Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Могилевский, Описание обобщенных резольвент и характеристических матриц дифференциальных операторов посредством граничного параметра, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 558–583

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:55:24

Описание обобщенных резольвент и характеристических матриц дифференциальных операторов посредством граничного параметра

В. И. Могилевский

В работе дополняются и развиваются известные результаты Штрауса по обобщенным резольвентам и спектральным функциям минимального оператора L_0 , порожденного формально самосопряженным дифференциальным выражением четного порядка с операторными коэффициентами, заданными на промежутке $[0, b)$, $b \leq \infty$. Наш подход основан на понятии распадающейся граничной тройки, что позволило установить связь между методом Штрауса и граничными задачами со спектральным параметром в граничном условии. В частности, получена параметризация всех характеристических матриц $\Omega(\lambda)$ оператора L_0 непосредственно в терминах спектрального параметра соответствующей граничной задачи. Такая параметризация задается в виде блочного представления матрицы $\Omega(\lambda)$, а также посредством формулы, аналогичной известной формуле Крейна для обобщенных резольвент.

Библиография: 21 название.

1. Введение

Основной объект статьи – дифференциальные операторы, порожденные формально самосопряженным дифференциальным выражением $l[y]$ четного порядка $2n$ на промежутке $\Delta = [0, b)$, $b \leq \infty$ (см. (2.17)). Мы рассматриваем в работе выражения $l[y]$ с операторными коэффициентами в случае произвольных (возможно, неравных) индексов дефекта $n_{\pm}$ минимального оператора L_0 , однако ниже для простоты считаем, что эти коэффициенты – скалярные функции и $n_+ = n_-$. Пусть $L(= L_0^*)$ – максимальный оператор и $\mathscr{D}$ – его область определения (операторы L_0 и L действуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L_2(\Delta)$). Согласно [1] (см. также [2]) всякая обобщенная резольвента $R(\lambda)$ оператора L_0 допускает представление

$$(R(\lambda)f)(x) = \int_0^b G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad f = f(\cdot) \in \mathfrak{H}, \quad (1.1)$$

в котором $G(x, t, \lambda)$ – функция Грина, имеющая вид

$$G(x, t, \lambda) = Y_0(x, \lambda) \left(\Omega(\lambda) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t - x) J \right) Y_0^*(t, \bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-. \quad (1.2)$$

Здесь $Y_0(\cdot, \lambda)$ – “каноническое” $2n$ -компонентное решение уравнения $l[y] - \lambda y = 0$, J – сигнатурный оператор вида (3.29) и $\Omega(\lambda)$ – неванлинновская оператор-функция, которая называется *характеристической матрицей* (х.м.) обобщенной резольвенты $R(\lambda)$. Используя эту матрицу, Штраус в [1] построил все спектральные функции оператора L_0 (как ортогональные, так и неортогональные).

Несколько иной подход в теории обобщенных резольвент и спектральных функций основан на применении граничных задач со спектральным параметром в граничном условии (см. работы [3], [4] и литературу в них). Именно, пусть $l[y] = -y'' + q(t)y$ – выражение Штурма–Лиувилля на полуоси такое, что $n_{\pm} = 1$. Тогда для всякой обобщенной резольвенты $R(\lambda)$ найдется неванлинновская функция $\tau(\lambda)$ такая, что функция $y := R(\lambda)f$, $f \in \mathfrak{H}$, является единственным решением граничной задачи

$$l[y] - \lambda y = f, \quad (1.3)$$

$$y(0) - \tau(\lambda)y'(0) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (1.4)$$

при этом х.м. $\Omega(\cdot)$ связана с параметром $\tau(\cdot)$ из (1.4) равенством [3]

$$\Omega(\lambda) = \frac{1}{m(\lambda) + \tau(\lambda)} \begin{pmatrix} m(\lambda)\tau(\lambda) & m(\lambda) \\ m(\lambda) & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где $m(\lambda)$ – функция Вейля–Титчмарша [5]. В этой связи отметим, что случай $n_{\pm} = 2$ является более сложным, так как в этом случае одно лишь граничное условие (1.4) в точке 0 не определяет спектральную функцию. Кроме того, ситуация существенно усложняется для сингулярных дифференциальных выражений высших порядков.

В настоящей статье дополняются и развиваются приведенные выше результаты по обобщенным резольвентам и х.м. Напомним вначале следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [6]). Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство и A – плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – вспомогательное гильбертово пространство и $\Gamma_j: \mathcal{D}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}$, $j \in \{0, 1\}$, – граничные операторы, называется *граничной тройкой* для A^* , если отображение $\Gamma = (\Gamma_0 \Gamma_1)^T$ сюръективно и справедлива абстрактная формула Грина

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \mathcal{D}(A^*).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [7]). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* . Оператор-функция $M(\lambda)$, определенная равенством

$$\Gamma_1 f_\lambda = M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda, \quad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda := \text{Ker}(A^* - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-,$$

называется *функцией Вейля*, соответствующей граничной тройке Π .

Наш метод исследования дифференциальных операторов основан на применении распадающейся граничной тройки для L – граничной тройки (в смысле определения 1) специального вида $\Pi = \{\mathbb{C}^n \oplus \mathcal{H}', \Gamma_0, \Gamma_1\}$ [8]. Здесь $\mathcal{H}'$ – гильбертово пространство, а $\Gamma_j: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathcal{H}'$, $j \in \{0, 1\}$, – граничные операторы вида

$$\Gamma_0 y = \{y^{(2)}(0), \Gamma'_0 y\} \in \mathbb{C}^n \oplus \mathcal{H}', \quad \Gamma_1 y = \{-y^{(1)}(0), \Gamma'_1 y\} \in \mathbb{C}^n \oplus \mathcal{H}', \quad y \in \mathcal{D}, \quad (1.6)$$

где $y^{(1)}(0)$, $y^{(2)}(0)$ – векторы квазипроизводных в точке 0 (см. (2.18)) и $\Gamma'_j: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}'$ – линейные отображения. Согласно [8] распадающаяся граничная тройка существует для любого выражения $l[y]$ с индексами дефекта $n_+ = n_-$; при этом $\dim \mathcal{H}' = n - n_{\pm}$.

Применяя к распадающейся граничной тройке (1.6) результаты работы [9] (в случае $n_+ \neq n_-$ см. [10]), нетрудно показать, что всякая обобщенная резольвента $R(\lambda)$ задается граничной задачей

$$l[y] - \lambda y = f, \quad (1.7)$$

$$\widehat{C}_1(\lambda)y^{(1)}(0) + \widehat{C}_2(\lambda)y^{(2)}(0) + C'_0(\lambda)\Gamma'_0 y - C'_1(\lambda)\Gamma'_1 y = 0, \quad (1.8)$$

где $\widehat{C}_j(\lambda)$, $C'_j(\lambda)$ – операторные компоненты неванлинновской пары $\tau(\lambda)$ в $\mathbb{C}^n \oplus \mathcal{H}'$, однозначно соответствующей $R(\lambda)$. В этой связи отметим, что для регулярного выражения $l[y]$ можно положить

$$\Gamma'_0 y = y^{(2)}(b), \quad \Gamma'_1 y = y^{(1)}(b),$$

в результате чего граничное условие (1.8) примет “классический” вид. Для сингулярного выражения граничные операторы Γ'_0 и Γ'_1 могут быть явно выражены в терминах пределов на правом конце b некоторых регуляризаций квазипроизводных $y^{[j]}(t)$ [8]. Поэтому векторы $\Gamma'_0 y$, $\Gamma'_1 y \in \mathcal{H}'$ можно рассматривать как граничные значения функции $y \in \mathcal{D}$ на сингулярном конце b , а формулу (1.8) – как условие, наложенное на граничные значения функции y на концах промежутка $[0, b)$. Отсюда также следует, что формулы (1.7), (1.8) задают параметризацию $R(\lambda) = R_{\tau}(\lambda)$ всех обобщенных резольвент посредством неванлинновского граничного параметра $\tau(\lambda)$.

Пусть, далее, $M(\cdot)$ – функция Вейля, соответствующая распадающейся граничной тройке (1.6) в смысле определения 2. Тогда имеет место блочное представление

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} : \mathbb{C}^n \oplus \mathcal{H}' \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathcal{H}', \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (1.9)$$

в котором $m(\lambda)$ – классическая характеристическая (Вейля–Титчмарша) функция для распадающихся граничных условий. Основной результат статьи – описание всех х.м. $\Omega(\cdot)$ оператора L_0 непосредственно в терминах функции Вейля и граничного параметра τ . Мы доказываем, что для всякой обобщенной резольвенты $R(\lambda) = R_{\tau}(\lambda)$, заданной граничной задачей (1.7), (1.8), соответствующая х.м. имеет вид

$$\Omega(\lambda)(= \Omega_{\tau}(\lambda)) = P_{\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n} \widetilde{\Omega}_{\tau}(\lambda) \upharpoonright \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n,$$

где

$$\widetilde{\Omega}_{\tau}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) - M(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}M(\lambda) & -\frac{1}{2}I + M(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} \\ -\frac{1}{2}I + (\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}M(\lambda) & -(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Отсюда следует, что два последних равенства задают параметризацию всех х.м. $\Omega(\cdot)$ оператора L_0 с помощью граничного параметра $\tau(\cdot)$. Кроме того, та же параметризация задается формулой

$$\Omega(\lambda)(= \Omega_{\tau}(\lambda)) = \Omega_0(\lambda) - S(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}S^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (1.11)$$

аналогичной известной формуле Крейна для резольвент (см., например, [7]). В формуле (1.11) $M(\lambda)$ – функция Вейля (1.9), а $\Omega_0(\lambda)$ и $S(\lambda)$ – матрицы, построенные из элементов правой части (1.9) (см. (4.1) и (5.4)).

Таким образом, формула (1.11) устанавливает связь между граничной задачей (1.7), (1.8) и методом Штрауса в теории дифференциальных операторов. Кроме того, канонические (ортогональные) х.м. характеризуются условием $\tau = \tau^*$, что позволяет с помощью (1.11) описать в явном виде все такие х.м. (ср. с [1], [2]).

Из формулы (1.11) вытекает одно полезное, на наш взгляд, тождество для $\Omega_\tau(\lambda)$ (см. (4.18)). Из него, в частности, следует неравенство

$$(\operatorname{Im} \lambda)^{-1} \operatorname{Im} \Omega_\tau(\lambda) \geq \int_0^b U_\tau^*(t, \lambda) U_\tau(t, \lambda) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (1.12)$$

которое переходит в равенство для канонических х.м. $\Omega_\tau(\cdot)$ (здесь $U_\tau(\cdot, \lambda)$ – операторное решение уравнения $l[y] - \lambda y = 0$ с начальными данными, заданными непосредственно в терминах τ). Неравенство (1.12) показывает, что $\Omega_\tau(\cdot)$ – неванлинновская оператор-функция. Заметим также, что формула (1.12) аналогична известным формулам для различных классов дифференциальных и разностных граничных задач (см., например, [11]).

