Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. З. Аров, Н. А. Рожено, О связи между представлениями по Дарлингтону матриц-функций класса Каратеодори и их $J_{p,r}$ -внутренними SI-дилатациями, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 821–832

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:14:00

О связи между представлениями по Дарлингтону матриц-функций класса Каратеодори и их $J_{p,r}$ -внутренними SI-дилатациями

Д. З. Аров, Н. А. Роженко

Работа посвящена установлению двусторонней связи между представлениями по Дарлингтону матриц-функций класса Каратеодори $\mathcal{C}^{p \times p}$ и их $J_{p,r}$ -внутренними SI-дилатациями.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается задача, относящаяся к классу Каратеодори $\mathcal{C}^{p \times p}$ аналитических в открытом единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ матриц-функций $c(z)$ порядка p с $\operatorname{Re} c(z) \geq 0$ в $\mathbb{D}$. В [1]–[3] первым автором были получены результаты о представлениях по Дарлингтону (см. [4]) матриц-функций $c \in \mathcal{C}^{p \times p}$ в виде

$$c(z) = T_{A(z)}[\tau] = [a_{11}(z)\tau + a_{12}(z)][a_{21}(z)\tau + a_{22}(z)]^{-1}, \quad (1.1)$$

где τ – постоянная матрица порядка p с $\operatorname{Re} \tau \geq 0$, а матрица-функция коэффициентов

$$A(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix}$$

с блоками $a_{ij}(z)$ порядка p является J_p -внутренней в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ относительно сигнатурной матрицы

$$J_p = \begin{bmatrix} 0 & -I_p \\ -I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Напомним, что мероморфная в круге $\mathbb{D}$ матрица-функция $U(z)$ порядка m называется J -внутренней относительно сигнатурной матрицы J порядка m ($J^* = J^{-1} = J$), если на множестве Λ_U^+ точек аналитичности в $\mathbb{D}$ она принимает J -сжимающие значения, т.е.

$$U(z)^* J U(z) \leq J, \quad z \in \Lambda_U^+,$$

и имеет J -унитарные некасательные граничные значения $U(\zeta)$ почти при всех ζ на единичной окружности, т.е.

$$U(\zeta)^* J U(\zeta) = J \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1. \quad (1.2)$$

Класс J -внутренних матриц-функций будем обозначать через $U(J)$.

Если матрица-функция $c(z)$ допускает представление по Дарлингтону (1.1), то $c(z)$ принадлежит классу $\mathcal{C}^{p \times p}$, поскольку

$$\operatorname{Re} c(z) \geq [a_{21}(z)\tau + a_{22}(z)]^{-1*} \operatorname{Re} \tau [a_{21}(z)\tau + a_{22}(z)]^{-1}.$$

Более того, в этом случае $c(z)$ имеет мероморфное псевдопродолжение $c_-(z)$ во внешность $\mathbb{D}_e$ круга $\mathbb{D}$ с ограниченной неванлинновской характеристикой в $\mathbb{D}_e$. Это значит, что $c_-(z) = h(z)^{-1}g(z)$, где $g(z)$ – аналитическая и ограниченная в $\mathbb{D}_e$ матрица-функция порядка p , $h(z)$ – скалярная аналитическая ограниченная в $\mathbb{D}_e$ функция и

$$\lim_{r \uparrow 1} c(r\zeta) = \lim_{r \downarrow 1} c_-(r\zeta) \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1.$$

Существование псевдопродолжения для $c(z)$ вытекает из того, что произвольная матрица-функция $U(z)$ класса $U(J)$ имеет мероморфное псевдопродолжение $U_-(z)$ в $\mathbb{D}_e$ с ограниченной неванлинновской характеристикой, определяемое по принципу симметрии

$$U_-(z) = JU^\sharp(z)^{-1}J, \quad z \in \Lambda_U^-,$$

где $\Lambda_U^- = \{z \in \mathbb{D}_e : \det U(1/\bar{z}) \neq 0\}$ и $U^\sharp(z) = U(1/\bar{z})^*$. Это следует из равенства (1.2) и того факта, что мероморфная J -сжимающая в $\mathbb{D}$ матрица-функция имеет ограниченную неванлинновскую характеристику в $\mathbb{D}$.

Класс матриц-функций $c(z)$ из $\mathcal{C}^{p \times p}$, имеющих мероморфное псевдопродолжение, обозначается $\mathcal{C}^{p \times p}\Pi$. В дальнейшем матрицы-функции $U \in U(J)$ и $c \in \mathcal{C}^{p \times p}\Pi$ рассматриваются не только в $\mathbb{D}$, но и в $\mathbb{D}_e$ и п.в. на единичной окружности с учетом псевдопродолжения, так что

$$U(z) = U_-(z), \quad c(z) = c_-(z)$$

в точках аналитичности U_- и c_- в $\mathbb{D}_e$ соответственно.

