightarrow U$, $j \rightarrow \infty$, для некоторой меры U , то согласно пункту 2) теоремы 1 при $j \rightarrow \infty$

$$\tilde{U}_{k(j)}(z) \rightarrow \tilde{U}(z) \quad \text{для всех } z \in D,$$

следовательно,

$$\tilde{U}(z) = \omega(z) \quad \text{для всех } z \in D,$$

и по лемме 1 у последовательности U_k имеется только одна предельная точка U в смысле слабой сходимости, причем $\tilde{U}(z) = \omega(z)$ при всех $z \in D$. Таким образом, $U_k \Rightarrow U$, $k \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть

$$H = D + i\mathbb{R}^n \equiv \{\lambda : \lambda = \mu + i\nu, \mu \in D, \nu \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\bar{U}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\lambda,x)} U(dx), \quad \bar{V}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\lambda,x)} V(dx), \quad \lambda \in H.$$

Функции $\bar{U}(z)$ и $\bar{V}(z)$ являются аналитическими функциями в области H (см. [9]). По условию леммы 1

$$\bar{U}(\mu) = \bar{V}(\mu) \equiv \omega(\mu) \quad \text{для всех } \mu \in D.$$

По теореме единственности для аналитических функций многих комплексных переменных [10; с. 32]

$$\bar{U}(\lambda) = \bar{V}(\lambda) \quad \text{для всех } \lambda \in H.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i\nu,x)} e^{(\mu,x)} U(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(i\nu,x)} e^{(\mu,x)} V(dx) \quad \text{для всех } \nu \in \mathbb{R}^n, \mu \in D,$$

откуда

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i\nu,x)} U_1(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(i\nu,x)} V_1(dx), \quad (12)$$

где

$$U_1(dx) = \frac{e^{(\mu,x)}}{\omega(\mu)} U(dx), \quad V_1(dx) = \frac{e^{(\mu,x)}}{\omega(\mu)} V(dx).$$

Но U_1 и V_1 – вероятностные меры, а условие (12) говорит о том, что их характеристические функции совпадают, значит, $U_1 = V_1$. Итак, мы получили, что для каждого ограниченного борелевского множества A

$$\int_A e^{(\mu,x)} U(dx) = \int_A e^{(\mu,x)} V(dx) \quad \text{для всех } \mu \in D. \quad (13)$$

Заметим, что мера U абсолютно непрерывна относительно меры V . Действительно, если $B \in \mathfrak{A}$ таково, что $V(B) = 0$, то согласно (13)

$$\int_B e^{(\mu, x)} U(dx) = 0,$$

и, значит, $U(B) = 0$, поскольку $e^{(\mu, x)} > 0$ для каждого $x \in B$. Следовательно, $U(dx) = f(x)V(dx)$ для некоторой функции $f(x)$. Но из (13) следует тогда, что

$$\int_A e^{(\mu, x)} f(x)V(dx) = \int_A e^{(\mu, x)} V(dx),$$

или $e^{(\mu, x)} f(x) = e^{(\mu, x)}$ V -почти всюду в силу единственности с точностью до множества V -меры нуль производной Радона–Никодима меры $e^{(\mu, x)} V(dx)$. Значит, $f(x) = 1$ V -почти всюду и, стало быть, $U = V$. Лемма 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. H. Curtiss, “A note on the theory of moment generating functions”, *Ann. Math. Statist.*, **13**:4 (1942), 430–433.
- [2] В. Н. Сачков, *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*, Наука, М., 1978.
- [3] В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, МЦНМО, М., 2004.
- [4] А. Л. Якимив, *Вероятностные приложения тауберовых теорем*, Физматлит, М., 2005.
- [5] A. Mukherjea, M. Rao, S. Suen, “A note on moment generating functions”, *Statist. Probab. Lett.*, **76**:11 (2006), 1185–1189.
- [6] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984.
- [7] А. Л. Якимив, “Предельная теорема для логарифма порядка случайной A -подстановки”, *Дискрет. матем.*, **22**:1 (2010), 126–149.
- [8] Варадарайн, “Меры на топологических пространствах”, *Матем. сб.*, **55**:1 (1961), 35–100.
- [9] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
- [10] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. 2: Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1976.

А. Л. Якимив

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: arsen@mi.ras.ru

Поступило

28.03.2011