В заключительной части статьи рассматривается простейший случай минимальных дефектов $n_+ = n_- = n$. В этом случае х.м. $\Omega_\tau(\cdot)$ имеет вид (1.10) с $M(\lambda) = m(\lambda)$, откуда следует, что равенство (1.5) для оператора Штурма–Лиувилля является частным случаем формулы (1.10).

В заключение отметим, что матрицы вида (1.10) встречаются в работе Каца [12], а также в работах [13], [14] по гамильтоновым системам. Кроме того, в недавних работах [15], [16] показано, что всякая матрица вида (1.10) является функцией Вейля для самосопряженного расширения $\tilde{A}$, задающего обобщенную резольвенту оператора A , порожденную параметром $\tau(\lambda)$ в абстрактном граничном условии.

2. Предварительные сведения

2.1. Обозначения. Всюду в статье используются следующие обозначения: $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство; $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ – множество ограниченных линейных операторов, определенных на $\mathcal{H}_1$, со значениями в $\mathcal{H}_2$; $[\mathcal{H}] := [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$; $P_{\mathcal{L}}$ – ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathcal{L} \subset \mathfrak{H}$; $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) – верхняя (нижняя) полуплоскость комплексной плоскости.

Напомним, что замкнутым линейным отношением из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ называется замкнутое подпространство в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Множество всех замкнутых линейных отношений из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ (из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$) обозначается через $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ ($\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$). Замкнутый линейный оператор T из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ отождествляется с его графиком $\operatorname{gr} T \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Для отношения $T \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ полагаем $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ и $\operatorname{Ker} T$ – область определения, образ и ядро соответственно; $T^{-1} \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$ и $T^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$ – обратное и сопряженное отношения.

В случае $T \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ будем писать: $0 \in \rho(T)$, если $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ и $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}_1$ или, что равносильно, $T^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$; $0 \in \tilde{\rho}(T)$, если $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ и $\mathcal{R}(T)$ замкнуто. Для линейного отношения $T \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ будем обозначать через $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in$

$\rho(T - \lambda)$ и $\widehat{\rho}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in \widehat{\rho}(T - \lambda)\}$ резольвентное множество и множество точек регулярного типа соответственно.

Пусть $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ – плотно заданный оператор. Для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ полагаем

$$\mathfrak{N}_\lambda(T) := \text{Ker}(T^* - \lambda) (= \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}(T - \bar{\lambda})).$$

Если $\bar{\lambda} \in \widehat{\rho}(T)$, то $\mathfrak{N}_\lambda(T)$ является дефектным подпространством оператора T .

2.2. Голomorphicные операторные пары. Пусть Λ – открытое множество в $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ – гильбертовы пространства и $C_j(\cdot) : \Lambda \rightarrow [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}]$, $j \in \{0, 1\}$, – пара голоморфных оператор-функций (для краткости – голоморфная пара). Две такие пары $C_j(\cdot) : \Lambda \rightarrow [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}]$ и $C'_j(\cdot) : \Lambda \rightarrow [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}']$ назовем *эквивалентными*, если существует голоморфный изоморфизм $\varphi(\cdot) : \Lambda \rightarrow [\mathcal{H}, \mathcal{H}']$ такой, что $C'_j(\lambda) = \varphi(\lambda) \times C_j(\lambda)$, $j \in \{0, 1\}$, $\lambda \in \Lambda$. Ясно, что множество всех голоморфных пар распадается на непересекающиеся классы эквивалентности; при этом равенство

$$\tau(\lambda) = \{(C_0(\lambda), C_1(\lambda)); \mathcal{K}\} := \{(h_0, h_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 : C_0(\lambda)h_0 + C_1(\lambda)h_1 = 0\} \quad (2.1)$$

позволяет отождествить такой класс и функцию $\tau(\lambda) (\in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1))$.

Всюду в дальнейшем (если не оговорено противное) $\mathcal{H}_0$ – гильбертово пространство, $\mathcal{H}_1$ – подпространство в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$ и P_j – ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}_j$, $j \in \{1, 2\}$. С каждым отношением $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ связано $\times$ -сопряженное отношение $\theta^\times \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ [17], заданное как совокупность всех $\{k_0, k_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ таких, что

$$(k_1, h_0) - (k_0, h_1) + i(P_2 k_0, P_2 h_0) = 0, \quad \{h_0, h_1\} \in \theta.$$

Очевидно, что в случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$ справедливо равенство $\theta^\times = \theta^*$.

Пусть, далее, $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ – вспомогательные гильбертовы пространства и

$$\tau_+(\lambda) = \{(C_0(\lambda), C_1(\lambda)); \mathcal{H}_+\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad \tau_-(\lambda) = \{(D_0(\lambda), D_1(\lambda)); \mathcal{H}_-\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \quad (2.2)$$

– классы эквивалентности голоморфных пар

$$C_j(\cdot) : \mathbb{C}_+ \rightarrow [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_+] \quad \text{и} \quad D_j(\cdot) : \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_-], \quad j \in \{0, 1\},$$

с блочно-матричными представлениями

$$\begin{aligned} C_0(\lambda) &= \begin{pmatrix} C_{01}(\lambda) & C_{02}(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_+, \\ D_0(\lambda) &= \begin{pmatrix} D_{01}(\lambda) & D_{02}(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_-. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Совокупность $\tau = \{\tau_+, \tau_-\}$ двух голоморфных пар (2.2) (точнее, классов эквивалентности соответствующих пар) принадлежит множеству $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, если она удовлетворяет следующим соотношениям:

$$2 \operatorname{Im}(C_1(\lambda)C_{01}^*(\lambda)) + C_{02}(\lambda)C_{02}^*(\lambda) \geq 0, \quad 0 \in \rho(C_0(\lambda) - iC_1(\lambda)P_1), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (2.4)$$

$$2 \operatorname{Im}(D_1(\lambda)D_{01}^*(\lambda)) + D_{02}(\lambda)D_{02}^*(\lambda) \leq 0, \quad 0 \in \rho(D_0(\lambda) + iD_1(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \quad (2.5)$$

и

$$C_1(\lambda)D_{01}^*(\bar{\lambda}) - C_{01}(\lambda)D_1^*(\bar{\lambda}) + iC_{02}(\lambda)D_{02}^*(\bar{\lambda}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (2.6)$$

Совокупность $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ принадлежит классу $\widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, если для некоторого (и, следовательно, для любого) $\lambda \in \mathbb{C}_+$

$$2 \operatorname{Im}(C_1(\lambda)C_{01}^*(\lambda)) + C_{02}(\lambda)C_{02}^*(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad 0 \in \rho(C_{01}(\lambda) + iC_1(\lambda)).$$

Нетрудно показать, что

$$-\tau_+(\lambda) = (-\tau_-(\bar{\lambda}))^\times, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

для всякой совокупности $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Кроме того,

$$\tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) \neq \emptyset \iff \dim \mathcal{H}_0 = \dim \mathcal{H}_1$$

и совокупность $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ допускает представление в виде константы

$$\tau_\pm(\lambda) \equiv \{(C_0, C_1); \mathcal{H}\} = \theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm, \quad (2.7)$$

где $C_j \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}]$, $j \in \{0, 1\}$, и $(-\theta)^\times = -\theta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. 1) В случае $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_- =: \mathcal{H}$ (что возможно лишь при условии $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_0$) совокупность $\{\tau_+(\lambda), \tau_-(\lambda)\}$ двух голоморфных пар (2.2) можно рассматривать как одну голоморфную пару, заданную на $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

2) Определение 3 класса $\tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ несколько отличается от определения того же класса в нашей работе [17]. Вместе с тем голоморфная пара $\tau_+(\cdot)$ является первым элементом совокупности $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ (в смысле определения 3) тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\tilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ (см. [17], определение 4.1).

3) В случае $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 =: \mathcal{H}$ класс $\tilde{R}(\mathcal{H}) := \tilde{R}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ совпадает с известным классом неванлинновских функций $\tau(\cdot)$ со значениями в $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ (см., например, [15]). В этом случае формула (2.2) принимает вид

$$\tau(\lambda) = \{(C_0(\lambda), C_1(\lambda)); \mathcal{H}\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (2.8)$$

где $C_j(\cdot) : \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$, $j \in \{0, 1\}$, – голоморфная неванлинновская пара. Кроме того, функция $\tau(\cdot)$ принадлежит классу $\tilde{R}^0(\mathcal{H}) := \tilde{R}^0(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда она допускает представление (2.7) в виде константы $\theta = \theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.

2.3. Граничная тройка и функция Вейля. Пусть A – замкнутый плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с индексами дефекта $n_\pm(A) := \dim \mathfrak{N}_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$. Обозначим Ext_A – множество собственных расширений оператора A , т.е. множество всех замкнутых операторов $\tilde{A}$ в $\mathfrak{H}$ таких, что $A \subset \tilde{A} \subset A^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [10]). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}_0$ – гильбертово пространство, $\mathcal{H}_1$ – подпространство в $\mathcal{H}_0$ и $\Gamma_j : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$, – линейные отображения, называется *D-граничной тройкой* (или, коротко, *D-тройкой*) для A^* , если отображение

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 \end{pmatrix}^\top : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

сюрьеکتивно и справедливо тождество Грина

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g) + i(P_2 \Gamma_0 f, P_2 \Gamma_0 g), \quad f, g \in \mathcal{D}(A^*),$$

в котором P_2 – ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ на подпространство $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$.

Как показано в [10], $\dim \mathcal{H}_1 = n_-(A) \leq n_+(A) = \dim \mathcal{H}_0$ для всякой D -тройки $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. Кроме того, равенство

$$\mathcal{D}(A_0) := \text{Ker } \Gamma_0 = \{f \in \mathcal{D}(A^*) : \Gamma_0 f = 0\}, \quad A_0 = A^* \upharpoonright \mathcal{D}(A_0), \quad (2.9)$$

задает максимальное симметрическое расширение $A_0 \in \text{Ext}_A$ такое, что $n_-(A_0) = 0$.