Если $c \in \mathcal{C}^{p \times p}\Pi$, то ранг матрицы-функции $\operatorname{Re} c(\zeta)$ постоянен п.в. при $|\zeta| = 1$, поскольку $2 \operatorname{Re} c(\zeta)$ является некасательным граничным значением матрицы-функции $c(z) + c_-(1/\bar{z})$ с ограниченной неванлинновской характеристикой в $\mathbb{D}$. Если

$$r = \operatorname{rank} \operatorname{Re} c(\zeta) \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1,$$

то у матрицы-функции $\operatorname{Re} c(\zeta)$ существует главный минор порядка r , отличный от нуля п.в. на окружности $|\zeta| = 1$. При этом любой минор порядка больше r тождественно равен нулю.

Далеко не тривиальным оказался обратный результат, состоящий в том, что каждая матрица-функция $c(z)$ класса $\mathcal{C}^{p \times p}\Pi$ допускает представление по Дарлингтону (1.1). Более того, первым автором в [3] было показано, что в представлении по Дарлингтону (1.1) матрица коэффициентов $A(z)$ из $U(J_p)$ всегда может быть выбрана таким образом, что

$$\tau = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{p-r} \end{bmatrix}, \quad \text{где } r = \operatorname{rank} \operatorname{Re} c(\zeta) \text{ п.в. при } |\zeta| = 1,$$

а также в случае, когда $r = p$, было дано описание всех матриц-функций $A(z) \in U(J_p)$ в (1.1) для данной матрицы-функции $c(z)$. Здесь и далее символом 0_k обозначается нулевая матрица порядка k .

В работах [5]–[7] авторами изучались другие представления матриц-функций $c(z)$ класса $\mathcal{C}^{p \times p}\Pi$ в виде (2×2) -блока некоторой $J_{p,r}$ -внутренней матрицы-функции $\theta(z)$ специальной блочной структуры

$$\theta(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & \delta(z) & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta(z) = c(z), \quad (1.3)$$

где

$$J_{p,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \\ 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad r = \text{rank Re } c(\zeta) \text{ п.в. при } |\zeta| = 1.$$

Аналогичные представления сжимающих матриц-функций в виде блока двусторонне внутренней функции были изучены как в более ранних работах первого автора, так и независимо в работах [8], [9]. Представления (1.3) были названы авторами $J_{p,r}$ -внутренними SI (scattering-impedance)-дилатациями матрицы-функции $c(z)$. В работе [5] также было дано описание всех таких дилатаций θ . Далее будем называть матрицу-функцию

$$\begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix}$$

информативной частью $J_{p,r}$ -внутренней SI-дилатации $\theta(z)$ вида (1.3).

Данная работа посвящена установлению двусторонней связи между представлениями по Дарлингтону (1.1) матриц-функций $c(z)$ класса $\mathcal{C}^{p \times p}\Pi$ и их $J_{p,r}$ -внутренними SI-дилатациями $\theta(z)$ вида (1.3).

Ниже будут рассматриваться сигнатурные матрицы

$$J_p = \begin{bmatrix} 0 & -I_p \\ -I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad j_p = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad J_{p,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \\ 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Под классом $S_{in}^{p \times p}$ далее будем понимать класс двусторонне внутренних матриц-функций $s(z)$ порядка p , т.е. аналитических в $\mathbb{D}$ и обладающих следующими свойствами:

$$\begin{aligned} s(z)^* s(z) &\leq I_p && \text{при } z \in \mathbb{D}, \\ s(\zeta)^* s(\zeta) &= I_p && \text{п.в. при } |\zeta| = 1. \end{aligned}$$

Обозначим через $U(j_p, J_p)$ класс матриц-функций $B(z)$ порядка $2p$, мероморфных в $\mathbb{D}$ и таких, что

$$B(z)^* J_p B(z) \leq j_p \quad \text{при } z \in \Lambda_f^+, \quad (1.4)$$

$$B(\zeta)^* J_p B(\zeta) = j_p \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1. \quad (1.5)$$

2. Случай полного ранга $r = p$. Пусть $A \in U(J_p)$. Определим постоянную матрицу V по формуле

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -I_p & I_p \\ I_p & I_p \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Это сигнатурная матрица, устанавливающая связь между матрицами J_p и j_p :

$$J_p = V^* j_p V.$$

Рассмотрим матрицу-функцию

$$B(z) = \begin{bmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{bmatrix} = A(z)V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -a_{11}(z) + a_{12}(z) & a_{11}(z) + a_{12}(z) \\ -a_{21}(z) + a_{22}(z) & a_{21}(z) + a_{22}(z) \end{bmatrix}.$$

Справедливо следующее предложение (см. § 4.7 в [10]).

