Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, Продолжение операции умножения в E_∞ -алгебрах до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр и картановские объекты в категории алгебр Мэя, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 719–737

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:49:59

Продолжение операции умножения в E_∞ -алгебрах до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр и картановские объекты в категории алгебр Мэя

С. В. Лапин

В работе показано, что операция умножения в произвольной E_∞ -алгебре продолжается до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр. Как следствие получено, что каждая алгебра Мэя, определяемая E_∞ -алгеброй, является картановским объектом в категории алгебр Мэя.

Библиография: 6 названий.

В [1] при изучении алгебраической природы возникновения операций Стиррода в когомологиях топологических пространств Мэй определил категорию, объектами которой являются дифференциальные модули, снабженные некоторым специальным действием резольвенты симметрической группы. Главным свойством объектов этой категории, называемых алгебрами Мэя, является то, что на их гомологиях всегда имеется функториальное действие операций Стиррода. Для того, чтобы операции Стиррода в гомологиях алгебр Мэя имели свойства, аналогичные свойствам операций Стиррода в когомологиях топологических пространств, в [1] были введены понятия адемовского объекта и картановского объекта в категории алгебр Мэя. Более того, в [1] было показано, что для операций Стиррода в гомологиях адемовских алгебр Мэя справедливы соотношения Адема, а для операций Стиррода в гомологиях картановских алгебр Мэя имеет место формула Картана.

С другой стороны, в работе Смирнова [2] было введено понятие E_∞ -алгебры в категории дифференциальных модулей, являющееся гомотопически инвариантным аналогом понятия ассоциативной и коммутативной дифференциальной алгебры. По своему определению структура E_∞ -алгебры, заданная на дифференциальном модуле, каноническим образом определяет на этом дифференциальном модуле структуру адемовской алгебры Мэя. Таким образом, операции Стиррода в гомологиях произвольной E_∞ -алгебры удовлетворяют соотношениям Адема. В работе [3] Чатаур и Ливернет при помощи свойства кофибрантной порожденности категории E_∞ -алгебр показали, что для операций Стиррода в гомологиях любой E_∞ -алгебры справедлива формула Картана. Однако, вопрос о том, является ли алгебра Мэя, происходящая из произвольной E_∞ -алгебры, картановским объектом в категории алгебр Мэя, остался открытым.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (№ НШ-1562.2008.1).

В данной заметке при помощи гомотопической теории E_∞ -коалгебр из работы Смирнова [4] показано, что операция умножения $\cup: X \otimes X \rightarrow X$ в произвольной E_∞ -алгебре продолжается до A_∞ -морфизма из E_∞ -алгебры $X \otimes X$ в E_∞ -алгебру X . Как следствие получено, что каждая алгебра Мэя, происходящая из произвольной E_∞ -алгебры, является картановским объектом в категории алгебр Мэя. Другими словами, в заметке получен положительный ответ на указанный выше открытый вопрос о картановских объектах в категории алгебр Мэя и, следовательно, получено новое, по сравнению с [3], доказательство формулы Картана для операций Стиррода в гомологиях произвольных E_∞ -алгебр. Перейдем теперь к строгим определениям и формулировкам.

Напомним сначала для введения терминологии и обозначений необходимые определения и конструкции, связанные с понятиями операды и алгебры над операдой из работ [2], [4]–[6].

Симметрическим семейством $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ называется любое семейство дифференциальных градуированных Σ_j -модулей $\mathcal{E}(j)$, где Σ_j – симметрическая группа степени j . *Морфизмом* симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ называется произвольное семейство Σ_j -эквивариантных отображений дифференциальных градуированных модулей $\alpha = \{\alpha(j): \mathcal{E}'(j) \rightarrow \mathcal{E}''(j)\}_{j \geq 1}$.

Для заданных симметрических семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ рассмотрим симметрическое семейство $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'' = \{(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)\}_{j \geq 1}$, где $(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)$ – фактор-модуль Σ_j -свободного дифференциального градуированного модуля, порожденного дифференциальным градуированным модулем

$$\sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}''(j_k),$$

по отношению эквивалентности $\sim$, которое определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x' \sigma \otimes x_1'' \otimes \dots \otimes x_k'' &\sim x' \otimes x_{\sigma^{-1}(1)}'' \otimes \dots \otimes x_{\sigma^{-1}(k)}'' \sigma(j_1, \dots, j_k), \\ x' \otimes x_1' \sigma_1 \otimes \dots \otimes x_k' \sigma_k &\sim x' \otimes x_1' \otimes \dots \otimes x_k' (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k). \end{aligned}$$

Здесь $\sigma(j_1, \dots, j_k)$ – перестановка j элементов, получающаяся при разбиении множества из j элементов на k блоков по $j_1, \dots, j_k$ элементов и воздействием на эти блоки перестановкой σ , и $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k$ – образ элемента $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ при вложении $\Sigma_{j_1} \oplus \dots \oplus \Sigma_{j_k} \rightarrow \Sigma_j$. Ясно, что рассмотренное $\times$ -произведение ассоциативно, т.е. для произвольных симметрических семейств $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ имеется изоморфизм $\mathcal{E} \times (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \approx (\mathcal{E} \times \mathcal{E}') \times \mathcal{E}''$ в категории симметрических семейств.

Для любых морфизмов симметрических семейств $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ и $\beta: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{F}'$ морфизм симметрических семейств $\alpha \times \beta = \{(\alpha \times \beta)(j)\}_{j \geq 1}: \mathcal{E} \times \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ задается на образующих $e_k \otimes e_{j_1}' \otimes \dots \otimes e_{j_k}'$ модуля $(\mathcal{E} \times \mathcal{E}')(j)$, где $e_k \in \mathcal{E}(k)$, $e_k' \in \mathcal{E}'(j_i)$, $k \geq 1$, $j_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, $j_1 + \dots + j_k = j$ следующей формулой:

$$(\alpha \times \beta)(j)(e_k \otimes e_{j_1}' \otimes \dots \otimes e_{j_k}') = \alpha(k)(e_k) \otimes \beta(j_1)(e_{j_1}') \otimes \dots \otimes \beta(j_k)(e_{j_k}').$$

Операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$, рассматриваемое вместе с морфизмом симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\pi(\pi \times 1) = \pi(1 \times \pi)$. Кроме того, имеется такой элемент $1 \in \mathcal{E}(1)_0$, что для каждого элемента $e_j \in \mathcal{E}(j)$, $j \geq 1$, выполнено условие $\pi(1 \otimes e_j) =$

$\pi(e_j \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) = e_j$. Морфизм симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ и элемент $1 \in \mathcal{E}(1)_0$ называются соответственно *умножением* и *единицей операды* $(\mathcal{E}, \pi)$. Морфизмом операд $f: (\mathcal{E}', \pi') \rightarrow (\mathcal{E}'', \pi'')$ называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, для которого выполнено условие $f\pi' = \pi''(f \times f)$.

Операда $(\mathcal{E}, \pi)$ называется *свободной*, если эта операда, рассматриваемая как градуированная операда, т.е. рассматриваемая без дифференциала, является свободным объектом в категории градуированных операд. Операда $(\mathcal{E}, \pi)$ называется Σ -свободной (соответственно *ациклической*), если для каждого $j \geq 1$ дифференциальный градуированный модуль $\mathcal{E}(j)$ является Σ_j -свободным (соответственно ациклическим).

Одной из важнейших операд в алгебраической топологии является построенная в работе [2] операда (E_∞, π) . По своему построению операда (E_∞, π) является свободной, Σ -свободной и ациклической операдой. Например, дифференциальный градуированный модуль $E_\infty(2)$ является Σ_2 -свободным ациклическим цепным комплексом с образующими $\cup_i \in E_\infty(2)$ размерности $i \geq 0$ и дифференциалом

$$d(\cup_i) = \cup_{i-1} + (-1)^i \cup_{i-1} T, \quad T \in \Sigma_2.$$

Напомним теперь понятие алгебры над операдой. Пусть заданы произвольный дифференциальный градуированный модуль X и некоторое симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$. Рассмотрим дифференциальный градуированный модуль

$$\mathcal{E} \times X = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j},$$

где симметрическая группа Σ_j действует на $X^{\otimes j}$ перестановками сомножителей в тензорном произведении с обычным соглашением о знаках. Легко видеть, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ и любого дифференциального градуированного модуля X имеет место изоморфизм $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X) \approx (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \times X$ в категории дифференциальных градуированных модулей.

Для любого морфизма симметрических семейств $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ и любого отображения дифференциальных градуированных модулей $f: X \rightarrow Y$ отображение дифференциальных градуированных модулей $(\alpha \times f): \mathcal{E} \times X \rightarrow \mathcal{E}' \times Y$ задается на образующих $e \times x$, где $e \in \mathcal{E}(j)$, $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \in X^{\otimes j}$, $j \geq 1$, модуля $\mathcal{E} \times X$ следующей формулой:

$$(\alpha \times f)(e \times x) = (\alpha(j) \otimes f^{\otimes j})(e \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_j).$$

Алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ или просто $\mathcal{E}$ -алгеброй называется дифференциальный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе с фиксированным отображением дифференциальных градуированных модулей $\mu: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$, для которого выполнено условие $\mu(\pi \times 1) = \mu(1 \times \mu)$. Отображением $\mathcal{E}$ -алгебр $f: (X', \mu') \rightarrow (X'', \mu'')$ называется отображение дифференциальных градуированных модулей $f: X' \rightarrow X''$, удовлетворяющее условию $\mu''(1 \times f) = f\mu'$.