Оказывается, что для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (соответственно $z \in \mathbb{C}_-$) отображение $\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A)$ (соответственно $P_1 \Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z(A)$) изоморфно. Это позволяет ввести оператор-функции (γ -поля)

$$\gamma_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \rightarrow [\mathcal{H}_0, \mathfrak{H}], \quad \gamma_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathcal{H}_1, \mathfrak{H}]$$

и функции Вейля

$$M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \rightarrow [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1], \quad M_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$$

с помощью равенств

$$\gamma_+(\lambda) = (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad \gamma_-(z) = (P_1 \Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z(A))^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (2.10)$$

и

$$\Gamma_1 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A) = M_+(\lambda) \Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (2.11)$$

$$(\Gamma_1 + iP_2 \Gamma_0) \upharpoonright \mathfrak{N}_z(A) = M_-(z) P_1 \Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z(A), \quad z \in \mathbb{C}_-. \quad (2.12)$$

Согласно [10] все функции $\gamma_\pm$ и $M_\pm$ голоморфны на своих областях определения и $M_+^*(\lambda) = M_-(\bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Кроме того, справедливо соотношение

$$M_+(\mu) - M_+^*(\lambda) P_1 + iP_2 = (\mu - \bar{\lambda}) \gamma_+^*(\lambda) \gamma_+(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (2.13)$$

Напомним, далее, следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Оператор-функция $R(\lambda) : \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathfrak{H}]$ называется *обобщенной резольвентой* симметрического оператора A , если существуют гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ и самосопряженный оператор $\tilde{A}$ в $\tilde{\mathfrak{H}}$ такие, что $A \subset \tilde{A}$ и

$$R(\lambda) = P_{\tilde{\mathfrak{H}}}(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-.$$

В следующей теореме дается описание всех обобщенных резольвент в терминах абстрактных граничных условий.

ТЕОРЕМА 7 (см. [10]). Пусть $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – D -тройка для A^* . Тогда равенства

$$\mathcal{D}(\tilde{A}(\lambda)) = \begin{cases} \{f \in \mathcal{D}(A^*) : C_0(\lambda) \Gamma_0 f - C_1(\lambda) \Gamma_1 f = 0\}, & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ \{f \in \mathcal{D}(A^*) : D_0(\lambda) \Gamma_0 f - D_1(\lambda) \Gamma_1 f = 0\}, & \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$R(\lambda) = (\tilde{A}(\lambda) - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (2.15)$$

в которых $\tilde{A}(\lambda) \in \text{Ext}_A$, задают биективное соответствие между всеми обобщенными резольвентами $R(\lambda)$ оператора A и всеми совокупностями голоморфных пар $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, определенными посредством (2.2). При этом $R(\lambda)$ является канонической резольвентой тогда и только тогда, когда $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если D -тройка $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}$ ($\Leftrightarrow A_0 = A_0^*$), то она является граничной тройкой. Точнее это означает, что совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ является граничной тройкой (пространством граничных значений) для A^* в смысле [6]. В этом случае равенства

$$\gamma(\lambda) = (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A))^{-1}, \quad \Gamma_1 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A) = M(\lambda)\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A), \quad \lambda \in \rho(A_0), \quad (2.16)$$

задают оператор-функции [7] $\gamma(\cdot): \rho(A_0) \rightarrow [\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ (γ -поле) и $M(\cdot): \rho(A_0) \rightarrow [\mathcal{H}]$ (функция Вейля), которые связаны с оператор-функциями (2.10)–(2.12) равенствами

$$\gamma(\lambda) = \gamma_\pm(\lambda), \quad M(\lambda) = M_\pm(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm.$$

2.4. Дифференциальные операторы и распадающиеся граничные тройки. Пусть $\Delta = [0, b)$, $b \leq \infty$, – интервал в $\mathbb{R}$ (в случае $b < \infty$ точка b может как принадлежать, так и не принадлежать Δ), H – сепарабельное гильбертово пространство размерности $\dim H \leq \infty$ и

$$l[y] = l_H[y] = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left((p_{n-k}y^{(k)})^{(k)} - \frac{i}{2} [(q_{n-k}^*y^{(k)})^{(k-1)} + (q_{n-k}y^{(k-1)})^{(k)}] \right) + p_n y \quad (2.17)$$

– дифференциальное выражение четного порядка $2n$ с достаточно гладкими операторнозначными коэффициентами $p_k(\cdot), q_k(\cdot): \Delta \rightarrow [H]$ такими, что $p_k(t) = p_k^*(t)$ и $0 \in \rho(p_0(t))$. Обозначим $y^{[k]}(\cdot)$, $k = 0, \dots, 2n$, – квазипроизводные функции $y(\cdot): \Delta \rightarrow H$, соответствующие выражению (2.17), и пусть $\mathcal{D}(l)$ – множество всех функций, для которых это выражение имеет смысл [5], [18]. Каждой функции $y \in \mathcal{D}(l)$ сопоставим функции

$$y^{(j)}(\cdot): \Delta \rightarrow H^n, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{и} \quad \tilde{y}(\cdot): \Delta \rightarrow H^n \oplus H^n,$$

полагая

$$y^{(1)}(t) := \{y^{[k-1]}(t)\}_{k=1}^n (\in H^n), \quad y^{(2)}(t) := \{y^{[2n-k]}(t)\}_{k=1}^n (\in H^n), \quad (2.18)$$

$$\tilde{y}(t) = \{y^{(1)}(t), y^{(2)}(t)\} (\in H^n \oplus H^n), \quad t \in \Delta. \quad (2.19)$$

Для заданного $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y] - \lambda y = 0. \quad (2.20)$$

Пусть $\mathcal{K}$ – гильбертово пространство и $Y(\cdot): \Delta \rightarrow [\mathcal{K}, H]$ – операторное решение уравнения (2.20). С каждым таким решением связаны оператор-функции

$$Y^{(j)}(\cdot): \Delta \rightarrow [\mathcal{K}, H^n], \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{и} \quad \tilde{Y}(\cdot): \Delta \rightarrow [\mathcal{K}, H^n \oplus H^n],$$

имеющие вид

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(t) &= (Y(t) \quad Y^{[1]}(t) \quad \dots \quad Y^{[n-1]}(t))^T, \\ Y^{(2)}(t) &= (Y^{[2n-1]}(t) \quad Y^{[2n-2]}(t) \quad \dots \quad Y^{[n]}(t))^T, \\ \tilde{Y}(t) &= (Y^{(1)}(t) \quad Y^{(2)}(t))^T: \mathcal{K} \rightarrow H^n \oplus H^n, \quad t \in \Delta, \end{aligned}$$

где $Y^{[k]}(\cdot)$, $k = 0, \dots, 2n - 1$, – квазипроизводные оператор-функции $Y(\cdot)$. Для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение (2.20) имеет два “канонических” операторных решения $c(\cdot, \lambda)$ и $s(\cdot, \lambda)$ со значениями в $[H^n, H]$ и начальными данными

$$c^{(1)}(0, \lambda) = I_{H^n}, \quad c^{(2)}(0, \lambda) = 0, \quad s^{(1)}(0, \lambda) = 0, \quad s^{(2)}(0, \lambda) = I_{H^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.21)$$

Ясно, что равенство

$$Y_0(t, \lambda) := (c(t, \lambda)s(t, \lambda)): H^n \oplus H^n \rightarrow H, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.22)$$

задает операторное решение уравнения (2.20) такое, что $\tilde{Y}_0(0, \lambda) = I_{H^n \oplus H^n}$. Кроме того, всякое операторное решение $Y(t)$ того же уравнения имеет вид

$$Y(t) = Y_0(t, \lambda)\tilde{Y}(0). \quad (2.23)$$

В дальнейшем обозначаем $\mathfrak{H} (= L_2(\Delta; H))$ – гильбертово пространство измеримых функций $f(\cdot): \Delta \rightarrow H$ таких, что $\int_0^b \|f(t)\|^2 dt < \infty$. Кроме того, пусть $L'_2[\mathcal{H}, H]$ – множество всех оператор функций $Y(\cdot): \Delta \rightarrow [\mathcal{H}, H]$ таких, что $Y(t)h \in \mathfrak{H}$ для всех $h \in \mathcal{H}$. Выражение (2.17) порождает минимальный оператор L_0 и максимальный оператор L , действующие в $\mathfrak{H}$; при этом L_0 – замкнутый плотно заданный симметрический оператор с (необязательно равными) индексами дефекта $n_{\pm}(L_0)$ и $L_0^* = L$. В дальнейшем полагаем $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(L_0)$ и $\mathcal{D} = \mathcal{D}(L)$. Как известно, любая пара функций $y, z \in \mathcal{D}$ удовлетворяет тождеству Лагранжа

$$(Ly, z)_{\mathfrak{H}} - (y, Lz)_{\mathfrak{H}} = [y, z](b) - [y, z](0), \quad (2.24)$$

в котором

$$[y, z](t) = (y^{(1)}(t), z^{(2)}(t))_{H^n} - (y^{(2)}(t), z^{(1)}(t))_{H^n}, \quad [y, z](b) = \lim_{t \uparrow b} [y, z](t).$$

Пусть $\theta = \theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(H^n)$, и пусть L_{θ} – симметрическое расширение оператора L_0 с областью определения

$$\mathcal{D}(L_{\theta}) = \{y \in \mathcal{D} : \tilde{y}(0) \in \theta \text{ и } [y, z](b) = 0, z \in \mathcal{D}\}. \quad (2.25)$$

Согласно [8] индексы дефекта $n_{\pm}(L_{\theta})$ оператора L_{θ} не зависят от $\theta (= \theta^*)$, что позволяет ввести следующее определение (см. [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Числа $n_{b\pm} := n_{\pm}(L_{\theta})$, $\theta = \theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(H^n)$, называются *индексами дефекта* выражения $l[y]$ на правом конце b промежутка Δ .