ЛЕММА. *Имеет место эквивалентность*

$$A \in U(J_p) \iff B \in U(j_p, J_p).$$

Если $A \in U(J_p)$, то

- (1) $\det b_{22}(z) \neq 0$;
- (2) $b_{22}^{-1}b_{21} \in S_{in}^{p \times p}$;
- (3) $b_{12}b_{22}^{-1} \in \mathcal{C}^{p \times p}$;
- (4) $b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21} = -(b_{21}^\#)^{-1}$;
- (5) $T_{A(z)}[\tau] = T_{B(z)}[\varepsilon]$, где $\varepsilon = T_V[\tau]$.

Пусть $c \in \mathcal{C}^{p \times p}\Pi$ и $\operatorname{Re} c(\zeta) > 0$ п.в. при $|\zeta| = 1$, т.е. $r = p$. Тогда в дробно-линейном представлении по Дарлингтону (1.1) можно выбрать матрицу коэффициентов $A \in U(J_p)$ так, чтобы $\tau = I_p$. Согласно лемме соответствующая матрица-функция $B(z)$ является мероморфной в $\mathbb{D}$ и удовлетворяет соотношениям (1.4) и (1.5). Рассмотрим матрицы

$$P = \frac{1}{2}(I_{2p} + j_p) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}(I_p - j_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

и преобразование Потанова-Гинзбурга матрицы-функции $B(z)$, определяемое по формуле

$$\begin{aligned} R(z) &= \operatorname{PG}[B(z)] = [Q + PB(z)][P + QB(z)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}(z) - b_{12}(z)b_{22}(z)^{-1}b_{21}(z) & b_{12}(z)b_{22}(z)^{-1} \\ -b_{22}(z)^{-1}b_{21}(z) & b_{22}(z)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}(z) & r_{12}(z) \\ r_{21}(z) & r_{22}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем иметь

$$c(z) = T_{B(z)}[0_p] = b_{12}(z)b_{22}(z)^{-1} = r_{12}(z).$$

Поскольку

$$B(z) = \operatorname{PG}[R(z)] = [Q + PR(z)][P + QR(z)]^{-1},$$

то свойства (1.4) и (1.5) матрицы-функции $B(z)$ эквивалентны следующим соотношениям для матрицы-функции $R(z)$:

$$\begin{aligned} (Q + R(z)^*P)J_p(Q + PR(z)) &\leq (P + R(z)^*Q)j_p(P + QR(z)), & z \in \Lambda_R^+, & (2.3) \\ (Q + R(\zeta)^*P)J_p(Q + PR(\zeta)) &= (P + R(\zeta)^*Q)j_p(P + QR(\zeta)) & \text{п.в. при } |\zeta| = 1 & (2.4) \end{aligned}$$

соответственно. Пусть

$$\theta_0(z) = -J_p R(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix}.$$

Тогда условия (2.3) и (2.4) равносильны соответствующим свойствам матрицы-функции $\theta_0(z)$:

$$\begin{aligned} [Pj_pP - Qj_pQ] - \theta_0(z)^*[J_pQj_pP - J_pPJ_pQ] - [Pj_pQj_p - Qj_pPJ_p]\theta_0(z) \\ + \theta_0(z)^*[J_pQj_pQj_p - J_pPJ_pPJ_p]\theta_0(z) \geq 0, \quad z \in \Lambda_R^+, \\ [Pj_pP - Qj_pQ] - \theta_0(\zeta)^*[J_pQj_pP - J_pPJ_pQ] - [Pj_pQj_p - Qj_pPJ_p]\theta_0(\zeta) \\ + \theta_0(\zeta)^*[J_pQj_pQj_p - J_pPJ_pPJ_p]\theta_0(\zeta) = 0, \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} Pj_pP - Qj_pQ &= \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P, & J_pQj_pP - J_pPJ_pQ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = -Q, \\ Pj_pQj_p - Qj_pPJ_p &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = -Q, & J_pQj_pQj_p - J_pPJ_pPJ_p &= -\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -P, \end{aligned}$$

получаем, что условия (1.4) и (1.5) соответственно эквивалентны следующим соотношениям для матрицы-функции θ_0 :

$$\begin{aligned} P + \theta_0(z)^*Q + Q\theta_0(z) - \theta_0(z)^*P\theta_0(z) &\geq 0, \quad z \in \Lambda_{\theta_0}^+, \\ P + \theta_0(\zeta)^*Q + Q\theta_0(\zeta) - \theta_0(\zeta)^*P\theta_0(\zeta) &= 0 \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} I_p - \alpha(z)^*\alpha(z) & \gamma(z)^* - \alpha(z)^*\beta(z) \\ \gamma(z) - \beta(z)^*\alpha(z) & \delta(z)^* + \delta(z) - \beta(z)^*\beta(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \Lambda_{\theta_0}^+, \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} I_p - \alpha(\zeta)^*\alpha(\zeta) & \gamma(\zeta)^* - \alpha(\zeta)^*\beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) - \beta(\zeta)^*\alpha(\zeta) & \delta(\zeta)^* + \delta(\zeta) - \beta(\zeta)^*\beta(\zeta) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{п.в. } |\zeta| = 1. \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь матрицу-функцию $\theta(z)$, равную