В работе [2] при помощи метода ациклических моделей было показано, что на сингулярном коцепном комплексе $C^*(X)$ любого топологического пространства X имеется естественная структура E_∞ -алгебры $\mu: E_\infty \times C^*(X) \rightarrow C^*(X)$, удовлетворяющая условию $\mu(\cup_0) = \cup$, где $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$ и $\cup: C^*(X) \otimes C^*(X) \rightarrow C^*(X)$ –

умножение в коцепном комплексе $C^*(X)$, индуцированное диагональным отображением топологических пространств $X \rightarrow X \times X$. Кроме того, в [2] было показано, что любое непрерывное отображение топологических пространств $f: X \rightarrow Y$ индуцирует отображение E_∞ -алгебр $C^*(f): C^*(Y) \rightarrow C^*(X)$.

Рассмотрим теперь некоторые конструкции, которые далее будут нужны для введения понятия A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр.

Пусть $\Delta[n]$ – стандартный n -мерный симплицальный симплекс [7], который можно представлять себе как свободное симплицальное множество, порожденное одной n -мерной образующей $\vartheta_n \in \Delta[n]_n$. Обозначим через $\overline{\Delta}[n]$ нормализованный цепной комплекс стандартного n -мерного симплицального симплекса $\Delta[n]$. Совокупность цепных комплексов $\overline{\Delta}[*] = \{\overline{\Delta}[n]\}_{n \geq 0}$ является косимплициальным объектом в категории дифференциальных градуированных коалгебр, для которого операторы кограней $\delta^i: \overline{\Delta}[n-1] \rightarrow \overline{\Delta}[n]$, $0 \leq i \leq n$, операторы ковырождений $\sigma^j: \overline{\Delta}[n+1] \rightarrow \overline{\Delta}[n]$, $0 \leq j \leq n$, и ассоциативное коумножение $\nabla: \overline{\Delta}[n] \rightarrow \overline{\Delta}[n] \otimes \overline{\Delta}[n]$ соответственно задаются на образующих следующими формулами:

$$\begin{aligned} \delta^i(\vartheta_{n-1}) &= (-1)^{n-1} \partial_i(\vartheta_n), & \sigma^j(\vartheta_{n+1}) &= (-1)^{n+1} s_j(\vartheta_n), \\ \nabla(\vartheta_n) &= \sum_{i=0}^n \partial_0 \dots \partial_{i-1}(\vartheta_n) \otimes \partial_{i+1} \dots \partial_n(\vartheta_n). \end{aligned}$$

Так как совокупность $\overline{\Delta}[*] = \{\overline{\Delta}[n]\}_{n \geq 0}$ является косимплициальным объектом в категории дифференциальных градуированных модулей, для любых дифференциальных градуированных модулей X и Y семейство дифференциальных градуированных модулей $\text{Hom}(\overline{\Delta}[*] \otimes X; Y)_\bullet = \{\text{Hom}(\overline{\Delta}[n] \otimes X; Y)_\bullet\}_{n \geq 0}$ является симплицальным объектом в категории дифференциальных градуированных модулей. Операторы граней ∂_i и вырождений s_j этого симплицального объекта задаются на произвольном элементе $(\alpha: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+k}) \in \text{Hom}(\overline{\Delta}[n] \otimes X; Y)_k$ соответственно следующими формулами:

$$\begin{aligned} \partial_i(\alpha) &= \alpha(\delta^i \otimes 1): \text{Hom}(\overline{\Delta}[n] \otimes X; Y)_k \rightarrow \text{Hom}(\overline{\Delta}[n-1] \otimes X; Y)_k, & 0 \leq i \leq n, \\ s_j(\alpha) &= \alpha(\sigma^j \otimes 1): \text{Hom}(\overline{\Delta}[n] \otimes X; Y)_k \rightarrow \text{Hom}(\overline{\Delta}[n+1] \otimes X; Y)_k, & 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Пусть заданы произвольные дифференциальные градуированные модули X и Y . Отображение градуированных модулей $f: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ степени n будем называть $\overline{\Delta}[n]$ -отображением, если для f задано отображение дифференциальных градуированных модулей $\tilde{f}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, которое для каждого элемента $x \in X$ удовлетворяет условию $\tilde{f}(\vartheta_n \otimes x) = f(x)$. Отображение $\tilde{f}$ будем называть продолжением отображения f .

Рассмотрим для $\overline{\Delta}[n]$ -отображения $f: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ семейство отображений

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i_j \leq n-k+j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

определяемых формулой

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\tilde{f})(\vartheta_{n-k} \otimes 1_X),$$

где продолжение $\tilde{f}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ отображения f считается 0-мерным циклом дифференциального градуированного модуля $\text{Hom}(\overline{\Delta}[n] \otimes X; Y)$. Так как продолжение $\tilde{f}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ отображения f является отображением дифференциальных градуированных модулей, то для отображения $f: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$, рассматриваемого как элемент $f \in \text{Hom}(X; Y)_n$ дифференциального градуированного модуля $(\text{Hom}(X; Y)_\bullet, d)$, справедливо следующее равенство:

$$d(f) = (-1)^{n-1}(\partial_0(f) - \partial_1(f) + \cdots + (-1)^n \partial_n(f)).$$

Аналогично, так как каждое из отображений $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\tilde{f}): (\overline{\Delta}[n-k] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ является отображением дифференциальных градуированных модулей, то для любого отображения $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n-k}$, которое рассматривается как $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f) \in \text{Hom}(X; Y)_{n-k}$ дифференциального градуированного модуля $(\text{Hom}(X; Y)_\bullet, d)$, имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f)) \\ = (-1)^{n-k-1}(\partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f) - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f) + \cdots + (-1)^{n-k} \partial_{n-k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что семейство отображений

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i_j \leq n-k+j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

рассмотренных выше для $\overline{\Delta}[n]$ -отображения $f: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$, полностью определяют отображение дифференциальных градуированных модулей $\tilde{f}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$. В самом деле, так как цепной комплекс $\overline{\Delta}[n]$ является нормализованным, то любая образующая градуированного модуля $\overline{\Delta}[n] \otimes X$ имеет либо вид $\vartheta_n \otimes x$, либо вид $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_{n-k}) \otimes x$, $1 \leq k \leq n$. Ясно, что для отображения дифференциальных градуированных модулей $\tilde{f}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ справедливы следующие равенства:

$$\tilde{f}(\vartheta_n \otimes x) = f(x), \quad \tilde{f}(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_{n-k}) \otimes x) = (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f)(x),$$

где $\varepsilon = nk + k(k+1)/2$.

Пусть теперь заданы любой морфизм симметрических семейств $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ и любое $\overline{\Delta}[n]$ -отображение $f: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ с продолжением $\tilde{f}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$. Рассмотрим для каждого $j \geq 1$ отображение градуированных модулей степени n

$$f\{j\} = \tilde{f}^{\otimes j} U(\nabla(j)(\vartheta_n) \otimes 1_X^{\otimes j}): (X^{\otimes j})_\bullet \rightarrow (Y^{\otimes j})_{\bullet+n},$$

где $\nabla(j): \overline{\Delta}[n] \rightarrow \overline{\Delta}[n]^{\otimes j}$ — j -кратная итерация указанного выше ассоциативного коумножения $\nabla = \nabla(2): \overline{\Delta}[n] \rightarrow \overline{\Delta}[n] \otimes \overline{\Delta}[n]$ и $U: \overline{\Delta}[n]^{\otimes j} \otimes X^{\otimes j} \rightarrow (\overline{\Delta}[n] \otimes X)^{\otimes j}$ — очевидное тасующее отображение. Если для элемента $\nabla(j)(\vartheta_n)$ использовать запись

$$\nabla(j)(\vartheta_n) = \sum_{\substack{(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1) \\ \dots \dots \dots \\ (i_1^j, \dots, i_{k_j}^j)}} \partial_{i_1^1} \dots \partial_{i_{k_1}^1}(\vartheta_n) \otimes \cdots \otimes \partial_{i_1^j} \dots \partial_{i_{k_j}^j}(\vartheta_n),$$

где сумма берется по наборам индексов $(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1), \dots, (i_1^j, \dots, i_{k_j}^j)$, которые получаются в процессе j -кратной итерации коумножения ∇ , то получим следующую

формулу:

$$f\{j\} = \sum_{\substack{(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1) \\ \dots \\ (i_1^j, \dots, i_{k_j}^j)}} \partial_{i_1^1} \dots \partial_{i_{k_1}^1}(f) \otimes \dots \otimes \partial_{i_1^j} \dots \partial_{i_{k_j}^j}(f).$$