Пусть, далее, $\mathcal{H}'_1$ – подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}'_0$, $\mathcal{H}'_2 := \mathcal{H}'_0 \ominus \mathcal{H}'_1$, $\Gamma'_0: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}'_0$ и $\Gamma'_1: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}'_1$ – линейные отображения и P'_j – ортопроектор в $\mathcal{H}'_0$ на $\mathcal{H}'_j$, $j \in \{1, 2\}$. Кроме того, пусть $\mathcal{H}'_j = H^n \oplus \mathcal{H}'_j$ и $\Gamma_j: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}'_j$, $j \in \{0, 1\}$, – линейные отображения, определенные для всякого $y \in \mathcal{D}$ равенствами

$$\Gamma_0 y = \{y^{(2)}(0), \Gamma'_0 y\} \in H^n \oplus \mathcal{H}'_0, \quad \Gamma_1 y = \{-y^{(1)}(0), \Gamma'_1 y\} \in H^n \oplus \mathcal{H}'_1. \quad (2.26)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 (см. [8]). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой Γ_0 и Γ_1 – линейные отображения (2.26), называется *распадающейся D-тройкой* для L , если отображение $\Gamma' = (\Gamma'_0 \ \Gamma'_1)^T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}'_0 \oplus \mathcal{H}'_1$ сюръективно и справедливо тождество

$$[y, z](b) = (\Gamma'_1 y, \Gamma'_0 z) - (\Gamma'_0 y, \Gamma'_1 z) + i(P'_2 \Gamma'_0 y, P'_2 \Gamma'_0 z), \quad y, z \in \mathcal{D}. \quad (2.27)$$

В случае $\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}'_1 =: \mathcal{H}' (\Leftrightarrow \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H})$ распадающаяся D -тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ называется *распадающейся граничной тройкой* для L . Для такой тройки тождество (2.27) принимает вид

$$[y, z](b) = (\Gamma'_1 y, \Gamma'_0 z) - (\Gamma'_0 y, \Gamma'_1 z), \quad y, z \in \mathcal{D}. \quad (2.28)$$

Согласно лемме 3.4 в [8] распадающаяся D -тройка (соответственно распадающаяся граничная тройка) является D -тройкой (соответственно граничной тройкой) в смысле определения 5 и замечания 8. Кроме того, распадающаяся D -тройка (соответственно граничная тройка) для L существует тогда и только тогда, когда $n_{b-} \leq n_{b+}$ (соответственно $n_{b-} = n_{b+}$), и в этом случае

$$\dim \mathcal{H}'_1 = n_{b-} \leq n_{b+} = \dim \mathcal{H}'_0 \quad (\text{соответственно } n_{b-} = n_{b+} = \dim \mathcal{H}'). \quad (2.29)$$

Поэтому в дальнейшем (без потери общности) считаем, что $n_{b-} \leq n_{b+}$ и, следовательно, $n_-(L_0) \leq n_+(L_0)$.

ТЕОРЕМА 11 (см. [8]). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся D -тройка (2.26) и $M_{\pm}(\cdot)$ – функции Вейля (2.11), (2.12) для Π с блочно-матричными представлениями

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & M_{2+}(\lambda) \\ M_{3+}(\lambda) & M_{4+}(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_0 \rightarrow H^n \oplus \mathcal{H}'_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (2.30)$$

$$M_-(z) = \begin{pmatrix} m(z) & M_{2-}(z) \\ M_{3-}(z) & M_{4-}(z) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_1 \rightarrow H^n \oplus \mathcal{H}'_0, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (2.31)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Расширение A_0 (см. (2.9)) имеет область определения

$$\mathcal{D}(A_0) = \{y \in \mathcal{D} : y^{(2)}(0) = 0, \Gamma'_0 y = 0\}. \quad (2.32)$$

2) Для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ существует единственная оператор-функция

$$v_0(\cdot, \lambda) \in L'_2[H^n, H],$$

удовлетворяющая уравнению (2.20) и граничным условиям

$$v_0^{(2)}(0, \lambda) = I_{H^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (2.33)$$

$$\Gamma'_0(v_0(t, \lambda)\hat{h}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad P'_1 \Gamma'_0(v_0(t, \lambda)\hat{h}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \quad \hat{h} \in H^n. \quad (2.34)$$

Кроме того, для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (соответственно $z \in \mathbb{C}_-$) существует единственная оператор-функция $u_+(\cdot, \lambda) \in L'_2[\mathcal{H}'_0, H]$ (соответственно $u_-(\cdot, z) \in L'_2[\mathcal{H}'_1, H]$), удовлетворяющая (2.20) и граничным условиям

$$u_+^{(2)}(0, \lambda) = 0, \quad \Gamma'_0(u_+(t, \lambda)h'_0) = h'_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad h'_0 \in \mathcal{H}'_0, \quad (2.35)$$

$$u_-^{(2)}(0, z) = 0, \quad P'_1 \Gamma'_0(u_-(t, z)h'_1) = h'_1, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad h'_1 \in \mathcal{H}'_1. \quad (2.36)$$

3) Пусть $\gamma_{\pm}(\cdot) - \gamma$ -поля (2.10) для Π и

$$Z_+(\cdot, \lambda) \in L'_2[\mathcal{H}_0, H], \quad Z_-(\cdot, z) \in L'_2[\mathcal{H}_1, H]$$

– операторные решения уравнения (2.20), заданные в блочно-матричном виде

$$Z_+(t, \lambda) = (v_0(t, \lambda) u_+(t, \lambda)): H^n \oplus \mathcal{H}'_0 \rightarrow H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (2.37)$$

$$Z_-(t, z) = (v_0(t, z) u_-(t, z)): H^n \oplus \mathcal{H}'_1 \rightarrow H, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (2.38)$$

Тогда для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и $z \in \mathbb{C}_-$ справедливы равенства

$$(\gamma_+(\lambda)h_0)(t) = Z_+(t, \lambda)h_0, \quad h_0 \in \mathcal{H}_0, \quad (\gamma_-(z)h_1)(t) = Z_-(t, z)h_1, \quad h_1 \in \mathcal{H}_1, \quad (2.39)$$

и

$$\tilde{Z}_+(0, \lambda) = \begin{pmatrix} v_0^{(1)}(0, \lambda) & u_+^{(1)}(0, \lambda) \\ v_0^{(2)}(0, \lambda) & u_+^{(2)}(0, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m(\lambda) & -M_{2+}(\lambda) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (2.40)$$

$$\tilde{Z}_-(0, z) = \begin{pmatrix} v_0^{(1)}(0, z) & u_-^{(1)}(0, z) \\ v_0^{(2)}(0, z) & u_-^{(2)}(0, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m(z) & -M_{2-}(z) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (2.41)$$

в силу которых $Z_+(\cdot, \lambda)$ и $Z_-(\cdot, \lambda)$ – голоморфные фундаментальные решения уравнения (2.20) [19].

ЗАМЕЧАНИЕ 12. 1) Формулы (2.30) и (2.31) задают равномерно строгую неванлинновскую оператор-функцию $m(\cdot)$, которую мы называем *m-функцией* расширения A_0 (подробнее см. [8]). В скалярном случае для оператора L_0 с равными индексами дефекта $m(\cdot)$ совпадает с классической характеристической (Вейля–Титчмарша) функцией для распадающихся граничных условий [5].

2) В случае $\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}'_1 =: \mathcal{H}'$ (т.е. для распадающейся граничной тройки (2.26)) $A_0 = A_0^*$ и функция Вейля (2.16) имеет блочно-матричный вид

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix}: H^n \oplus \mathcal{H}' \rightarrow H^n \oplus \mathcal{H}', \quad \lambda \in \rho(A_0). \quad (2.42)$$

В этом случае для любого $\lambda \in \rho(A_0)$ существует единственная пара операторных решений $v_0(\cdot, \lambda) \in L'_2[H^n, H]$ и $u_0(\cdot, \lambda) \in L'_2[H, \mathcal{H}']$ уравнения (2.20) такая, что

$$v_0^{(2)}(0, \lambda) = I_{H^n}, \quad \Gamma'_0(v_0(t, \lambda)\hat{h}) = 0, \quad u_0^{(2)}(0, \lambda) = 0, \quad \Gamma'_0(u_0(t, \lambda)h') = h'$$

для всех $\hat{h} \in H^n$ и $h' \in \mathcal{H}'$. Функции $v_0(\cdot, \lambda)$ и $u_0(\cdot, \lambda)$ порождают голоморфное фундаментальное решение (ср. с (2.37), (2.38))

$$Z_0(t, \lambda) = (v_0(t, \lambda) u_0(t, \lambda)): H^n \oplus \mathcal{H}' \rightarrow H, \quad \lambda \in \rho(A_0). \quad (2.43)$$

3. Обобщенные резольвенты

и характеристические матрицы дифференциальных операторов

Предположим, что $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся D -тройка (2.26) для L и $\gamma_{\pm}(\cdot)$, $M_{\pm}(\cdot)$ – соответствующие γ -поля и функции Вейля (см. (2.10)–(2.12)).

Кроме того, пусть $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – совокупность голоморфных пар (2.2), заданных блочно-матричными представлениями

$$C_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{C}_2(\lambda) & C'_0(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_0 \rightarrow \mathcal{H}_+, \quad (3.1)$$

$$C_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{C}_1(\lambda) & C'_1(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_1 \rightarrow \mathcal{H}_+, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

$$D_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{D}_2(\lambda) & D'_0(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_0 \rightarrow \mathcal{H}_-, \quad (3.2)$$

$$D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{D}_1(\lambda) & D'_1(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_1 \rightarrow \mathcal{H}_-, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

В следующей теореме, непосредственно вытекающей из теоремы 7, содержится описание обобщенных резольвент оператора L_0 в терминах граничных условий.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся D -тройка для L . Тогда для всякой совокупности $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, заданной формулами (2.2), (3.1) и (3.2), равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}(\tilde{A}(\lambda)) \\ &= \begin{cases} \{y \in \mathcal{D} : \widehat{C}_1(\lambda)y^{(1)}(0) + \widehat{C}_2(\lambda)y^{(2)}(0) + C'_0(\lambda)\Gamma'_0 y - C'_1(\lambda)\Gamma'_1 y = 0\}, & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ \{y \in \mathcal{D} : \widehat{D}_1(\lambda)y^{(1)}(0) + \widehat{D}_2(\lambda)y^{(2)}(0) + D'_0(\lambda)\Gamma'_0 y - D'_1(\lambda)\Gamma'_1 y = 0\}, & \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

задает семейство расширений $\tilde{A}(\lambda) = L \upharpoonright \mathcal{D}(\tilde{A}(\lambda))$ такое, что оператор-функция

$$R(\lambda) = R_\tau(\lambda) := (\tilde{A}(\lambda) - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (3.4)$$

является обобщенной резольвентой оператора L_0 . Обратно, для всякой обобщенной резольвенты $R(\lambda)$ существует единственная совокупность $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ такая, что выполняются равенства (3.3) и (3.4). При этом $R(\lambda)$ является канонической резольвентой тогда и только тогда, когда $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Для заданной функции $f \in \mathfrak{H}$ и совокупности голоморфных пар $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ вида (2.2), (3.1) и (3.2) рассмотрим следующую граничную задачу:

$$l[y] - \lambda y = f, \quad (3.5)$$

$$\widehat{C}_1(\lambda)y^{(1)}(0) + \widehat{C}_2(\lambda)y^{(2)}(0) + C'_0(\lambda)\Gamma'_0 y - C'_1(\lambda)\Gamma'_1 y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (3.6)$$

Функцию $y(\cdot, \cdot) : \Delta \times \mathbb{C}_+ \rightarrow H$ назовем решением этой задачи, если для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ функция $y(\cdot, \lambda)$ принадлежит $\mathcal{D}$ и удовлетворяет уравнению (3.5) и граничному условию (3.6).