$$\theta(z) := \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & \delta(z) & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\theta(z)$ мероморфна в $\mathbb{D}$ и

$$J_{p,p} - \theta^*J_{p,p}\theta = \begin{bmatrix} I_p - \alpha^*\alpha & \gamma^* - \alpha^*\beta & 0 \\ \gamma - \beta^*\alpha & \delta^* + \delta - \beta^*\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то условия (2.5) и (2.6) означают, что $\theta \in U(J_{p,p})$ и $\theta(z)$ является $J_{p,p}$ -внутренней SI-дилатацией $c(z)$.

Приведенные рассуждения можно провести и в обратном направлении. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $c \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$. Тогда если $c = T_A[I_p]$, $A \in U(J_p)$, – дробно-линейное представление $c(z)$ по Дарлингтону, то формулой

$$\theta_0(z) = -J_p \text{PG}[A(z)V] = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix}$$

определяется информативная часть $J_{p,p}$ -внутренней SI-дилатации $\theta(z)$ функции $c(z)$. Обратно, если $\theta(z)$ – $J_{p,p}$ -внутренняя SI-дилатация функции $c(z)$, а θ_0 – ее информативная часть, то формулой

$$A(z) = \text{PG}[-J_p \theta_0(z)]V$$

определяется J_p -внутренняя функция $A(z)$ такая, что $c = T_A[I_p]$ – дарлингтоновское представление $c(z)$.

3. Вырожденный случай $0 < r < p$. Пусть теперь $c \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$ и

$$r = \text{rank Re } c(\zeta) \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1, \quad 0 < r < p.$$

Если $\theta(z)$ – произвольная $J_{p,r}$ -внутренняя SI-дилатация матрицы-функции $c(z)$, то ее блоки β и γ принадлежат классам Харди $H_2^{r \times p}$ и $H_2^{p \times r}$ размеров $r \times p$ и $p \times r$ соответственно и удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} \beta(z)^* \beta(z) &\leq 2 \text{Re } c(z), \quad \gamma(z) \gamma(z)^* \leq 2 \text{Re } c(z), \quad z \in \mathbb{D} \\ \beta(\zeta)^* \beta(\zeta) &= 2 \text{Re } c(\zeta), \quad \gamma(\zeta) \gamma(\zeta)^* = 2 \text{Re } c(\zeta) \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1, \end{aligned}$$

см. [5; § 4].

Поскольку $c \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$ и $r > 0$, то, как уже было отмечено ранее, у матрицы-функции $\text{Re } c(\zeta)$ существует главный минор порядка r , отличный от нуля п.в. на окружности $|\zeta| = 1$. При этом любой минор порядка больше r тождественно равен нулю. Предположим сначала, что такой главный минор порядка r расположен в верхнем левом углу этой матрицы-функции.

Пусть

$$\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & c & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

– $J_{p,r}$ -внутренняя SI-дилатация матрицы-функции c . В рассматриваемом случае блоки β и γ матрицы-функции θ будут иметь вид

$$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2], \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

где β_1 и γ_1 – матрицы-функции порядка r , у которых $\det \beta_1 \not\equiv 0$ и $\det \gamma_1 \not\equiv 0$.

Введем в рассмотрение матрицу-функцию $c_\varepsilon = c + 2\varepsilon$, где

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0_p & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

и положим

$$\alpha_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -I_{p-r} \end{bmatrix}, \quad \beta_\varepsilon = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 2I_{p-r} \end{bmatrix}, \quad \gamma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & -2I_{p-r} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Нетрудно убедиться, используя, например, метод дополнений Шура (см., например, [10; с. 23, 198]), что $\text{rank Re } c_\varepsilon(\zeta) = p$ п.в. при $|\zeta| = 1$, а также что $c_\varepsilon \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$. Непосредственная проверка показывает, что

$$\theta_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_\varepsilon & \beta_\varepsilon & 0 \\ \gamma_\varepsilon & c_\varepsilon & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

с блоками α_ε , β_ε и γ_ε , определенными в (3.3), является $J_{p,p}$ -внутренней SI-дилатацией матрицы-функции c_ε . Более того, матрица-функция c_ε удовлетворяет условию теоремы 1. Поэтому если

$$\theta_\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \alpha_\varepsilon & \beta_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon & c_\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