Так как для любого $j \geq 1$ указанное выше отображение $f\{j\}: (X^{\otimes j})_{\bullet} \rightarrow (Y^{\otimes j})_{\bullet+n}$ является Σ_j -эквивариантным отображением, где Σ_j действует в тензорных произведениях $X^{\otimes j}$ и $Y^{\otimes j}$ перестановками сомножителей, для каждого $j \geq 1$ корректно определено отображение градуированных модулей степени n

$$(\alpha \times f)\{j\} = \alpha(j) \otimes f\{j\}: (\mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j})_{\bullet} \rightarrow (\mathcal{E}'(j) \otimes_{\Sigma_j} Y^{\otimes j})_{\bullet+n}.$$

Определим отображение градуированных модулей $\alpha \times f: (\mathcal{E} \times X)_{\bullet} \rightarrow (\mathcal{E}' \times Y)_{\bullet+n}$ степени n , полагая

$$\alpha \times f = \bigoplus_{j \geq 1} (\alpha \times f)\{j\}.$$

Заметим теперь, что любое отображение $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f): X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet+n-k}$ градуированных модулей степени $n-k$, определяемое $\bar{\Delta}[n]$ -отображением $f: X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet+n}$, является $\bar{\Delta}[n-k]$ -отображением с продолжением $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\tilde{f}): (\bar{\Delta}[n-k] \otimes X)_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$. Поэтому для любого отображения $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f): X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet+n-k}$ определено отображение градуированных модулей $\alpha \times \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f): (\mathcal{E} \times X)_{\bullet} \rightarrow (\mathcal{E}' \times Y)_{\bullet+n-k}$ степени $n-k$. Если рассмотреть отображения $\alpha \times f$ и $\alpha \times \partial_i(f)$, $0 \leq i \leq n$, как элементы $\alpha \times f \in \text{Hom}(\mathcal{E} \times X; \mathcal{E}' \times Y)_n$ и $\alpha \times \partial_i(f) \in \text{Hom}(\mathcal{E} \times X; \mathcal{E}' \times Y)_{n-1}$ дифференциального градуированного модуля $(\text{Hom}(\mathcal{E} \times X; \mathcal{E}' \times Y)_{\bullet}, d)$, то для указанных отображений справедливо следующее равенство:

$$d(\alpha \times f) = (-1)^{n-1}(\alpha \times \partial_0(f) - \alpha \times \partial_1(f) + \dots + (-1)^n \alpha \times \partial_n(f)). \quad (1)$$

В самом деле, так как имеют место соотношения

$$\partial_i(\vartheta_n) = (-1)^{n-1} \delta^i(\vartheta_{n-1}), \quad \nabla(j) \delta^i(\vartheta_{n-1}) = (\delta^i)^{\otimes j} \nabla(j)(\vartheta_{n-1}), \quad 0 \leq i \leq n,$$

то получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} d((\alpha \times f)\{f\}) &= d(\alpha(j) \otimes f\{j\}) = \alpha(j) \otimes d(f\{j\}) \\ &= \alpha(j) \otimes d(\tilde{f}^{\otimes j} U(\nabla(j)(\vartheta_n)) \otimes 1_X^{\otimes j}) = \alpha(j) \otimes \tilde{f}^{\otimes j} U(\nabla(j)(d(\vartheta_n)) \otimes 1_X^{\otimes j}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha(j) \otimes \tilde{f}^{\otimes j} U(\nabla(j)(\partial_i(\vartheta_n)) \otimes 1_X^{\otimes j}) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha(j) \otimes \tilde{f}^{\otimes j} U(\nabla(j)(\delta^i(\vartheta_{n-1})) \otimes 1_X^{\otimes j}) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha(j) \otimes \tilde{f}^{\otimes j} U((\delta^i)^{\otimes j} \otimes 1_X^{\otimes j})(\nabla(j)(\vartheta_{n-1}) \otimes 1_X^{\otimes j}) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha(j) \otimes \tilde{f}^{\otimes j} (\delta^i \otimes 1_X)^{\otimes j} U(\nabla(j)(\vartheta_{n-1}) \otimes 1_X^{\otimes j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha(j) \otimes (\tilde{f}(\delta^i \otimes 1_X))^{\otimes j} U(\nabla(j)(\vartheta_{n-1}) \otimes 1_X^{\otimes j}) \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha(j) \otimes (\partial^i(\tilde{f}))^{\otimes j} U(\nabla(j)(\vartheta_{n-1}) \otimes 1_X^{\otimes j}) \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha(j) \otimes (\partial^i(f))\{j\} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i (\alpha \times \partial_i(f))\{j\}.
\end{aligned}$$

Из найденного соотношения $d((\alpha \times f)\{j\}) = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i (\alpha \times \partial_i(f))\{j\}$ и определения отображения $\alpha \times f$ получаем требуемое равенство

$$d(\alpha \times f) = (-1)^{n-1} (\alpha \times \partial_0(f) - \alpha \times \partial_1(f) + \cdots + (-1)^i \alpha \times \partial_n(f)).$$

Приведем простейший пример на применение этого равенства. Пусть задана произвольная гомотопия $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ между отображениями дифференциальных градуированных модулей $f, g: X \rightarrow Y$, т.е. имеет место равенство $d(h) = f - g$. Если рассмотреть эту гомотопию как $\overline{\Delta}[1]$ -отображение $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$, продолжение которого $\tilde{h}: (\overline{\Delta}[1] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ полностью определяется отображениями $\partial_0(h) = f: X \rightarrow Y$ и $\partial_1(h) = g: X \rightarrow Y$, то для любого морфизма симметрических семейств $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ отображение $\alpha \times h: (\mathcal{E} \times X)_\bullet \rightarrow (\mathcal{E}' \times Y)_{\bullet+1}$ является гомотопией между отображениями дифференциальных градуированных модулей $\alpha \times f, \alpha \times g: \mathcal{E} \times X \rightarrow \mathcal{E}' \times Y$. Действительно, для отображения $\alpha \times h$ имеет место следующее равенство:

$$d(\alpha \times h) = \alpha \times \partial_0(h) - \alpha \times \partial_1(h) = \alpha \times f - \alpha \times g. \quad (2)$$

Полезно отметить, что так как ассоциативное коумножение $\nabla: \overline{\Delta}[1] \rightarrow \overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[1]$ определяется формулами

$$\begin{aligned}
\nabla(\partial_0(\vartheta_1)) &= \partial_0(\vartheta_1) \otimes \partial_0(\vartheta_1), & \nabla(\partial_1(\vartheta_1)) &= \partial_1(\vartheta_1) \otimes \partial_1(\vartheta_1), \\
\nabla(\vartheta_1) &= \partial_0(\vartheta_1) \otimes \vartheta_1 + \vartheta_1 \otimes \partial_1(\vartheta_1),
\end{aligned}$$

то указанная выше гомотопия $\alpha \times h: (\mathcal{E} \times X)_\bullet \rightarrow (\mathcal{E}' \times Y)_{\bullet+1}$ задается следующим семейством равенств:

$$(\alpha \times h)\{j\} = \sum_{i=0}^{j-1} (\alpha(j) \otimes f^{\otimes i} \otimes h \otimes g^{\otimes j-i-1}), \quad j \geq 1.$$

A_∞ -морфизмом $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \mu)$ алгебр над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ называется семейство отображений

$$f = \{f_n: \mathcal{E}^{\times n} \times X \rightarrow Y \mid f_n((\mathcal{E}^{\times n} \times X)_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

которые для каждого целого числа $n \geq -1$ удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned}
d(f_{n+1}) &= (-1)^n \mu(1 \times f_n) - f_n(1 \times \cdots \times 1 \times \mu) \\
&\quad + \sum_{t=1}^n (-1)^{t+n} f_n(1 \times \cdots \times 1 \times \pi \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1),
\end{aligned}$$

где t – номер места, на котором стоит π .

Легко видеть, что каждое отображение $\mathcal{E}$ -алгебр $f: X \rightarrow Y$ можно считать A_∞ -морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр $\{f_n\}: X \rightarrow Y$, если положить $f_0 = f$ и $f_n = 0$, $n > 0$.