Непосредственно из теоремы 13 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 14. Пусть $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Тогда

- для всякой функции $f \in \mathfrak{H}$ граничная задача (3.5), (3.6) имеет единственное решение $y(t, \lambda) = y_f(t, \lambda)$;
- равенство $(R(\lambda)f)(t) = y_f(t, \lambda)$, $f \in \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, задает обобщенную резольвенту $R(\lambda)$ оператора L_0 .

Обратно, для всякой обобщенной резольвенты $R(\lambda)$ существует единственное $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ такое, что выполняются утверждения а) и б). При этом $R(\lambda)$ – каноническая резольвента тогда и только тогда, когда $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Теорема 5.3 из нашей работы [19] позволяет представить приведенные результаты в другом виде. Именно, пусть $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – совокупность голоморфных пар, заданная формулами (2.2), (3.1) и (3.2), $\tilde{A}(\lambda)$ – семейство расширений (3.3) и $T_{\pm}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_{\pm}$, – оператор-функции вида

$$T_+(\lambda) = (C_0(\lambda)\Gamma_0 - C_1(\lambda)\Gamma_1)\gamma_+(\lambda), \quad T_-(\lambda) = (D_0(\lambda)\Gamma_0 - D_1(\lambda)\Gamma_1)\gamma_-(\lambda).$$

Тогда $\lambda \in \rho(\tilde{A}(\lambda))$ и в силу теоремы 4.11 из [19] $0 \in \rho(T_{\pm}(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{C}_{\pm}$. Поэтому всякой совокупности $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ мы можем сопоставить семейство операторных решений

$$Y_{\tau+}(\cdot, \lambda): \Delta \rightarrow [\mathcal{H}_1, H], \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad Y_{\tau-}(\cdot, \lambda): \Delta \rightarrow [\mathcal{H}_0, H], \quad \lambda \in \mathbb{C}_-,$$

уравнения (2.20), определенное начальными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{\tau+}(0, \lambda) &= \begin{pmatrix} -\hat{D}_2^*(\bar{\lambda}) & \hat{D}_1^*(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}^{\top} (T_-(\bar{\lambda}))^{-1*}, \\ \tilde{Y}_{\tau-}(0, \lambda) &= \begin{pmatrix} -\hat{C}_2^*(\bar{\lambda}) & \hat{C}_1^*(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}^{\top} (T_+(\bar{\lambda}))^{-1*}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим, далее, голоморфную пару

$$\tilde{\tau}_-(\lambda) = \{(\tilde{D}_1(\lambda), \tilde{D}_0(\lambda)); \mathcal{K}_-\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-,$$

где

$$\tilde{D}_1(\lambda) = D_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \hat{D}_2(\lambda) & D'_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}'_1 \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_1 \rightarrow \mathcal{K}_-, \quad (3.8)$$

$$\tilde{D}_0(\lambda) = D_1(\lambda)P_1 + iD_0(\lambda)P_2 = \begin{pmatrix} \hat{D}_1(\lambda) & D'_1(\lambda)P'_1 + iD'_0(\lambda)P'_2 \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}'_0 \rightarrow \mathcal{K}_-. \quad (3.9)$$

Так как

$$(-\tau_+(\bar{\lambda}))^{\times} = -\tau_-(\lambda) = \{(D_0(\lambda), -D_1(\lambda)); \mathcal{K}_-\},$$

то формула (2.3) в [19] дает

$$(-\tau_+(\bar{\lambda}))^* = \{(\tilde{D}_1(\lambda), -\tilde{D}_0(\lambda)); \mathcal{K}_-\} = -\tilde{\tau}_-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \quad (3.10)$$

Отсюда и из леммы 2.10 в [19] следует, что

$$T_+(\lambda) = C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda), \quad T_-(\lambda) = \tilde{D}_1(\lambda) - \tilde{D}_0(\lambda)M_-(\lambda).$$

Поэтому начальные условия (3.7) могут быть записаны в более удобном виде:

$$\tilde{Y}_{\tau+}(0, \lambda) = \begin{pmatrix} -\hat{D}_2^*(\bar{\lambda}) & \hat{D}_1^*(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}^{\top} (\tilde{D}_1^*(\bar{\lambda}) - M_+(\lambda)\tilde{D}_0^*(\bar{\lambda}))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (3.11)$$

$$\tilde{Y}_{\tau-}(0, \lambda) = \begin{pmatrix} -\hat{C}_2^*(\bar{\lambda}) & \hat{C}_1^*(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}^{\top} (C_0^*(\bar{\lambda}) - M_-(\lambda)C_1^*(\bar{\lambda}))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \quad (3.12)$$

Пусть $Z_{\pm}(t, \lambda)$ – фундаментальные решения (2.37), (2.38). Введем оператор-функции

$$Y_{\tau}(t, \lambda) = \begin{cases} Y_{\tau+}(t, \lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ Y_{\tau-}(t, \lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \quad Z_0(t, \lambda) = \begin{cases} Z_+(t, \lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ Z_-(t, \lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_-. \end{cases} \quad (3.13)$$

Нетрудно проверить, что $Y_{\tau}(\cdot, \lambda)$ однозначно определяется посредством τ и не зависит от (эквивалентных) представлений (2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Оператор-функцию $G_{\tau}(\cdot, \cdot, \lambda): \Delta \times \Delta \rightarrow [H]$ вида

$$G_{\tau}(x, t, \lambda) = \begin{cases} Z_0(x, \lambda)Y_{\tau}^*(t, \bar{\lambda}), & x > t, \\ Y_{\tau}(x, \lambda)Z_0^*(t, \bar{\lambda}), & x < t, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (3.14)$$

назовем *функцией Грина*, соответствующей совокупности $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Теперь из теоремы 5.1 в [19] и теоремы 13 с учетом формулы (2.39) вытекает

ТЕОРЕМА 16. Пусть в условиях теоремы 13 $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ и $R(\lambda) = R_{\tau}(\lambda)$ – соответствующая обобщенная резольвента (3.3), (3.4). Тогда

$$(R(\lambda)f)(x) = \int_0^b G_{\tau}(x, t, \lambda)f(t) dt := \lim_{\eta \uparrow b} \int_0^{\eta} G_{\tau}(x, t, \lambda)f(t) dt, \quad f = f(\cdot) \in \mathfrak{H}, \quad (3.15)$$

откуда следует, что равенства (3.14) и (3.15) задают биективное соответствие между обобщенными (каноническими) резольвентами $R(\lambda)$ минимального оператора L_0 и всеми совокупностями $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ (соответственно $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$).

Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся D -тройка (2.26) для L , $M_{\pm}(\cdot)$ – функции Вейля для Π и $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – совокупность голоморфных пар (2.2). Тогда согласно [10] $0 \in \rho(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))$, что в силу леммы 2.1 из [20] равносильно включению $0 \in \rho(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))$. Кроме того, из той же леммы следует, что

$$-(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} = (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (3.16)$$

Каждой совокупности $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ сопоставим две голоморфные оператор-функции

$$\tilde{\Omega}_{\tau+}(\cdot): \mathbb{C}_+ \rightarrow [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0] \quad \text{и} \quad \tilde{\Omega}_{\tau-}(\cdot): \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1].$$

Первая из них задается блочно-матричным представлением

$$\tilde{\Omega}_{\tau+}(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{1+}(\lambda) & \tilde{\omega}_{2+}(\lambda) \\ \tilde{\omega}_{3+}(\lambda) & \tilde{\omega}_{4+}(\lambda) \end{pmatrix}: \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (3.17)$$

где

$$\tilde{\omega}_{1+}(\lambda) = M_+(\lambda) - M_+(\lambda)(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}M_+(\lambda), \quad (3.18)$$

$$\tilde{\omega}_{2+}(\lambda) = -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_1} + M_+(\lambda)(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}, \quad (3.19)$$

$$\tilde{\omega}_{3+}(\lambda) = -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_0} + (\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}M_+(\lambda), \quad (3.20)$$

$$\tilde{\omega}_{4+}(\lambda) = -(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}, \quad (3.21)$$

в то время как вторая определена равенством

$$\tilde{\Omega}_{\tau-}(\lambda) = (\tilde{\Omega}_{\tau+}(\bar{\lambda}))^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \quad (3.22)$$

Из (3.16) следует, что формулы (3.18)–(3.21) могут быть представлены в виде

$$\tilde{\omega}_{1+}(\lambda) = M_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda), \quad (3.23)$$

$$\tilde{\omega}_{2+}(\lambda) = -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_1} - M_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda), \quad (3.24)$$

$$\tilde{\omega}_{3+}(\lambda) = \frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_0} - (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda), \quad (3.25)$$

$$\tilde{\omega}_{4+}(\lambda) = (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda). \quad (3.26)$$

Аналогичные рассуждения для функции $\tilde{\Omega}_{\tau-}(\cdot)$ с учетом (3.10) дают

$$\tilde{\Omega}_{\tau-}(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{1-}(\lambda) & \tilde{\omega}_{2-}(\lambda) \\ \tilde{\omega}_{3-}(\lambda) & \tilde{\omega}_{4-}(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \quad (3.27)$$

где $\tilde{\omega}_{j-}(\lambda)$, $j = 1, \dots, 4$ задаются формулами (3.23)–(3.26) с $M_-(\lambda)$, $\tilde{D}_1(\lambda)$ и $\tilde{D}_0(\lambda)$ вместо $M_+(\lambda)$, $C_0(\lambda)$ и $C_1(\lambda)$ соответственно (здесь $\tilde{D}_1(\cdot)$, $\tilde{D}_0(\cdot)$ – оператор-функции (3.8), (3.9)). Поскольку $H^n \in \mathcal{H}_0$ и $H^n \in \mathcal{H}_1$, то $H^n \oplus H^n \subset \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ и $H^n \oplus H^n \subset \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$. Поэтому каждой совокупности $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ мы можем сопоставить оператор-функцию $\Omega_\tau(\cdot) : \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \rightarrow [H^n \oplus H^n]$, заданную равенством

$$\Omega_\tau(\lambda) = P_{H^n \oplus H^n} \tilde{\Omega}_{\tau\pm}(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm. \quad (3.28)$$

В силу (3.22) и (3.28) функция $\Omega_\tau(\cdot)$ голоморфна и $\Omega_\tau^*(\bar{\lambda}) = \Omega_\tau(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