то матрица функция

$$B = \text{PG}[-J_p \theta_\varepsilon^0] = \begin{bmatrix} \gamma_\varepsilon - c_\varepsilon \beta_\varepsilon^{-1} \alpha_\varepsilon & c_\varepsilon \beta_\varepsilon^{-1} \\ -\beta_\varepsilon^{-1} \alpha_\varepsilon & \beta_\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

является (j_p, J_p) -внутренней, и справедливо следующее дробно-линейное представление:

$$c_\varepsilon(z) = T_{B(z)}[0_p] = b_{12}(z)b_{22}(z)^{-1}.$$

Матрицы ε , α_ε , β_ε , γ_ε и c_ε определены так, что

$$\begin{aligned} & c(\zeta)[b_{21}(\zeta)\varepsilon + b_{22}(\zeta)] - [b_{11}(\zeta)\varepsilon + b_{12}(\zeta)] \\ &= c(\zeta)[- \beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} \alpha_\varepsilon(\zeta)\varepsilon + \beta_\varepsilon(\zeta)^{-1}] - [\gamma_\varepsilon(\zeta)\varepsilon - c_\varepsilon(\zeta)\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} \alpha_\varepsilon(\zeta)\varepsilon + c_\varepsilon(\zeta)\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1}] \\ &= -c(\zeta)\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} \alpha_\varepsilon(\zeta)\varepsilon + c(\zeta)\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} - \gamma_\varepsilon(\zeta)\varepsilon + c(\zeta)\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} \alpha_\varepsilon(\zeta)\varepsilon \\ &\quad + 2\varepsilon\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} \alpha_\varepsilon(\zeta)\varepsilon - c(\zeta)\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} - 2\varepsilon\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} \\ &= -\gamma_\varepsilon(\zeta)\varepsilon + 2\varepsilon\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} \alpha_\varepsilon(\zeta)\varepsilon - 2\varepsilon\beta_\varepsilon(\zeta)^{-1} = 2\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

п.в. при $|\zeta| = 1$. Следовательно, для матрицы-функции $c(z)$ имеет место равенство

$$c(z) = [b_{11}(z)\varepsilon + b_{12}(z)][b_{21}(z)\varepsilon + b_{22}(z)]^{-1} = T_{B(z)}[\varepsilon].$$

Умножая справа полученную матрицу-функцию $B(z)$ на матрицу V , определенную формулой (2.1), получаем J_p -внутреннюю матрицу коэффициентов $A(z) = B(z)V$ дробно-линейного представления по Дарлингтону (1.1) матрицы-функции $c(z)$ с матрицей τ вида

$$\tau = T_V[\varepsilon] = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{p-r} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В общей ситуации к случаю, когда главный минор порядка r матрицы-функции $\text{Re } c(\zeta)$, отличный от нуля п.в., будет расположен в ее верхнем левом углу, всегда можно прийти с помощью перестановки строк этой матрицы-функции и такой же перестановки ее столбцов. В результате такой перестановки мы получим матрицу-функцию $g(\zeta) = L \text{Re } c(\zeta) L^*$, которая определяется уже по $\tilde{c} = LcL^*$, так что $g(\zeta) = \text{Re } \tilde{c}(\zeta)$, где L – постоянная ортогональная матрица. При этом $J_{p,r}$ -внутреннюю SI-дилатацию $\theta(\zeta)$ матрицы-функции $c(z)$ можно получить из SI-дилатации $\tilde{\theta}(z)$ матрицы-функции $\tilde{c}(z)$ умножением $\tilde{\theta}(z)$ справа и слева на $J_{p,r}$ -унитарные матрицы

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & L^* & 0 \\ 0 & 0 & L^* \end{bmatrix}$$

соответственно.

Далее, применяя к матрице-функции $\tilde{c}(z) = Lc(z)L^*$ приведенные выше преобразования, можно получить J_p -внутреннюю матрицу коэффициентов $\tilde{A}(z)$ ее дробно-

линейного представления по Дарлингтону. Тогда для исходной матрицы-функции $c(z)$ справедливо дробно-линейное представление

$$c(z) = T_{A(z)}[\tau], \quad \text{где} \quad A(z) = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \tilde{A}(z), \quad \tau = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{p-r} \end{bmatrix}.$$

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее предложение, устанавливающее связь между представлениями (1.1) матриц-функций $c \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$ и их $J_{p,r}$ -внутренними SI-дилатациями (1.3) в вырожденном случае.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $c \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$ с $0 < r < p$ и $\tilde{c} = LcL^*$, где L – постоянная ортогональная матрица такая, что главный минор порядка r матрицы-функции $\text{Re} \tilde{c}(\zeta)$, отличный от нуля п.в., расположен в ее верхнем левом углу. Пусть, кроме того, $\tilde{c}_\varepsilon = \tilde{c} + 2\varepsilon$, где ε – постоянная матрица вида (3.2), и

$$A(z) = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \text{PG}[-J_p \theta_\varepsilon^0(z)]V,$$

где постоянная матрица V определяется формулой (2.1) и $\theta_\varepsilon^0(z)$ – $J_{p,r}$ -внутренняя SI-дилатация матрицы-функции $\tilde{c}$, определяемая по формулам (3.3), (3.4). Тогда матрица-функция $A(z)$ является J_p -внутренней матрицей коэффициентов дарлингтоновского представления $c = T_A[\tau]$ с постоянной матрицей τ вида (3.5).