Для корректности данного выше определения A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр требуется еще показать, что каждое отображение $f_n: (\mathcal{E}^{\times n})_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ является $\bar{\Delta}[n]$ -отображением, т.е. предъявить продолжение $\tilde{f}_n: (\bar{\Delta}[n] \otimes (\mathcal{E}^{\times n} \times X))_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ отображения f_n , которое используется при построении отображения градуированных модулей $\mu(1 \times f_n): (\mathcal{E} \times (\mathcal{E}^{\times n} \times X))_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ степени n . Как было указано выше, задание продолжения $\tilde{f}_n$ эквивалентно заданию семейства отображений градуированных модулей

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n): (\mathcal{E}^{\times n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i_j \leq n-k+j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

степени $n-k$, соотношения между которыми порождаются “симплициальными соотношениями для граней”, т.е. всеми соотношениями вида $\partial_i \partial_j(f_n) = \partial_{j-1} \partial_i(f_n)$, $i < j$, и которые удовлетворяют условиям согласованности с дифференциалом:

$$\begin{aligned} d(f_n) &= (-1)^{n-1}(\partial_0(f_n) - \partial_1(f_n) + \dots + (-1)^n \partial_n(f_n)), \\ d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)) &= (-1)^{n-k-1}(\partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n) - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-k}(\partial_{n-k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n))). \end{aligned}$$

Для определения указанных выше отображений $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)$ рассмотрим отображения дифференциальных градуированных модулей $\partial_i: \mathcal{E}^{\times n} \times X \rightarrow \mathcal{E}^{\times(n-1)} \times X$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$, задаваемых следующими формулами:

$$\partial_i = \underbrace{1 \times \dots \times 1}_{i-1} \times \pi \times \underbrace{1 \times \dots \times 1}_{n-i} \times 1, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \partial_n = 1 \times \dots \times 1 \times \mu.$$

Легко видеть, что отображения $\partial_i: \mathcal{E}^{\times n} \times X \rightarrow \mathcal{E}^{\times(n-1)} \times X$, $1 \leq i \leq n$, связаны между собой соотношениями $\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i$, $i < j$. Определим отображения градуированных модулей

$$\begin{aligned} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n): (\mathcal{E}^{\times n} \times X)_\bullet &\rightarrow Y_{\bullet+n-k}, \\ n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i_j \leq n-k+j, \quad 1 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

степени $n-k$ следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} \partial_0(f_1) &= \mu(1 \times f_0), \quad \partial_1(f_1) = f_0 \mu, \\ \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n) &= \begin{cases} \mu(1 \times \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1})), & i_k = 0, \\ \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1}) \partial_{i_k}, & i_k > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что частью данных рекуррентных формул являются следующие равенства:

$$\partial_0(f_n) = \mu(1 \times f_{n-1}), \quad \partial_i(f_n) = f_{n-1} \partial_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Проверим теперь справедливость соотношений $\partial_i \partial_j(f_n) = \partial_{j-1} \partial_i(f_n)$ при $i < j$. Для $1 \leq i < j \leq n$ имеем

$$\partial_i \partial_j(f_n) = \partial_i(f_{n-1}) \partial_j = f_{n-2} \partial_i \partial_j = f_{n-2} \partial_{j-1} \partial_i = \partial_{j-1}(f_{n-1}) \partial_i = \partial_{j-1} \partial_i(f_n).$$

При $i = 0$ и $j = 1$ получаем

$$\begin{aligned}\partial_0 \partial_1(f_n) &= \partial_0(f_{n-1})\partial_1 = \mu(1 \times f_{n-2})(\pi \times 1 \times \cdots \times 1) \\ &= \mu(\pi \times 1)(1 \times 1 \times f_{n-2}) = \mu(1 \times \mu)(1 \times 1 \times f_{n-2}) \\ &= \mu(1 \times \mu(1 \times f_{n-2})) = \mu(1 \times \partial_0(f_{n-1})) = \partial_0 \partial_0(f_n).\end{aligned}$$

При $i = 0$ и $1 < j < n$ имеем

$$\begin{aligned}\partial_0 \partial_j(f_n) &= \partial_0(f_{n-1})\partial_j = \mu(1 \times f_{n-2})\underbrace{(1 \times \cdots \times 1 \times \pi \times 1 \times \cdots \times 1)}_{j-1} \\ &= \mu(1 \times f_{n-2})\underbrace{(1 \times \cdots \times 1 \times \pi \times 1 \times \cdots \times 1)}_{j-2} \\ &= \mu(1 \times \partial_{j-1}(f_{n-1})) = \partial_{j-1} \partial_0(f_n).\end{aligned}$$

При $i = 0$ и $j = n$ получаем

$$\begin{aligned}\partial_0 \partial_n(f_n) &= \partial_0(f_{n-1})\partial_n = \mu(1 \times f_{n-2})\underbrace{(1 \times \cdots \times 1 \times \mu)}_n \\ &= \mu(1 \times f_{n-2})\underbrace{(1 \times \cdots \times 1 \times \mu)}_{n-1} = \mu(1 \times \partial_{n-1}(f_{n-1})) = \partial_{n-1} \partial_0(f_n).\end{aligned}$$

Таким образом, справедливость соотношений $\partial_i \partial_j(f_n) = \partial_{j-1} \partial_i(f_n)$, $i < j$, проверена. Заметим теперь, что условие

$$\begin{aligned}d(f_n) &= (-1)^{n-1} \mu(1 \times f_{n-1}) - f_{n-1}(1 \times \cdots \times 1 \times \mu) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{t+n-1} f_{n-1}(1 \times \cdots \times 1 \times \pi \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1),\end{aligned}$$

из определения A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр является одним из условий согласованности семейства отображений $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)$ с дифференциалом, а именно является условием

$$d(f_n) = (-1)^{n-1}(\partial_0(f_n) - \partial_1(f_n) + \cdots + (-1)^n \partial_n(f_n)).$$

Проверим теперь справедливость еще одного, оставшегося, условия согласованности семейства отображений $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)$ с дифференциалом, т.е. проверим справедливость условия

$$\begin{aligned}d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)) &= (-1)^{n-k-1}(\partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n) - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-k} \partial_{n-k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)).\end{aligned}$$

Проверку проведем индукцией по $n \geq 1$. При $n = 1$ проверяемое условие справедливо, поскольку имеют место очевидные равенства

$$d(\partial_0(f_1)) = d(\mu(1 \times f_0)) = 0 = -\partial_0 \partial_0(f_1), \quad d(\partial_1(f_1)) = d(f_0 \mu) = 0 = -\partial_0 \partial_1(f_1),$$

Предположим, что для любого $m < n$ семейство отображений $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_m)$ удовлетворяет данному условию. Покажем теперь, что рассматриваемое условие справедливо и для семейства отображений $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)$. Так как семейство отображений $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1})$ по предположению индукции является семейством $\Delta[(n-1) -$

$(k-1)]$ -отображений, то при $i_k = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 & d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} \partial_0(f_n)) \\
 &= d(\mu(1 \times \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1}))) \\
 &= (-1)^{(n-2)-(k-1)} \mu(1 \times \partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1})) - \mu(1 \times \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1})) + \dots \\
 &\quad + (-1)^{(n-1)-(k-1)} \mu(1 \times \partial_{(n-1)-(k-1)} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1})) \\
 &= (-1)^{n-k-1} (\partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} \partial_0(f_n) - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} \partial_0(f_n) + \dots \\
 &\quad + (-1)^{n-k} \partial_{n-k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_n)).
 \end{aligned}$$

Так как рассмотренные выше отображения $\partial_i: \mathcal{E}^{\times n} \times X \rightarrow \mathcal{E}^{\times(n-1)} \times X$, $1 \leq i \leq n$, являются отображениями дифференциальных градуированных модулей, то при $i_k > 0$, пользуясь предположением индукции, имеем

$$\begin{aligned}
 & d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)) \\
 &= d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1}) \partial_{i_k}) \\
 &= (-1)^{(n-2)-(k-1)} \partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1}) \partial_{i_k} - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1}) \partial_{i_k} + \dots \\
 &\quad + (-1)^{(n-1)-(k-1)} (\partial_{(n-1)-(k-1)} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_{n-1}) \partial_{i_k}) \\
 &= (-1)^{n-k-1} (\partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} \partial_{i_k}(f_n) - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}} \partial_{i_k}(f_n) \\
 &\quad + \dots + (-1)^{n-k} \partial_{n-k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(f_n)).
 \end{aligned}$$

что и завершает проверку справедливости рассматриваемого условия по индукции. Таким образом, показано, что в данном выше определении A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр семейство отображений $f_n: (\mathcal{E}^{\times n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$, $n \geq 0$, является семейством $\Delta[n]$ -отображений, продолжения $\tilde{f}_n: (\bar{\Delta}[n] \otimes (\mathcal{E}^{\times n} \times X))_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, которых задаются на образующих градуированного модуля $\bar{\Delta}[n] \otimes (\mathcal{E}^{\times n} \times X)$ следующими формулами:

$$\tilde{f}_n(\vartheta_n \otimes u) = f_n(u), \quad \tilde{f}_n(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_{n-k}) \otimes u) = (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)(u),$$

где $u \in \mathcal{E}^{\times n} \times X$ и $\varepsilon = nk + k(k+1)/2$. Осталось теперь указать только на то, что слагаемое $\mu(1 \times f_n)$ в формуле из определения A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр однозначно определяется при помощи построенного выше продолжения $\tilde{f}_n$ отображения f_n и, следовательно, данное выше определение A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр является корректным.

Отметим, что введенное выше определение A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр эквивалентно определению A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр, которое дается в терминах B -конструкции $\mathcal{E}$ -алгебры [6]. Однако, определение A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр, использующее понятие B -конструкции, является, образно выражаясь, чрезмерно “зашифрованным”. Поэтому, при проведении конкретных вычислений с A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр полезно иметь под руками, так сказать, “расшифрованный” вариант определения A_∞ -морфизма $\mathcal{E}$ -алгебр, который и был предложен выше.