Для дальнейшего введем операторы $J_{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1} \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0]$ и $J_{H^n} \in [H^n \oplus H^n]$,

$$J_{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}_1} \\ I_{\mathcal{H}_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{H^n} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{H^n} \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

ТЕОРЕМА 17. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся D -тройка (2.26) для L . Тогда для всякой совокупности $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ соответствующая функция Грина (3.14) допускает представление

$$G_\tau(x, t, \lambda) = Y_0(x, \lambda) \left(\Omega_\tau(\lambda) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t - x) J_{H^n} \right) Y_0^*(t, \bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (3.30)$$

в котором $Y_0(\cdot, \lambda)$ – “каноническое” решение (2.22) и J_{H^n} – оператор (3.29).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_\pm(\cdot)$ – функции Вейля (2.30), (2.31). Введем оператор-функции $\tilde{S}_+(\lambda) (\in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0])$, $S_+(\lambda) (\in [\mathcal{H}_0, H^n \oplus H^n])$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, и $\tilde{S}_-(z) (\in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1])$, $S_-(z) (\in [\mathcal{H}_1, H^n \oplus H^n])$, $z \in \mathbb{C}_-$, полагая

$$\tilde{S}_+(\lambda) := (-M_+(\lambda) \quad I_{\mathcal{H}_0})^\top, \quad \tilde{S}_-(z) := (-M_-(z) \quad I_{\mathcal{H}_1})^\top, \quad (3.31)$$

и

$$S_+(\lambda) = P_{H^n \oplus H^n} \tilde{S}_+(\lambda) = \begin{pmatrix} -m(\lambda) & -M_{2+}(\lambda) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}_0' \rightarrow H^n \oplus H^n, \quad (3.32)$$

$$S_-(z) = P_{H^n \oplus H^n} \tilde{S}_-(z) = \begin{pmatrix} -m(z) & -M_{2-}(z) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}_1' \rightarrow H^n \oplus H^n. \quad (3.33)$$

Из (2.40) и (2.41) следует, что

$$\tilde{Z}_+(0, \lambda) = S_+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad \tilde{Z}_-(0, z) = S_-(z), \quad z \in \mathbb{C}_-. \quad (3.34)$$

Предположим, далее, что совокупность $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ задана формулами (2.2), (3.1), (3.2), и пусть $Y_{\tau+}(\cdot, \lambda)$, $Y_{\tau-}(\cdot, \lambda)$ – операторные решения уравнения (2.20) с начальными данными (3.11), (3.12). Рассмотрим также оператор-функции

$$A_+(\lambda) (\in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_+]), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad \text{и} \quad A_-(z) (\in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_-]), \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

заданные следующим образом:

$$A_+(\lambda) = \begin{pmatrix} -C_0(\lambda) & C_1(\lambda) \end{pmatrix}, \quad A_-(z) = \begin{pmatrix} -\tilde{D}_1(z) & \tilde{D}_0(z) \end{pmatrix},$$

где $C_j(\cdot)$ и $\tilde{D}_j(\cdot)$, $j \in \{0, 1\}$, определены в (2.2), (3.8) и (3.9). Тогда

$$\begin{aligned} A_+(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n &= \begin{pmatrix} -C_0(\lambda) \upharpoonright H^n & C_1(\lambda) \upharpoonright H^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\hat{C}_2(\lambda) & \hat{C}_1(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus H^n \rightarrow \mathcal{H}_+, \\ A_-(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n &= \begin{pmatrix} -\tilde{D}_1(\lambda) \upharpoonright H^n & \tilde{D}_0(\lambda) \upharpoonright H^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\hat{D}_2(\lambda) & \hat{D}_1(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus H^n \rightarrow \mathcal{H}_- \end{aligned}$$

и равенства (3.11), (3.12) дают

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{\tau+}^*(0, \bar{\lambda}) &= (\tilde{D}_1(\lambda) - \tilde{D}_0(\lambda)M_-(\lambda))^{-1} \begin{pmatrix} -\hat{D}_2(\lambda) & \hat{D}_1(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{D}_1(\lambda) - \tilde{D}_0(\lambda)M_-(\lambda))^{-1} A_-(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \\ \tilde{Y}_{\tau-}^*(0, \bar{\lambda}) &= (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} \begin{pmatrix} -\hat{C}_2(\lambda) & \hat{C}_1(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} A_+(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.34) получаем

$$\tilde{Z}_+(0, \lambda) \tilde{Y}_{\tau-}^*(0, \bar{\lambda}) = P_{H^n \oplus H^n} \tilde{S}_+(\lambda) (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} A_+(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \quad (3.35)$$

$$\tilde{Z}_-(0, \lambda) \tilde{Y}_{\tau+}^*(0, \bar{\lambda}) = P_{H^n \oplus H^n} \tilde{S}_-(\lambda) (\tilde{D}_1(\lambda) - \tilde{D}_0(\lambda)M_-(\lambda))^{-1} A_-(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{S}_+(\lambda) (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} A_+(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} -M_+(\lambda) \\ I_{\mathcal{H}_0} \end{pmatrix} (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} \begin{pmatrix} -C_0(\lambda) & C_1(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda) & -M_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda) \\ -(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda) & (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\Omega}_{\tau+}(\lambda) - \frac{1}{2} J_{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1} \end{aligned}$$

(здесь последнее равенство вытекает из (3.23)–(3.26) и (3.29)). Поэтому ввиду (3.28) и очевидного равенства $J_{H^n} = P_{H^n \oplus H^n} J_{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1} \upharpoonright H^n \oplus H^n$ имеем

$$\tilde{Z}_+(0, \lambda) \tilde{Y}_{\tau_-}^*(0, \bar{\lambda}) = P_{H^n \oplus H^n} \left(\tilde{\Omega}_{\tau_+}(\lambda) - \frac{1}{2} J_{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1} \right) \upharpoonright H^n \oplus H^n = \Omega_{\tau}(\lambda) - \frac{1}{2} J_{H^n}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Аналогично из (3.36) находим

$$\tilde{Z}_-(0, \lambda) \tilde{Y}_{\tau_+}^*(0, \bar{\lambda}) = \Omega_{\tau}(\lambda) - \frac{1}{2} J_{H^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

Отсюда следует, что оператор-функции (3.13) удовлетворяют равенству

$$\tilde{Z}_0(0, \lambda) \tilde{Y}_{\tau}^*(0, \bar{\lambda}) = \Omega_{\tau}(\lambda) - \frac{1}{2} J_{H^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-. \quad (3.37)$$

Рассмотрим, далее, соответствующую функцию Грина (3.14). Из (2.23) вытекает, что $Z_0(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda) \tilde{Z}_0(0, \lambda)$ и $Y_{\tau}(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda) \tilde{Y}_{\tau}(0, \lambda)$. Поэтому в силу (3.37)

$$\begin{aligned} G_{\tau}(x, t, \lambda) &= Y_0(x, \lambda) (\tilde{Z}_0(0, \lambda) \tilde{Y}_{\tau}^*(0, \bar{\lambda})) Y_0^*(t, \bar{\lambda}) \\ &= Y_0(x, \lambda) \left(\Omega_{\tau}(\lambda) - \frac{1}{2} J_{H^n} \right) Y_0^*(t, \bar{\lambda}), \quad \text{если } x > t, \\ G_{\tau}(x, t, \lambda) &= Y_0(x, \lambda) (\tilde{Y}_{\tau}(0, \lambda) \tilde{Z}_0^*(0, \bar{\lambda})) Y_0^*(t, \bar{\lambda}) \\ &= Y_0(x, \lambda) \left(\Omega_{\tau}^*(\bar{\lambda}) - \frac{1}{2} J_{H^n}^* \right) Y_0^*(t, \bar{\lambda}) \\ &= Y_0(x, \lambda) \left(\Omega_{\tau}(\lambda) + \frac{1}{2} J_{H^n} \right) Y_0^*(t, \bar{\lambda}), \quad \text{если } x < t, \end{aligned}$$

что равносильно (3.30).

Сравнивая (3.30) с (1.2) и принимая во внимание теорему 16, заключаем, что функция $\Omega_{\tau}(\cdot)$ является характеристической матрицей в смысле Штрауса [1], [2]. Это замечание позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Оператор-функцию $\Omega(\cdot) = \Omega_{\tau}(\cdot): \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \rightarrow [H^n \oplus H^n]$, определенную соотношениями (3.17)–(3.22) и (3.28), назовем *характеристической матрицей* (х.м.) оператора L_0 , отвечающей совокупности $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ или, что равносильно, обобщенной резольвенте $R(\lambda) = R_{\tau}(\lambda)$ (см. теорему 13).

Х.м. $\Omega_{\tau}(\cdot)$ будем называть *канонической*, если она отвечает канонической резольвенте $R_{\tau}(\lambda)$ или, что то же самое, если $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Сравнение представлений (3.14) и (3.30) функции Грина показывает, что в случае $\dim H = 1$ (скалярный случай) и $n_+(L_0) = n_-(L_0) =: m$ операторное решение $Y_{\tau}(\cdot, \lambda)$ в (3.14) содержит меньше компонент, чем $Y_0(\cdot, \lambda)$ в (3.30) (более точно, m и $2n$ компонент соответственно). Поэтому мы полагаем, что формула (3.14) для функции Грина может быть полезной в последующем.

4. Описание характеристических матриц и их свойства

Ясно, что формулы (3.17)–(3.22) и (3.28) описывают, по сути, все х.м. оператора L_0 с помощью “граничного” параметра $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. То же описание, но в несколько ином виде, приведено в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 20. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся D -тройка (2.26) для L , $M_{\pm}(\cdot)$ – функции Вейля (2.30), (2.31) и $S_{\pm}(\cdot)$ – оператор-функции (3.32), (3.33). Кроме того, пусть A_0 – максимальное симметрическое расширение (2.32) и

$$R_0(\lambda) := \begin{cases} (A_0 - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ (A_0^* - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{cases}$$

– обобщенная резольвента оператора L_0 . Тогда

1) х.м. оператора L_0 , отвечающая обобщенной резольвенте $R_0(\lambda)$, имеет вид

$$\Omega_0(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{H^n} \\ -\frac{1}{2}I_{H^n} & 0 \end{pmatrix} : H^n \oplus H^n \rightarrow H^n \oplus H^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-; \quad (4.1)$$

2) равенство

$$\Omega(\lambda) (= \Omega_{\tau}(\lambda)) = \Omega_0(\lambda) - S_+(\lambda)(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}S_-^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.2)$$

задает биективное соответствие между всеми х.м. $\Omega(\lambda)$ оператора L_0 и всеми совокупностями $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$; при этом каноническим х.м. $\Omega(\lambda)$ в (4.2) соответствуют $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega_0(\lambda)$ – оператор-функция (4.1). Тогда ввиду (3.28) и (3.17) при $\lambda \in \mathbb{C}_+$

$$\begin{aligned} \Omega_{\tau}(\lambda) &= P_{H^n \oplus H^n} \begin{pmatrix} M_+(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_1} \\ -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_0} & 0 \end{pmatrix} \upharpoonright H^n \oplus H^n \\ &\quad - P_{H^n \oplus H^n} \begin{pmatrix} -M_+(\lambda) \\ I_{\mathcal{H}_0} \end{pmatrix} (\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} (-M_-^*(\bar{\lambda})I_{\mathcal{H}_1}) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \end{aligned}$$

где

$$P_{H^n \oplus H^n} \begin{pmatrix} M_+(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_1} \\ -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_0} & 0 \end{pmatrix} \upharpoonright H^n \oplus H^n = \begin{pmatrix} P_{H^n} M_+(\lambda) \upharpoonright H^n & -\frac{1}{2}I_{H^n} \\ -\frac{1}{2}I_{H^n} & 0 \end{pmatrix} = \Omega_0(\lambda).$$

Отсюда и из (3.31)–(3.33) вытекает (4.2).