Обратная связь между рассматриваемыми представлениями в вырожденном случае устанавливается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $c \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$ с $0 < r < p$ и $c(z) = T_{A(z)}[\tau]$ – ее представление по Дарлингтону с матрицей-функцией коэффициентов $A \in U(J_p)$ и постоянной матрицей τ вида (3.5). Пусть также ε и V определяются формулами (3.2) и (2.1) соответственно и $B(z) = A(z)V$. Тогда с помощью блоков матрицы-функции $B(z)$ по формулам

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= -\tau(b_{21}\varepsilon + b_{22})^{-1}b_{21}\tau, \\ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} &= \tau(b_{21}\varepsilon + b_{22})^{-1}, \\ \begin{bmatrix} \gamma & 0 \end{bmatrix} &= (b_{11}b_{21}^{-1}b_{22} - b_{12})(b_{21}\varepsilon + b_{22})^{-1}b_{21}\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

определяются блоки α , β и γ соответствующей $J_{p,r}$ -внутренней SI-дилатации θ матрицы-функции $c(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \in \mathcal{C}^{p \times p} \Pi$ с $0 < r < p$, и $c(z) = T_{A(z)}[\tau]$ – ее представление по Дарлингтону с матрицей-функцией коэффициентов $A \in U(J_p)$ и постоянной матрицей τ вида (3.5). Пусть также ε определяется формулой (3.2),

$$B(z) = A(z)V = \begin{bmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z) \end{bmatrix},$$

где V – постоянная матрица, определенная в (2.1), и

$$R(z) = \text{PG}[B(z)] = \begin{bmatrix} r_{11}(z) & r_{12}(z) \\ r_{21}(z) & r_{22}(z) \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае будет справедливо равенство

$$c(z) = T_{A(z)}[\tau] = T_{B(z)}[\varepsilon] = r_{12}(z) + r_{11}(z)\varepsilon(I_p - r_{21}(z)\varepsilon)^{-1}r_{22}(z). \quad (3.7)$$

Обозначим $\tilde{c}(z) = r_{12}(z)$. Согласно лемме и представлению (2.2)

$$\tilde{c} = b_{12}b_{22}^{-1} \in \mathcal{C}^{p \times p}\Pi, \quad \text{rank Re } \tilde{c}(\zeta) = p \quad \text{п.в.} \quad |\zeta| = 1.$$

По теореме 1 матрица-функция

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & 0 \\ \tilde{\gamma} & \tilde{c} & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

с блоками

$$\tilde{\alpha} = r_{21} = -b_{22}^{-1}b_{21} \in S_{in}^{p \times p}, \quad (3.8)$$

$$\tilde{\beta} = r_{22} = b_{22}^{-1} \in H_2^{p \times p}, \quad \tilde{\gamma} = r_{11} = b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21} \in H_2^{p \times p} \quad (3.9)$$

является $J_{p,p}$ -внутренней SI-дилатацией матрицы-функции $\tilde{c}$. В терминах блоков функции $\tilde{\theta}$ равенство (3.7) переписывается следующим образом:

$$c(z) = \tilde{c}(z) + \tilde{\gamma}(z)\varepsilon(I_p - \tilde{\alpha}(z)\varepsilon)^{-1}\tilde{\beta}(z). \quad (3.10)$$

Пусть

$$\alpha_0 = \tau(I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon)^{-1}\tilde{\alpha}\tau, \quad \beta_0 = \tau(I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon)^{-1}\tilde{\beta}, \quad \gamma_0 = \tilde{\gamma}(I_p - \varepsilon\tilde{\alpha})^{-1}\tau, \quad (3.11)$$

где τ и ε определяются по формулам (3.5) и (3.2) соответственно. Представим матрицы-функции $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ в виде

$$\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\alpha}_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} & \tilde{\alpha}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{11} & \tilde{\beta}_{12} \\ \tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{11} & \tilde{\gamma}_{12} \\ \tilde{\gamma}_{21} & \tilde{\gamma}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

где у каждой матрицы-функции $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ (1×1) - и (2×2) -блоки являются квадратными матрицами порядков r и $p - r$ соответственно. Поскольку матрица-функция

$$I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon = \begin{bmatrix} I_r & -\tilde{\alpha}_{12} \\ 0 & I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22} \end{bmatrix}$$

является обратимой, то обратима также и матрица-функция $I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}$. Тогда