Введем теперь операцию композиции A_∞ -морфизмов $\mathcal{E}$ -алгебр. Пусть заданы произвольные A_∞ -морфизмы $\mathcal{E}$ -алгебр $f = \{f_n\}: X \rightarrow Y$ и $g = \{g_n\}: Y \rightarrow Z$. Композицией A_∞ -морфизмов $\mathcal{E}$ -алгебр f и g называется A_∞ -морфизм $\mathcal{E}$ -алгебр $gf = \{(gf)_n\}: X \rightarrow Z$, определяемый следующими формулами:

$$(gf)_n = \sum_{k+m=n} g_k(1 \times \dots \times 1 \times f_m), \quad n \geq 0.$$

Отметим, что отображение

$$(1 \times \cdots \times 1 \times f_m): (\mathcal{E}^{\times k} \times (\mathcal{E}^{\times m} \times X))_\bullet \rightarrow (\mathcal{E}^{\times k} \times Y)_{\bullet+m}$$

определено корректно, поскольку для каждого $m \geq 0$ отображение f_m , как было показано выше, является $\bar{\Delta}[m]$ -отображением. Тожественным A_∞ -морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр является A_∞ -морфизм $\mathcal{E}$ -алгебр $1_X = \{(1_X)_n\}: X \rightarrow X$, где $(1_X)_0$ – тождественное отображение градуированного модуля X и $(1_X)_n = 0$, $n \geq 1$.

Рассмотрим теперь понятие гомотопии между $\bar{\Delta}[n]$ -отображениями, которое будет нужно для введения понятия гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр.

Пусть заданы любые дифференциальные градуированные модули X и Y . Отображение градуированных модулей $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ степени $n+1$ будем называть $(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n])$ -отображением, если для h задано отображение дифференциальных градуированных модулей $h: (\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, которое для каждого элемента $x \in X$ удовлетворяет условию $h(\partial_1 \otimes \partial_n \otimes x) = h(x)$. Отображение $\tilde{h}$ далее будет называться *продолжением отображения h* .

Пусть теперь заданы произвольные $\bar{\Delta}[n]$ -отображения $f, g: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$, с соответствующими им продолжениями $\tilde{f}, \tilde{g}: (\bar{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$. Отображение градуированных модулей $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ степени $n+1$ будем называть $\bar{\Delta}[n]$ -гомотопией между заданными $\bar{\Delta}[n]$ -отображениями f и g , если отображение h является $(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n])$ -отображением, продолжение $\tilde{h}$ которого для каждого элемента $x \in X$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\tilde{h}(\partial_0(\partial_1 \otimes \partial_n \otimes x)) = \tilde{f}(\partial_n \otimes x), \quad \tilde{h}(\partial_1(\partial_1 \otimes \partial_n \otimes x)) = \tilde{g}(\partial_n \otimes x).$$

Легко видеть, что для любой $\bar{\Delta}[n]$ -гомотопии h между $\bar{\Delta}[n]$ -отображениями f и g отображение $H: (\bar{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$, определяемое для каждого элемента $\alpha \otimes x \in \bar{\Delta}[n] \otimes X$ формулой $H(\alpha \otimes x) = \tilde{h}(\partial_1 \otimes \alpha \otimes x)$, является гомотопией между отображениями дифференциальных градуированных модулей $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$.

Так как совокупность цепных комплексов $\bar{\Delta}[*] = \{\bar{\Delta}[n]\}_{n \geq 0}$ является косимплициальным объектом в категории дифференциальных градуированных модулей, то для любых дифференциальных градуированных модулей X и Y семейство

$$\text{Hom}(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[*] \otimes X; Y)_\bullet = \{\text{Hom}(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n] \otimes X; Y)_\bullet\}_{n \geq 0}$$

является симплициальным объектом в категории дифференциальных градуированных модулей. Операторы граней ∂_i и вырождений s_j этого симплициального объекта задаются на произвольном элементе $\alpha \in \text{Hom}(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n] \otimes X; Y)_k$ соответственно следующими формулами:

$$\begin{aligned} \partial_i(\alpha) &= \alpha(1 \otimes \delta^i \otimes 1): \text{Hom}(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n] \otimes X; Y)_k \rightarrow \text{Hom}(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n-1] \otimes X; Y)_k, \\ s_j(\alpha) &= \alpha(1 \otimes \sigma^j \otimes 1): \text{Hom}(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n] \otimes X; Y)_k \rightarrow \text{Hom}(\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n+1] \otimes X; Y)_k. \end{aligned}$$

Пусть задана $\bar{\Delta}[n]$ -гомотопия $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ между $\bar{\Delta}[n]$ -отображениями $f, g: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$. Рассмотрим для этой $\bar{\Delta}[n]$ -гомотопии семейство отображений

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i_j \leq n-k+j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

определяемых формулой $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\tilde{h})(\vartheta_1 \otimes \vartheta_{n-k} \otimes 1_X)$, где продолжение $\tilde{h}: (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ отображения h считается 0-мерным циклом дифференциального градуированного модуля $\text{Hom}(\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X; Y)$. Так как продолжение $\tilde{h}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ отображения h являются отображением дифференциальных градуированных модулей, то для отображения $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$, рассматриваемого как элемент $h \in \text{Hom}(X; Y)_{n+1}$ дифференциального градуированного модуля $(\text{Hom}(X; Y)_\bullet, d)$, справедливо следующее равенство:

$$d(h) = f - g + (-1)^n(\partial_0(h) - \partial_1(h) + \dots + (-1)^n \partial_n(h)).$$

Аналогично, так как любое отображение $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\tilde{h}): (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n-k] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ является отображением дифференциальных градуированных модулей, то для каждого отображения $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1-k}$, рассматриваемого как элемент $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} \in \text{Hom}(X; Y)_{n+1-k}$ дифференциального градуированного модуля $(\text{Hom}(X; Y)_\bullet, d)$, имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h)) \\ = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f) - \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(g) \\ + (-1)^{n-k}(\partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h) - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h) + \dots + (-1)^{n-k} \partial_{n-k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h)). \end{aligned}$$

Ясно, что продолжения $\tilde{f}, \tilde{g}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ и семейство отображений

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i_j \leq n-k+j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

которое было рассмотрено выше для $\overline{\Delta}[n]$ -гомотопии $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ между $\overline{\Delta}[n]$ -отображениями $f, g: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$, полностью определяют отображение дифференциальных градуированных модулей $\tilde{h}: (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$. В самом деле, так как цепные комплексы $\overline{\Delta}[1]$ и $\overline{\Delta}[n]$ являются нормализованными, то любая образующая градуированного модуля $\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X$ имеет один из следующих видов:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 \otimes \vartheta_n \otimes x, \quad \partial_i(\vartheta_1) \otimes \vartheta_n \otimes x, \quad 0 \leq i \leq 1, \\ \vartheta_1 \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_{n-k}) \otimes x, \quad 1 \leq k \leq n, \\ \partial_i(\vartheta_1) \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_{n-k}) \otimes x, \quad 0 \leq i \leq 1, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для отображения дифференциальных градуированных модулей $\tilde{h}: (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\vartheta_1 \otimes \vartheta_n \otimes x) &= h(x), & \tilde{h}(\vartheta_1 \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_{n-k}) \otimes x) &= (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h)(x), \\ \tilde{h}(\partial_0(\vartheta_1) \otimes \vartheta_n \otimes x) &= g(x), & \tilde{h}(\partial_0(\vartheta_1) \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_n) \otimes x) &= (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(g)(x), \\ \tilde{h}(\partial_1(\vartheta_1) \otimes \vartheta_n \otimes x) &= f(x), & \tilde{h}(\partial_1(\vartheta_1) \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_n) \otimes x) &= (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f)(x), \end{aligned}$$

где $\varepsilon = nk + k(k+1)/2$.