Пусть, далее, $\tau_0 = \{\tau_{0+}, \tau_{0-}\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – совокупность вида

$$\tau_{0+}(\lambda) \equiv \theta_0 := \{0\} \oplus \mathcal{H}_1 \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad \tau_{0-}(\lambda) \equiv \theta_0^{\times}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

Тогда в силу (2.9) обобщенная резольвента $R_{\tau_0}(\lambda)$, заданная равенствами (3.3), (3.4), совпадает с $R_0(\lambda)$. С другой стороны, выполнено $(\tau_{0+}(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} = 0$ и согласно (4.2) $\Omega_{\tau_0}(\lambda) = \Omega_0(\lambda)$. Отсюда следует утверждение 1) теоремы.

В дальнейшем будет полезна следующая вспомогательная лемма, которую мы приводим без доказательства.

ЛЕММА 21. Пусть $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – совокупность голоморфных пар (2.2), (2.3) и $K_j(\lambda) \in [\mathcal{K}_-, \mathcal{H}_j]$, $j \in \{0, 1\}$, – оператор-функции вида

$$K_0(\lambda) = (-D_1^*(\bar{\lambda})iD_{02}^*(\bar{\lambda}))^\top: \mathcal{K}_- \rightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad K_1(\lambda) = D_{01}^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (4.3)$$

Пусть, далее, $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$ – гильбертовы пространства и

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \\ a_3(\lambda) & a_4(\lambda) \end{pmatrix}: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\gamma}(\lambda) = (\tilde{\gamma}_1(\lambda)\tilde{\gamma}_2(\lambda)): \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.5)$$

– оператор-функции такие, что $0 \in \rho(\tau_+(\lambda) + a_4(\lambda))$ и справедливо тождество

$$A(\mu) - A^*(\lambda)P_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1} + iP_{\mathcal{H}_2} = (\mu - \bar{\lambda})\tilde{\gamma}^*(\lambda)\tilde{\gamma}(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.6)$$

которое в силу (4.4) и (4.5) равносильно соотношениям

$$a_1(\mu) - a_1^*(\lambda) = (\mu - \bar{\lambda})\tilde{\gamma}_1^*(\lambda)\tilde{\gamma}_1(\mu), \quad a_2(\mu) - a_3^*(\lambda)P_1 = (\mu - \bar{\lambda})\tilde{\gamma}_1^*(\lambda)\tilde{\gamma}_2(\mu), \quad (4.7)$$

$$a_4(\mu) - a_4^*(\lambda)P_1 + iP_2 = (\mu - \bar{\lambda})\tilde{\gamma}_2^*(\lambda)\tilde{\gamma}_2(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (4.8)$$

Обозначим через $\varphi_\tau(\lambda) \in [\mathcal{H}]$ преобразование функции $\tau_+(\cdot)$, заданное равенством

$$\varphi_\tau(\lambda) = a_1(\lambda) - a_2(\lambda)(\tau_+(\lambda) + a_4(\lambda))^{-1}a_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (4.9)$$

Тогда справедливо тождество

$$\begin{aligned} \varphi_\tau(\mu) - \varphi_\tau^*(\lambda) &= (\mu - \bar{\lambda})\gamma_\tau^*(\lambda)\gamma_\tau(\mu) - \beta^*(\lambda)(D_1(\bar{\lambda})D_{01}^*(\bar{\mu}) \\ &\quad - D_{01}(\bar{\lambda})D_1^*(\bar{\mu}) + iD_{02}(\bar{\lambda})D_{02}^*(\bar{\mu}))\beta(\mu), \end{aligned} \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.10)$$

в котором $\gamma_\tau(\lambda) \in [\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ и $\beta(\lambda) \in [\mathcal{H}, \mathcal{K}_-]$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, – оператор-функции вида

$$\gamma_\tau(\lambda) = \tilde{\gamma}_1(\lambda) - \tilde{\gamma}_2(\lambda)(\tau_+(\lambda) + a_4(\lambda))^{-1}a_3(\lambda), \quad (4.11)$$

$$\beta(\lambda) = (K_1(\lambda) + a_4(\lambda)K_0(\lambda))^{-1}a_3(\lambda). \quad (4.12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся D -тройка (2.26) для L , $M_+(\cdot)$ -функция Вейля для Π и $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \tilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – совокупность голоморфных пар (2.2), заданная блочными представлениями (3.1) и (3.2). Тогда

1) для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ существует единственная пара оператор-функций

$$u_{j\tau}(\cdot, \lambda) \in L_2'[H^n, H], \quad j \in \{1, 2\},$$

удовлетворяющих уравнению (2.20) и граничным условиям

$$\begin{aligned} &(\widehat{C}_1(\lambda)u_{j\tau}^{(1)}(0, \lambda) + \widehat{C}_2(\lambda)u_{j\tau}^{(2)}(0, \lambda))\widehat{h} + (C_0'(\lambda)\Gamma_0' - C_1'(\lambda)\Gamma_1')(u_{j\tau}(t, \lambda)\widehat{h}) \\ &= (-1)^{j-1}\widehat{C}_j(\lambda)\widehat{h}, \quad \widehat{h} \in H^n, \quad j \in \{1, 2\}; \end{aligned} \quad (4.13)$$

2) оператор-функции $u_{j\tau}(\cdot, \lambda)$ и $Z_+(\cdot, \lambda)$ (см. (2.37)) связаны равенствами

$$u_{j\tau}(t, \lambda) = (-1)^{j-1} Z_+(t, \lambda) (C_0(\lambda) - C_1(\lambda) M_+(\lambda))^{-1} \widehat{C}_j(\lambda), \quad j \in \{1, 2\}. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1) следует, что условия (4.13) можно представить в виде

$$(C_0(\lambda) \Gamma_0 - C_1(\lambda) \Gamma_1) (u_{j\tau}(t, \lambda) \widehat{h}) = (-1)^{j-1} \widehat{C}_j(\lambda) \widehat{h}, \quad \widehat{h} \in H^n, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (4.15)$$

Так как в силу первого равенства в (2.39) и леммы 2.10 в [19]

$$(C_0(\lambda) \Gamma_0 - C_1(\lambda) \Gamma_1) (Z_+(t, \lambda) h_0) = (C_0(\lambda) - C_1(\lambda) M_+(\lambda)) h_0, \quad h_0 \in \mathcal{H}_0,$$

то пара функций (4.14) удовлетворяет (4.15) и, поэтому, (4.13). Единственность такой пары следует из включения $\lambda \in \rho(\widetilde{A}(\lambda))$, где $\widetilde{A}(\lambda) \in \text{Ext}_{L_0}$ – расширение (3.3).

Далее мы доказываем, что х.м. $\Omega_\tau(\cdot)$ является неванлинновской оператор-функцией. Это утверждение следует из некоторого тождества для $\Omega_\tau(\cdot)$, которое по нашему мнению представляет самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. Пусть при условиях предложения 22 $u_{j\tau}(\cdot, \lambda)$, $j \in \{1, 2\}$, – введенные в этом предложении оператор функции и

$$U_\tau(t, \lambda) := (u_{2\tau}(t, \lambda) u_{1\tau}(t, \lambda)): H^n \oplus H^n \rightarrow H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (4.16)$$

Кроме того, пусть $D_{01}(\lambda)$ и $D_{02}(\lambda)$ – элементы блочного представления (2.3), $K_0(\lambda)$ и $K_1(\lambda)$ – оператор-функции (4.3) и $\beta(\lambda) (\in [H^n \oplus H^n, \mathcal{H}_-])$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, – оператор-функция, заданная блочным представлением

$$\beta(\lambda) = (-(K_1(\lambda) + M_+(\lambda) K_0(\lambda))^{-1} M_+(\lambda) \upharpoonright H^n \quad (K_1(\lambda) + M_+(\lambda) K_0(\lambda))^{-1} \upharpoonright H^n). \quad (4.17)$$

Тогда соответствующая х.м. $\Omega_\tau(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \Omega_\tau(\mu) - \Omega_\tau^*(\lambda) &= (\mu - \bar{\lambda}) \int_0^b U_\tau^*(t, \lambda) U_\tau(t, \mu) dt - \beta^*(\lambda) (D_1(\bar{\lambda}) D_{01}^*(\bar{\mu}) \\ &\quad - D_{01}(\bar{\lambda}) D_{01}^*(\bar{\mu}) + i D_{02}(\bar{\lambda}) D_{02}^*(\bar{\mu})) \beta(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$(\text{Im } \mu)^{-1} \text{Im } \Omega_\tau(\mu) \geq \int_0^b U_\tau^*(t, \mu) U_\tau(t, \mu) dt, \quad \mu \in \mathbb{C}_+, \quad (4.19)$$

в которых интеграл сходится сильно:

$$\int_0^b U_\tau^*(t, \lambda) U_\tau(t, \mu) dt = s\text{-}\lim_{\eta \uparrow b} \int_0^\eta U_\tau^*(t, \lambda) U_\tau(t, \mu) dt.$$

Для канонической х.м. $\Omega_\tau(\cdot)$ тождество (4.18) принимает вид

$$\Omega_\tau(\mu) - \Omega_\tau^*(\lambda) = (\mu - \bar{\lambda}) \int_0^b U_\tau^*(t, \lambda) U_\tau(t, \mu) dt, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

а неравенство (4.19) переходит в равенство.