$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{11} + \tilde{\alpha}_{12}(I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22})^{-1}\tilde{\alpha}_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\beta_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{11} + \tilde{\alpha}_{12}(I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22})^{-1}\tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{12} + \tilde{\alpha}_{12}(I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22})^{-1}\tilde{\beta}_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{11} + \tilde{\gamma}_{12}(I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22})^{-1}\tilde{\alpha}_{21} & 0 \\ \tilde{\gamma}_{21} + \tilde{\gamma}_{22}(I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22})^{-1}\tilde{\alpha}_{21} & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \gamma & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Покажем, что матрица-функция

$$\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & c & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

является $J_{p,r}$ -внутренней SI-дилатацией исходной матрицы-функции $c(z)$. Проверим сначала, что

$$\theta(\zeta)^* J_{p,r} \theta(\zeta) = J_{p,r} \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1.$$

Из блочной записи этого условия сразу следует, что для его выполнения достаточно показать, что п.в. при $|\zeta| = 1$ имеют место равенства

$$\alpha(\zeta)^* \alpha(\zeta) = I_r, \quad \alpha(\zeta)^* \beta(\zeta) = \gamma(\zeta)^*, \quad \beta(\zeta)^* \beta(\zeta) = 2 \operatorname{Re} c(\zeta). \quad (3.16)$$

Поскольку $\tilde{\alpha}$ является двусторонне-внутренней матрицей-функцией, ее блоки п.в. при $|\zeta| = 1$ удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{11}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{11}(\zeta) + \tilde{\alpha}_{21}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{21}(\zeta) &= I_r, \\ \tilde{\alpha}_{11}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{12}(\zeta) &= -\tilde{\alpha}_{21}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{22}(\zeta), \\ \tilde{\alpha}_{12}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{12}(\zeta) + \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{22}(\zeta) &= I_r. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Учитывая соотношения (3.17), п.в. при $|\zeta| = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta)^* \alpha(\zeta) &= (\tilde{\alpha}_{11}(\zeta)^* + \tilde{\alpha}_{21}(\zeta)^* (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)^*)^{-1} \tilde{\alpha}_{12}(\zeta)^*) \\ &\quad \times (\tilde{\alpha}_{11}(\zeta) + \tilde{\alpha}_{12}(\zeta) (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta))^{-1} \tilde{\alpha}_{21}(\zeta)) \\ &= \tilde{\alpha}_{11}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{11}(\zeta) \\ &\quad + \tilde{\alpha}_{21}(\zeta)^* (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)^*)^{-1} \\ &\quad \times [\tilde{\alpha}_{12}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{12}(\zeta) - (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)^*) \tilde{\alpha}_{22}(\zeta) - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)^* (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta))] \\ &\quad \times (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta))^{-1} \tilde{\alpha}_{21}(\zeta) \\ &= \tilde{\alpha}_{11}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{11}(\zeta) \\ &\quad + \tilde{\alpha}_{21}(\zeta)^* (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)^*)^{-1} (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)^*) \\ &\quad \times (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta)) (I_{p-r} - \tilde{\alpha}_{22}(\zeta))^{-1} \tilde{\alpha}_{21}(\zeta) \\ &= \tilde{\alpha}_{11}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{11}(\zeta) + \tilde{\alpha}_{21}(\zeta)^* \tilde{\alpha}_{21}(\zeta) = I_r. \end{aligned}$$

Таким образом, первое равенство в (3.16) доказано.

Аналогичным образом, используя (3.13), (3.14), (3.15) и равенство $\tilde{\alpha}(\zeta)^* \tilde{\beta}(\zeta) = \tilde{\gamma}(\zeta)^*$ п.в. при $|\zeta| = 1$, проверяется второе равенство в (3.16).

Из (3.10) вытекает, что

$$2 \operatorname{Re} c(\zeta) = \tilde{\beta}(\zeta)^* (I_p - \varepsilon \tilde{\alpha}(\zeta)^*)^{-1} \tau (I_p - \tilde{\alpha}(\zeta) \varepsilon)^{-1} \tilde{\beta}(\zeta) \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1.$$

Поэтому матрица-функция $\beta_0 = \tau (I_p - \tilde{\alpha} \varepsilon)^{-1} \tilde{\beta}$ является решением факторизационного уравнения

$$\beta_0(\zeta)^* \beta_0(\zeta) = 2 \operatorname{Re} c(\zeta) \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1,$$

что в силу (3.14) равносильно тому, что

$$\beta(\zeta)^* \beta(\zeta) = 2 \operatorname{Re} c(\zeta) \quad \text{п.в. при } |\zeta| = 1.$$

Таким образом, равенства (3.16) имеют место. Остается показать, что θ является $J_{p,r}$ -сжимающей функцией в круге $\mathbb{D}$. Для этого достаточно проверить, что матрицы-функции

$$\begin{aligned} & \alpha_0 - \frac{1}{2} \beta_0 \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} \gamma_0, \quad \beta_0 \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1}, \\ & - \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} \gamma_0, \quad \left(I_p - \frac{1}{2} c \right) \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} \end{aligned}$$

принадлежат классам Смирнова соответствующих размеров (см. [11], [5; п. 2.2, 3.2]).