Пусть теперь задан любой морфизм симметрических семейств $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ и задана произвольная $\overline{\Delta}[n]$ -гомотопия $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ между $\overline{\Delta}[n]$ -отображениями $f, g: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ с соответствующими продолжениями $\tilde{h}: (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ и $\tilde{f}, \tilde{g}: (\overline{\Delta}[n] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$. Рассмотрим для каждого $j \geq 1$ отображение градуированных модулей степени $n+1$

$$h\{j\} = \tilde{h}^{\otimes j} V(\nabla(j)(\vartheta_1) \otimes \nabla(j)(\vartheta_n) \otimes 1_X^{\otimes j}): (X^{\otimes j})_\bullet \rightarrow (Y^{\otimes j})_{\bullet+n+1},$$

где $V: \overline{\Delta}[1]^{\otimes j} \otimes \overline{\Delta}[n]^{\otimes j} \otimes X^{\otimes j} \rightarrow (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X)^{\otimes j}$ – композиция очевидных тасующих отображений

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}[1]^{\otimes j} \otimes \overline{\Delta}[n]^{\otimes j} \otimes X^{\otimes j} &\rightarrow (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n])^{\otimes j} \otimes X^{\otimes j}, \\ (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n])^{\otimes j} \otimes X^{\otimes j} &\rightarrow (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n] \otimes X)^{\otimes j}, \end{aligned}$$

и $\nabla(j)$ – j -кратная итерация ассоциативного коумножения $\nabla: \overline{\Delta}[*] \rightarrow \overline{\Delta}[*] \otimes \overline{\Delta}[*]$, определение которого было дано выше. Если для элемента $\nabla(j)(\vartheta_n)$ использовать запись

$$\nabla(j)(\vartheta_n) = \sum_{\substack{(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1) \\ \dots \\ (i_1^j, \dots, i_{k_j}^j)}} \partial_{i_1^1} \dots \partial_{i_{k_1}^1}(\vartheta_n) \otimes \dots \otimes \partial_{i_1^j} \dots \partial_{i_{k_j}^j}(\vartheta_n),$$

где сумма берется по наборам индексов $(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1), \dots, (i_1^j, \dots, i_{k_j}^j)$, которые получаются в процессе j -кратной итерации коумножения ∇ , то получим, учитывая равенство

$$\nabla(j)(\vartheta_1) = \sum_{m=1}^j \underbrace{\partial_0(\vartheta_1) \otimes \dots \otimes \partial_0(\vartheta_1)}_{m-1} \otimes \vartheta_1 \otimes \underbrace{\partial_1(\vartheta_1) \otimes \dots \otimes \partial_1(\vartheta_1)}_{j-m},$$

следующую формулу:

$$h\{j\} = \sum_{m=1}^j \sum_{\substack{(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1) \\ \dots \\ (i_1^j, \dots, i_{k_j}^j)}} \partial_{i_1^1} \dots \partial_{i_{k_1}^1}(f) \otimes \dots \otimes \partial_{i_{k_{m-1}}^{m-1}} \dots \partial_{i_{k_m}^{m-1}}(f) \\ \otimes \partial_{i_1^m} \dots \partial_{i_{k_m}^m}(h) \otimes \partial_{i_1^{m+1}} \dots \partial_{i_{k_{m+1}}^{m+1}}(g) \otimes \dots \otimes \partial_{i_1^j} \dots \partial_{i_{k_j}^j}(g).$$

Так как для любого $j \geq 1$ отображение $h\{j\}: (X^{\otimes j})_\bullet \rightarrow (Y^{\otimes j})_{\bullet+n+1}$ является Σ_j -эквивариантным отображением, где Σ_j действует в тензорных произведениях $X^{\otimes j}$ и $Y^{\otimes j}$ перестановками сомножителей, для каждого $j \geq 1$ корректно определено отображение градуированных модулей степени n

$$(\alpha \times h)\{j\} = \alpha(j) \otimes h\{j\}: (\mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j})_\bullet \rightarrow (\mathcal{E}'(j) \otimes_{\Sigma_j} Y^{\otimes j})_{\bullet+n+1}.$$

Определим отображение градуированных модулей $\alpha \times h: (\mathcal{E} \times X)_\bullet \rightarrow (\mathcal{E}' \times Y)_{\bullet+n+1}$ степени $n+1$, полагая

$$\alpha \times h = \bigoplus_{j \geq 1} (\alpha \times h)\{j\}.$$

Заметим теперь, что каждое отображение $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1-k}$ градуированных модулей степени $n+1-k$, определяемое $\overline{\Delta}[n]$ -гомотопией $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ между $\overline{\Delta}[n]$ -отображениями $f, g: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$, является $(\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n-k])$ -отображением с продолжением $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\tilde{h}): (\overline{\Delta}[1] \otimes \overline{\Delta}[n-k] \otimes X)_\bullet \rightarrow Y_\bullet$. Поэтому для любого отображения $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1-k}$ определено отображение градуированных модулей $\alpha \times \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f): (\mathcal{E} \times X)_\bullet \rightarrow (\mathcal{E}' \times Y)_{\bullet+n+1-k}$ степени $n+1-k$. Если рассмотреть отображения $\alpha \times h$ и $\alpha \times \partial_i(h)$, $0 \leq i \leq n$, как элементы дифференциального градуированного модуля $(\text{Hom}(\mathcal{E} \times X; \mathcal{E}' \times Y)_\bullet, d)$, то для данных отображений имеет место равенство

$$d(\alpha \times h) = \alpha \times f - \alpha \times g + (-1)^n(\alpha \times \partial_0(h) - \alpha \times \partial_1(h) + \dots + (-1)^n g \times \partial_n(h)), \quad (3)$$

проверка справедливости которого аналогична сделанной выше проверке равенства (1) для $\bar{\Delta}[n]$ -отображений.

Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр $f, g: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений $h = \{h_n: (\mathcal{E}^{\times n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $n \geq -1$ удовлетворяют соотношению

$$d(h_{n+1}) = f_{n+1} - g_{n+1} + (-1)^{n+1} \mu(1 \times h_n) + h_n(1 \times \cdots \times 1 \times \mu) + \sum_{t=1}^n (-1)^{t+n+1} h_n(1 \times \cdots \times 1 \times \pi \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1),$$

где t – номер места, на котором стоит π .

Для корректности данного определения гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр требуется показать, что каждое отображение $h_n: (\mathcal{E}^{\times n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$ является $\bar{\Delta}[n]$ -гомотопией между $\bar{\Delta}[n]$ -отображениями f и g , т.е. требуется предъявить продолжение $\tilde{h}_n: (\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n] \otimes (\mathcal{E}^{\times n} \times X))_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ отображения h_n , которое используется при построении отображения $\mu(1 \times h_n): (\mathcal{E} \times (\mathcal{E}^{\times n} \times X))_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1}$. Рассмотрим семейство отображений

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h_n): X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1-k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq i_j \leq n-k+j, \quad 1 \leq j \leq k,$$

определяемых следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} \partial_0(h_1) &= \mu(1 \times h_0), & \partial_1(h_1) &= h_0\mu, \\ \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h_n) &= \begin{cases} \mu(1 \times \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(h_{n-1})), & i_k = 0, \\ \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k-1}}(h_{n-1})\partial_{i_k}, & i_k > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка справедливости равенств $\partial_i \partial_j(h_n) = \partial_{j-1} \partial_i(h_n)$, $i < j$ и условий согласованности с дифференциалом

$$\begin{aligned} d(h_n) &= f_n - g_n + (-1)^n (\partial_0(h_n) - \partial_1(h_n) + \cdots + (-1)^n \partial_n(h_n)), \\ d(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h_n)) &= \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n) - \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(g_n) \\ &\quad + (-1)^{n-k} (\partial_0 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h_n) - \partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h_n) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-k} \partial_{n-k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h_n)) \end{aligned}$$

проводится аналогично тому, как это было сделано выше в случае A_∞ -морфизмов $\mathcal{E}$ -алгебр. Определим теперь продолжение $\tilde{h}_n: (\bar{\Delta}[1] \otimes \bar{\Delta}[n] \otimes (\mathcal{E}^{\times n} \times X))_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ отображения h_n , полагая

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n(\vartheta_1 \otimes \vartheta_n \otimes u) &= h_n(u), & \tilde{h}_n(\vartheta_1 \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_n) \otimes u) &= (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(h_n)(u), \\ \tilde{h}_n(\partial_0(\vartheta_1) \otimes \vartheta_n \otimes u) &= f_n(u), & \tilde{h}_n(\partial_1(\vartheta_1) \otimes \vartheta_n \otimes u) &= g_n(u), \\ \tilde{h}_n(\partial_0(\vartheta_1) \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_n) \otimes u) &= (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(f_n)(u), \\ \tilde{h}_n(\partial_1(\vartheta_1) \otimes \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(\vartheta_n) \otimes u) &= (-1)^\varepsilon \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(g_n)(u), \end{aligned}$$

где $u \in \mathcal{E}^{\times n} \times X$ и $\varepsilon = nk + k(k+1)/2$. Таким образом, каждое отображение h_n является $\bar{\Delta}[n]$ -гомотопией между $\bar{\Delta}[n]$ -отображениями f_n и g_n . В частности, слагаемое $\mu(1 \times h_n)$ в формуле из определения гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр однозначно определяется при помощи построенного продолжения $\tilde{h}_n$ отображения h_n и, следовательно, данное выше определение гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр является корректным.

Так же, как и выше, отметим, что введенное выше определение гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр является эквивалентным определению гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр, которое дается в терминах B -конструкции $\mathcal{E}$ -алгебры [6].

При помощи понятия гомотопии между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр стандартно определяется понятие A_∞ -гомотопической эквивалентности $\mathcal{E}$ -алгебр.

Пусть заданы A_∞ -морфизмы $\mathcal{E}$ -алгебр $\eta: X \rightrightarrows Y: \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h: X \rightarrow X$ между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренная ситуация традиционно записывается в виде $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ и называется A_∞ -SDR-ситуацией $\mathcal{E}$ -алгебр.

Напомним, что операда (E_∞, π) является операдой Хопфа [2], т.е. для операды (E_∞, π) в категории симметрических семейств имеется ассоциативное коумножение $\nabla: E_\infty \rightarrow E_\infty \otimes E_\infty$, где $(E_\infty \otimes E_\infty)(j) = E_\infty(j) \otimes E_\infty(j)$, $j \geq 1$, которое является морфизмом операд. При помощи этого коумножения ∇ определяется тензорное произведение $(X \otimes Y, \mu)$ произвольных E_∞ -алгебр (X, μ') и (Y, μ'') со структурным отображением $\mu: E_\infty \times (X \otimes Y) \rightarrow X \otimes Y$, которое задается формулой $\mu = (\mu' \otimes \mu')T(\nabla \times 1)$, где $T: (E_\infty \otimes E_\infty) \times (X \otimes Y) \rightarrow (E_\infty \times X) \otimes (E_\infty \times Y)$ – очевидное перестановочное отображение.

Рассмотрим теперь для произвольной E_∞ -алгебры (X, d, μ) дифференциальную алгебру $(X, d, \cup)$, операция умножения $\cup: (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$ которой задается формулой $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1_X \otimes 1_X)$, где $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$. Так как в операде (E_∞, π) имеется соотношение $d(\cup_1) = \cup_0 - \cup_0 T$, где $\cup_1 \in E_\infty(2)_1$, $T \in \Sigma_2$, то операция умножения $\cup$ является гомотопически коммутативной. Кроме того, операция умножения $\cup$ является гомотопически ассоциативной, поскольку в операде (E_∞, π) содержится [2] подоперада Сташеффа (A_∞, π) и, следовательно, в операде (E_∞, π) имеется соотношение $d(\pi_1) = \pi(\cup_0 \otimes \cup_0 \otimes 1) - \pi(\cup_0 \otimes 1 \otimes \cup_0)$, где $\pi_1 \in A_\infty(3)_1 \subset E_\infty(3)_1$. Отметим теперь, что если для произвольной E_∞ -алгебры (X, μ) рассмотреть соответствующую ей E_∞ -алгебру $(X \otimes X, \mu)$, то операция умножения $\cup: (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$, вообще говоря, не является отображением E_∞ -алгебр. Однако, как показывает следующее утверждение, для любых E_∞ -алгебр операцию умножения $\cup$ всегда можно продолжить до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждой E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над произвольным коммутативным кольцом с единицей K , существует A_∞ -морфизм E_∞ -алгебр $\psi = \{\psi_n: (E_\infty^{\times n} \times X^{\otimes 2})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}\}$, начальная компонента $\psi_0: (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$ которого совпадает с операцией умножения $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}): (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним сначала, что в работе [4] для любой E_∞ -алгебры X , заданной над произвольным коммутативным кольцом с единицей K , функториальным образом была построена симплициальная коммутативная K -коалгебра $F(X)$, обладающая тем свойством, что соответствующая ей E_∞ -алгебра $N^*(F(X))$ нормализованных коцепей с коэффициентами в кольце K и исходная E_∞ -алгебра X являются A_∞ -гомотопически эквивалентными E_∞ -алгебрами. Так как симплициальная K -коалгебра $F(X)$ коммутативна, то коумножение $\nabla: F(X) \rightarrow F(X)^{\otimes 2}$ этой симплициальной коалгебры является отображением симплициальных K -коалгебр и, следовательно, индуцирует отображение E_∞ -алгебр $N^*(\nabla): N^*(F(X)^{\otimes 2}) \rightarrow$

$N^*(F(X))$. В [8] было показано, что отображение Эйленберга–Зильбера

$$\psi: N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X)^{\otimes 2}),$$

являющееся гомотопической эквивалентностью дифференциальных модулей, можно продолжить до A_∞ -гомотопической эквивалентности E_∞ -алгебр

$$\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_n\}: N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X)^{\otimes 2}), \quad \bar{\psi}_0 = \psi.$$

Из этого следует, что для E_∞ -алгебры $(N^*(F(X)), \mu)$ операция ассоциативного умножения

$$\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1) = N^*(\nabla)\psi: N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X))$$

продолжается до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр

$$\gamma = N^*(\nabla)\bar{\psi} = \{\gamma_n\}: N^*(F(X))^{\otimes 2} \rightarrow N^*(F(X)), \quad \gamma_0 = \cup.$$

Пусть A_∞ -морфизмы E_∞ -алгебр $f = \{f_n\}: X \rightrightarrows N^*(F(X))$: $\{g_n\} = g$ являются взаимнообратными A_∞ -гомотопическими эквивалентностями E_∞ -алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$. Тогда легко видеть, что имеет место соотношение $dt + td = \cup(f_0 \otimes f_0) - f_0 \cup$, где $t = f_1(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1)$, $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1)$ и, следовательно, справедливо соотношение $dh + hd = g_0(\cup(f_0 \otimes f_0)) - \cup$, где $h = g_0 t - s \cup$ и $ds + sd = 1_X - g_0 f_0$. Таким образом, имеется A_∞ -морфизм E_∞ -алгебр

$$\xi = g\gamma(f \otimes f) = \{\xi_n\}: X \otimes X \rightarrow X, \quad \xi_0 = g_0(\cup(f_0 \otimes f_0)),$$

для которого выполнено равенство $dh + hd = \xi_0 - \cup$, т.е. отображения дифференциальных модулей $\xi_0: X^{\otimes 2} \rightarrow X$ и $\cup: X^{\otimes 2} \rightarrow X$ являются гомотопными. Покажем, что в этой ситуации отображение дифференциальных модулей $\cup: X^{\otimes 2} \rightarrow X$ продолжается до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр $\psi = \{\psi_n\}: X^{\otimes 2} \rightarrow X$, $\psi_0 = \cup$, и, кроме того, имеется гомотопия $r = \{r_n\}$, $r_0 = h$, между A_∞ -морфизмами E_∞ -алгебр $\xi = \{\xi_n\}: X^{\otimes 2} \rightarrow X$ и $\psi = \{\psi_n\}: X^{\otimes 2} \rightarrow X$. Определим семейства отображений $\psi = \{\psi_n: (E_\infty^{\times n} \times X^{\otimes 2})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}\}$ и $r = \{r_n: (E_\infty^{\times n} \times X^{\otimes 2})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n+1}\}$, полагая

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \cup, & \psi_1 &= \xi_1 + h\mu - \mu(1 \times h), & \psi_n &= \xi_n, \quad n \geq 2, \\ r_0 &= h, & r_n &= 0, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Проверим, что указанные семейства отображений $\psi = \{\psi_n\}$ и $r = \{r_n\}$ удовлетворяют требуемым в определениях соотношениям. Ясно, что $d(\psi_0) = 0$ и $d(r_0) = \xi_0 - \psi_0$. Если воспользоваться равенством (2), то для отображения ψ_1 получим

$$\begin{aligned} d(\psi_1) &= d(\xi_1 + h\mu - \mu(1 \times h)) \\ &= \mu(1 \times \xi_0) - \xi_0 \mu + (\xi_0 - \psi_0)\mu - \mu(1 \times \xi_0) + \mu(1 \times \psi_0) = \mu(1 \times \psi_0) - \psi_0 \mu. \end{aligned}$$

Так как $r_1 = 0$, $\psi_1 = \xi_1 + h\mu - \mu(1 \times h)$ и $r_0 = h$, имеем

$$d(r_1) = 0 = \xi_1 - \psi_1 + r_0 \mu - \mu(1 \times r_0).$$

Если воспользоваться формулой (3), а также учесть равенства $\partial_0(r_1) = \mu(1 \times r_0)$, $\partial_1(r_1) = r_0 \mu$ и $\mu(1 \times r_1) = 0$, то для отображения $\psi_2 = \xi_2$ получим

$$d(\psi_2) = d(\xi_2 + \mu(1 \times r_1)) = d(\xi_2) + \mu(d(1 \times r_1))$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu(1 \times \xi_1) + \xi_1(\pi \times 1) - \xi_1(1 \times \mu) + \mu(1 \times \xi_1) \\
&\quad - \mu(1 \times \psi_1) + \mu(1 \times r_0\mu) - \mu(1 \times \mu(1 \times r_0)) \\
&= \xi_1(\pi \times 1) - \xi_1(1 \times \mu) - \mu(1 \times \psi_1) + \mu(1 \times r_0)(1 \times \mu) - \mu(\pi \times 1)(1 \times r_0) \\
&= -\mu(1 \times \psi_1) + (\xi_1 + h\mu - \mu(1 \times h))(\pi \times 1) - (\xi_1 + h\mu - \mu(1 \times h))(1 \times \mu) \\
&= -\mu(1 \times \psi_1) + \psi_1(\pi \times 1) - \psi_1(1 \times \mu).
\end{aligned}$$

Проверка остальных соотношений для отображений ψ_n , $n \geq 3$, и для отображений r_n , $n \geq 2$, является тривиальной. Таким образом, семейство $\psi = \{\psi_n\}$ является A_∞ -морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр, и семейство $r = \{r_n\}$ является гомотопией между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр $\xi = \{\xi_n\}$ и $\psi = \{\psi_n\}$. Другими словами, для любой E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над произвольным коммутативным кольцом с единицей K , операция умножения $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1 \otimes 1): X^{\otimes 2} \rightarrow X$ продолжается до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр $\{\psi_n\}: X^{\otimes 2} \rightarrow X$, $\psi_0 = \cup$.