Из (3.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \frac{1}{2} \beta_0 \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} \gamma_0 &= \tau(I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon)^{-1} \tilde{\alpha} \tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \tau(I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon)^{-1} \tilde{\beta} \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} \tilde{\gamma} (I_p - \varepsilon \tilde{\alpha})^{-1} \tau, \\ \beta_0 \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} &= \tau(I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon)^{-1} \tilde{\beta} \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1}, \\ - \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} \gamma_0 &= - \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} \tilde{\gamma} (I_p - \varepsilon \tilde{\alpha})^{-1} \tau. \end{aligned}$$

Матрица-функция

$$s = \left(I_p - \frac{1}{2} c \right) \left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1}$$

является сжимающей в круге $\mathbb{D}$, так как $(1/2)c \in \mathcal{C}^{p \times p}$; матрица-функция

$$\left(I_p + \frac{1}{2} c \right)^{-1} = \frac{1}{2} (I_p + s)$$

принадлежит классу $H_\infty^{p \times p}$. Далее, пусть

$$\sigma = (I_p + \tilde{\alpha}\varepsilon)(I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon)^{-1}.$$

Тогда, поскольку

$$\operatorname{Re} \sigma = (I_p - \varepsilon \tilde{\alpha}^*)^{-1} [I_p - \varepsilon \tilde{\alpha}^* \tilde{\alpha} \varepsilon] (I_p - \tilde{\alpha} \varepsilon)^{-1},$$

матрица-функция σ принадлежит классу $\mathcal{C}^{p \times p}$. Следовательно,

$$(I_p - \tilde{\alpha}\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{2} (I_p + \sigma) \in \mathcal{C}^{p \times p}.$$

Аналогичным образом можно показать, что $(I_p - \varepsilon \tilde{\alpha})^{-1} \in \mathcal{C}^{p \times p}$. Теперь можно сделать заключение о том, что построенная матрица-функция θ является $J_{p,r}$ -сжимающей в круге $\mathbb{D}$:

$$\theta(z)^* J_{p,r} \theta(z) \leq J_{p,r}, \quad z \in \Lambda_\theta^+.$$

Таким образом, $\theta \in U(J_{p,r})$ и является $J_{p,r}$ -внутренней SI-дилатацией матрицы-функции $c(z)$.

Формулы (3.8), (3.9) и (3.11) позволяют легко получить представления (3.6). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. З. Аров, “О методе Дарлингтона в исследовании диссипативных систем”, *Докл. АН СССР*, **201**:3 (1971), 559–562.
- [2] Д. З. Аров, “Реализация матриц-функций по Дарлингтону”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:6 (1973), 1299–1331.
- [3] Д. З. Аров, “Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:3 (1975), 440–463.
- [4] S. Darlington, “Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics including special applications to filter design”, *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.*, **18** (1939), 257–353.
- [5] Д. З. Аров, Н. А. Рожено, “ $J_{p,m}$ -внутренние дилатации матриц-функций класса Каратеодори, имеющих псевдопродолжение”, *Алгебра и анализ*, **19**:3 (2007), 76–105.
- [6] Д. З. Аров, Н. А. Рожено, “Пассивные системы сопротивления с потерями каналов рассеяния”, *Укр. матем. журн.*, **59**:5 (2007), 618–649.
- [7] Д. З. Аров, Н. А. Рожено, “К теории пассивных систем сопротивления с потерями каналов рассеяния”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 36, Зап. научн. сем. ПОМИ, **355**, ПОМИ, СПб., 2008, 37–71.
- [8] P. Dewilde, “Input-output description of roomy systems”, *SIAM J. Control Optimization*, **14**:4 (1976), 712–736.
- [9] R. G. Douglas, J. W. Helton, “Inner dilations of analytic matrix functions and Darlington synthesis”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **34** (1973), 61–67.
- [10] D. Z. Arov, H. Dym, *J-Contractive Matrix Valued Functions and Related Topics*, Encyclopedia Math. Appl., **116**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [11] V. E. Katsnelson, B. Kirstein, “On the theory of matrix-valued functions belonging to the Smirnov class”, *Topics in Interpolation Theory*, Oper. Theory Adv. Appl., **95**, Birkhäuser, Basel, 1997, 299–350.

Д. З. Аров

Южно-Украинский педагогический университет
им. К. Д. Ушинского, г. Одесса

Н. А. Рожено

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
E-mail: mainatasha@mail.ru

Поступило

11.07.2009

Исправленный вариант

05.04.2010