Рассмотрим теперь категорию $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя. Эта категория была введена в работе [1] как подкатегория категории дифференциальных модулей, на гомологиях объектов которой естественным образом действуют операции Стиррода.

Напомним, что $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгеброй Мэя называется пара (X, ϑ) , где X – произвольный дифференциальный модуль над полем $\mathbb{Z}_2$ и $\vartheta: E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2} \rightarrow X$ – отображение дифференциальных модулей, для которого индуцированное отображение $\cup = \vartheta(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}): X^{\otimes 2} \rightarrow X$ является гомотопически ассоциативным умножением на дифференциальном модуле X . Здесь считается, что группа Σ_2 действует на $X^{\otimes 2}$ перестановкой сомножителей в тензорном произведении. Морфизмами $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя $f: (X, \vartheta') \rightarrow (Y, \vartheta'')$ называются отображения дифференциальных модулей $f: X \rightarrow Y$, для которых отображения $\vartheta''(1 \otimes f^{\otimes 2})$ и $f\vartheta'$ являются гомотопными отображениями дифференциальных модулей.

Легко видеть, что каждая E_∞ -алгебра (X, μ) , заданная над полем $\mathbb{Z}_2$, имеет структуру $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ) , где структурное отображение дифференциальных модулей $\vartheta: E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2} \rightarrow X$ определяется как ограничение отображения дифференциальных модулей $\mu: E_\infty \times X \rightarrow X$ на подмодуль $E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2}$ дифференциального модуля $E_\infty \times X$.

Напомним теперь, что *тензорным произведением* $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя (X, ϑ') и (Y, ϑ'') называется $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя $(X \otimes Y, \vartheta)$, структурное отображение $\vartheta: E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} (X \otimes Y)^{\otimes 2} \rightarrow X \otimes Y$ которой определяется равенством

$$\vartheta = (\vartheta' \otimes \vartheta'')(1 \otimes T \otimes 1)(\nabla \otimes U),$$

где $U: (X \otimes Y)^{\otimes 2} \rightarrow X^{\otimes 2} \otimes Y^{\otimes 2}$, $T: E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} X^{\otimes 2} \rightarrow X^{\otimes 2} \otimes_{\Sigma_2} E_\infty(2)$ – очевидные перестановочные отображения и $\nabla: E_\infty(2) \rightarrow E(2) \otimes E_\infty(2)$ – ограничение указанного выше морфизма операд $\nabla: E_\infty \rightarrow E_\infty \otimes E_\infty$ на дифференциальный градуированный Σ_2 -модуль $E_\infty(2)$. В частности, для каждой $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ') определена $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя $(X^{\otimes 2}, \vartheta)$.

Картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя называется произвольная $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) , операция умножения $\cup = \vartheta(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}): X^{\otimes 2} \rightarrow X$ которой является морфизмом $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для произвольной E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над полем $\mathbb{Z}_2$, соответствующая ей $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) является картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 1 для произвольной E_∞ -алгебры (X, μ) был построен A_∞ -морфизм E_∞ -алгебр $\psi = \{\psi_n : (E_\infty^{\times n} \times X^{\otimes 2})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$, начальная компонента $\psi_0 : (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$ которого совпадает с операцией умножения $\cup = \mu(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}) : (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$. Из соотношений в определении A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр получаем, что для компоненты $\psi_1 : (E_\infty \times X^{\otimes 2})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+1}$ имеет место равенство $d\psi_1 + \psi_1 d = \mu(1 \times \cup) - \cup(1 \times \mu)$. Если определить теперь отображение $h : (E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} (X^{\otimes 2} \otimes X^{\otimes 2}))_\bullet \rightarrow X_{\bullet+1}$ как ограничение отображения ψ_1 на подмодуль $E_\infty(2) \otimes_{\Sigma_2} (X^{\otimes 2} \otimes X^{\otimes 2})$ дифференциального градуированного модуля $E_\infty \times X^{\otimes 2}$, то для $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя (X, ϑ) и $(X^{\otimes 2}, \vartheta)$, которые соответствуют E_∞ -алгебрам (X, μ) и $(X^{\otimes 2}, \mu)$, получим равенство $dh + hd = \vartheta(1 \otimes \cup^{\otimes 2}) - \cup \vartheta$. Это равенство означает, что h является гомотопией между отображениями $\vartheta(1 \otimes \cup^{\otimes 2})$ и $\cup \vartheta$ и, следовательно, операция умножения $\cup = \vartheta(\cup_0 \otimes 1_X^{\otimes 2}) : (X^{\otimes 2}, \vartheta) \rightarrow (X, \vartheta)$ является морфизмом $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя. Таким образом, $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) , соответствующая E_∞ -алгебре (X, μ) , является картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя.

Напомним теперь конструкцию операций Стинрода в гомологиях $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя и, в частности, в гомологиях E_∞ -алгебр. Пусть задана произвольная $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя (X, ϑ) , которую будем рассматривать с верхней градуировкой, полагая $X^k = X_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Образующие $\cup_n \in E_\infty(2)_n$, $n \geq 0$, дифференциального $\mathbb{Z}_2[\Sigma_2]$ -модуля $E_\infty(2)$ определяют отображения

$$\cup_n = \vartheta(\cup_n \otimes 1_X^{\otimes 2}) : (X \otimes X)^\bullet \rightarrow X^{\bullet-n}, \quad n \geq 0,$$

связанные между собой соотношениями

$$d(\cup_n) = \cup_{n-1} + (-1)^n \cup_{n-1} T, \quad n \geq 1, \quad d(\cup_0) = 0.$$

Операция гомотопически коммутативного и гомотопически ассоциативного умножения $\cup = \cup_0 : (X \otimes X)^\bullet \rightarrow X^\bullet$ индуцирует на гомологическом модуле $H(X)$ коммутативное и ассоциативное умножение $\cup : H(X) \otimes H(X) \rightarrow H(X)$. Кроме этого умножения указанные выше отображения $\cup_n$, $n \geq 0$, определяют естественные по аргументу X отображения $\mathbb{Z}_2$ -модулей

$$\mathrm{Sq}^n : H^\bullet(X) \rightarrow H^{\bullet+n}(X), \quad n \geq 0, \quad \mathrm{Sq}^n\{x\} = \{x \cup_{q-n} x\},$$

где $x \in X^q$ и через $\{x\}$, $\{x \cup_{q-n} x\}$ обозначены соответствующие классы гомологий циклов x и $x \cup_{q-n} x$. Отображения $\mathbb{Z}_2$ -модулей Sq^n , $n \geq 0$, называются *операциями Стинрода* в гомологиях $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ) . Операциями Стинрода в гомологиях E_∞ -алгебры (X, μ) называются операции Стинрода в гомологиях $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя (X, ϑ) , которая соответствует E_∞ -алгебре (X, μ) . В [1] было показано, что если $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебра Мэя X является картановским объектом категории $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебр Мэя, то для операций Стинрода $\mathrm{Sq}^n : H^\bullet(X) \rightarrow H^{\bullet+n}(X)$ в гомологиях $H^\bullet(X)$ этой $(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2)$ -алгебры Мэя справедлива формула Картана. Из этого, применяя следствие 1, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для операций Стинрода $Sq^n: H^\bullet(X) \rightarrow H^{\bullet+n}(X)$ в гомологиях $H^\bullet(X)$ любой E_∞ -алгебры (X, μ) , заданной над полем $\mathbb{Z}_2$, справедлива формула Кармана

$$Sq^n(x \cup y) = \sum_{i+j=n} Sq^i(x) \cup Sq^j(y), \quad x, y \in H^\bullet(X).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. P. May, “A general algebraic approach of Steenrod operations”, *The Steenrod Algebra and Its Applications*, Proceedings of the Conference held at the Battelle Memorial Institute (Columbus, Ohio March 30th–April 4th, 1970), Lect. Notes in Math., **168**, Springer-Verlag, Berlin, 1970, 153–231.
- [2] В. А. Смирнов, “О коцепном комплексе топологических пространств”, *Матем. сб.*, **115**:1 (1981), 146–158.
- [3] D. Chataur, M. Livernet, *Operadic Description of Steenrod Operations*, arXiv: math.AT/0209363v2.
- [4] В. А. Смирнов, “Гомотопическая теория коалгебр”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:6 (1985), 1302–1321.
- [5] В. А. Смирнов, “Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 80–96.
- [6] В. А. Смирнов, “Гомотопические теории алгебр над операдами”, *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 278–285.
- [7] J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand Math. Stud., **11**, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.
- [8] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расслоений”, *Матем. сб.*, **198**:10 (2007), 3–30.

С. В. Лапин

Мордовский государственный педагогический институт
им. М. Е. Евсевьева
E-mail: slapin@mail.ru

Поступило

11.10.2009

Исправленный вариант

09.06.2010