Из формулы (4.19) следует, что $\Omega_\tau(\cdot)$ – неванлинновская оператор-функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале тождество (4.18). В силу (4.2) х.м. $\Omega_\tau(\cdot)$ задается преобразованием вида (4.9) с матрицей коэффициентов

$$A_\Pi(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \\ a_3(\lambda) & a_4(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Omega_0(\lambda) & S_+(\lambda) \\ S_-^*(\bar{\lambda}) & M_+(\lambda) \end{pmatrix} \in [(H^n \oplus H^n) \oplus \mathcal{H}_0, (H^n \oplus H^n) \oplus \mathcal{H}_1].$$

Пусть $\gamma_+(\cdot) - \gamma$ -поле (2.10). Покажем, что матрица $A_\Pi(\lambda)$ удовлетворяет соотношениям (4.7), (4.8) (и, следовательно, (4.6)) с оператор-функциями

$$\tilde{\gamma}_1(\lambda) := (-\gamma_+(\lambda) \upharpoonright H^n \quad 0) : H^n \oplus H^n \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \tilde{\gamma}_2(\lambda) := \gamma_+(\lambda) (\in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{H}]). \quad (4.20)$$

Действительно, (4.8) и первое равенство в (4.7) непосредственно следуют из (2.13). Докажем второе равенство в (4.7), которое в нашем случае принимает вид

$$S_+(\mu) - S_-(\bar{\lambda})P_1 = (\mu - \bar{\lambda}) \begin{pmatrix} -P_{H^n}\gamma_+^*(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \gamma_+(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+ \quad (4.21)$$

(здесь P_{H^n} — ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ ($= H^n \oplus \mathcal{H}_0'$) на H^n). Так как $H^n \subset \mathcal{H}_1$, то $P_{H^n}P_1 = P_{H^n}$, $P_{H^n}P_2 = 0$ и в силу (3.32), (3.33) имеем

$$\begin{aligned} S_+(\mu) &= (-P_{H^n}M_+(\mu) \quad P_{H^n})^\top : \mathcal{H}_0 \rightarrow H^n \oplus H^n, \\ S_-(\bar{\lambda})P_1 &= (-P_{H^n}M_+^*(\lambda) \quad P_{H^n})^\top P_1 = (-P_{H^n}M_+^*(\lambda)P_1 \quad P_{H^n})^\top : \mathcal{H}_0 \rightarrow H^n \oplus H^n. \end{aligned}$$

Применяя, далее, оператор P_{H^n} к тождеству (2.13), получим

$$P_{H^n}M_+(\mu) - P_{H^n}M_+^*(\lambda)P_1 = (\mu - \bar{\lambda})P_{H^n}\gamma_+^*(\lambda)\gamma_+(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

и непосредственный подсчет с учетом трех последних равенств дает (4.21).

Теперь из леммы 21 следует тождество (4.10) с $\Omega_\tau(\cdot)$ вместо $\varphi_\tau(\cdot)$; при этом $\gamma_\tau(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ задаются равенствами (4.11), (4.12), в которых $a_4(\lambda) = M_+(\lambda)$ и

$$a_3(\lambda) = S_-^*(\bar{\lambda}) = (-M_+(\lambda) \upharpoonright H^n \quad I_{H^n}) : H^n \oplus H^n \rightarrow \mathcal{H}_1 \quad (4.22)$$

(здесь мы воспользовались формулой (3.33)). Поэтому функция $\beta(\cdot)$ имеет вид (4.17) и для доказательства тождества (4.18) остается показать, что

$$\gamma_\tau^*(\lambda)\gamma_\tau(\mu) = \int_0^b U_\tau^*(t, \lambda)U_\tau(t, \mu) dt := s\text{-}\lim_{\eta \uparrow b} \int_0^\eta U_\tau^*(t, \lambda)U_\tau(t, \mu) dt. \quad (4.23)$$

Используя (4.20), (4.22) и (3.16), получим

$$\begin{aligned} \gamma_\tau(\lambda) &= (-\gamma_+(\lambda) \upharpoonright H^n 0) + \gamma_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda) (-M_+(\lambda) \upharpoonright H^n \quad I_{H^n}) \\ &= \gamma_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} (-C_0(\lambda) \upharpoonright H^n \quad C_1(\lambda) \upharpoonright H^n) \\ &= \gamma_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} \begin{pmatrix} -\hat{C}_2(\lambda) & \hat{C}_1(\lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.39), (4.14) следует, что

$$(\gamma_\tau(\lambda)\tilde{h})(t) = U_\tau(t, \lambda)\tilde{h}, \quad \tilde{h} \in H^n \oplus H^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (4.24)$$

Применяя теперь лемму 4.6, 3) из [19] к функции $U_\tau(\cdot, \lambda)$, получим равенство

$$\gamma_\tau^*(\lambda)f = \int_0^b U_\tau^*(t, \lambda)f(t) dt := \lim_{\eta \uparrow b} \int_0^\eta U_\tau^*(t, \lambda)f(t) dt, \quad f = f(t) \in \mathfrak{H},$$

которое вместе с (4.24) дает (4.23).

Остальные утверждения предложения следуют из тождества (4.18) и неравенства в (2.5), которое становится равенством в случае $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

5. Частные случаи

5.1. Случай распадающейся граничной тройки. В этом случае полученные выше результаты можно сформулировать в несколько упрощенном виде. Именно, непосредственно из теорем 13, 16, 20 и следствия 14 вытекают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 24. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – распадающаяся граничная тройка (2.26) для L (см. определение 10) и $M(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля (2.42). Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Справедливы утверждения теоремы 13 и следствия 14, в которых $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H})$ – неванлинновская пара (2.8), заданная блочными представлениями

$$\begin{aligned} C_0(\lambda) &= \begin{pmatrix} \widehat{C}_2(\lambda) & C'_0(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}, \\ C_1(\lambda) &= \begin{pmatrix} \widehat{C}_1(\lambda) & C'_1(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}, \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-. \quad (5.1)$$

2) Пусть $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H})$ – неванлинновская пара (2.8), заданная блочными представлениями (5.1). Тогда соответствующая функция Грина $G_\tau(x, t, \lambda)$ задается равенством (3.14), в котором $Z_0(\cdot, \lambda)$ – фундаментальное решение (2.43) и $Y_\tau(\cdot, \lambda) : \Delta \rightarrow [\mathcal{H}, H]$ – операторное решение уравнения (2.20), определенное начальными условиями

$$\tilde{Y}_\tau(0, \lambda) = \begin{pmatrix} -\widehat{C}_2^*(\bar{\lambda}) & \widehat{C}_1^*(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}^\top (C_0^*(\bar{\lambda}) - M(\lambda)C_1^*(\bar{\lambda}))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-. \quad (5.2)$$

3) Формулы (3.14) и (3.15) задают биективное соответствие между обобщенными (каноническими) резольвентами $R(\lambda)$ оператора L_0 и неванлинновскими парами $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H})$ (соответственно $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$).

ТЕОРЕМА 25. Пусть выполнены условия теоремы 24. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Характеристическая матрица оператора L_0 , отвечающая паре $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H})$, задается равенством

$$\Omega_\tau(\lambda) = P_{H^n \oplus H^n} \tilde{\Omega}_\tau(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-,$$

в котором $\tilde{\Omega}_\tau(\cdot) : \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}]$ – оператор-функция вида

$$\tilde{\Omega}_\tau(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) - M(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}M(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}} + M(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} \\ -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}} + (\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}M(\lambda) & -(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

2) Пусть $A_0 \in \text{Ext}_{L_0}$ – самосопряженное расширение (2.32) и

$$S(\lambda) := \begin{pmatrix} -m(\lambda) & -M_2(\lambda) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}' \rightarrow H^n \oplus H^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-. \quad (5.4)$$

Тогда

- (i) х.м. $\Omega_0(\cdot)$ оператора L_0 , отвечающая канонической резольвенте $R_0(\lambda) = (A_0 - \lambda)^{-1}$, имеет вид (4.1);
- (ii) равенство

$$\Omega(\lambda) (= \Omega_\tau(\lambda)) = \Omega_0(\lambda) - S(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}S^*(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (5.5)$$

задает биективное соответствие между х.м. $\Omega(\lambda)$ оператора L_0 и парами $\tau \in \tilde{R}(\mathcal{H})$; при этом х.м. будет канонической тогда и только тогда, когда $\tau \in \tilde{R}^0(\mathcal{H})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 26. 1) Из (2.29) следует, что при условиях теорем 24 и 25 имеет место равенство индексов дефекта

$$n_{b+} = n_{b-} \quad \text{и} \quad n_+(L_0) = n_-(L_0).$$

2) В рассматриваемом случае очевидные упрощения возникают также в предложениях 22 и 23.

5.2. Случай минимальных индексов дефекта. Будем говорить, что операторы $K_0, K_1 \in [H^n]$ образуют самосопряженную пару $K = \{K_0, K_1\}$, если $\text{Ker } K_0 \cap \text{Ker } K_1 = \{0\}$ и равенство $\theta = \{\{K_0\hat{h}, K_1\hat{h}\} : \hat{h} \in H^n\}$ задает самосопряженное отношение $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}(H^n)$. Каждой такой паре K сопоставим операторное решение $\varphi_K(\cdot, \lambda) : \Delta \rightarrow [H^n, H]$ уравнения (2.20) с начальными данными $\varphi_K^{(1)}(0, \lambda) = K_0$, $\varphi_K^{(2)}(0, \lambda) = K_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. Пусть $n_{b\pm}$ – индексы дефекта дифференциального выражения (2.17) в точке b (см. определение 9). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $n_{b+} = n_{b-} = 0$;
- 2) существуют самосопряженная пара K и точки $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $\mu \in \mathbb{C}_-$ такие, что

$$\int_0^b \|\varphi_K(t, \lambda)\hat{h}\|^2 dt = \int_0^b \|\varphi_K(t, \mu)\hat{h}\|^2 dt = \infty, \quad \hat{h} \in H^n, \quad \hat{h} \neq 0; \quad (5.6)$$

- 3) (5.6) выполняется для всех самосопряженных пар K и всех $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. Если $\dim H < \infty$, то утверждения 1)–3) равносильны равенствам

$$n_+(L_0) = n_-(L_0) = n \cdot \dim H,$$

означающим минимальность индексов дефекта оператора L_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = \{K_0, K_1\}$ – самосопряженная пара,

$$\theta = \{\{K_0\hat{h}, K_1\hat{h}\} : \hat{h} \in H^n\} \in \tilde{\mathcal{C}}(H^n)$$

и $L_\theta \in \text{Ext}_{L_0}$ – симметрическое расширение (2.25). Для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ положим

$$H_\lambda = \{\hat{h} \in H^n : \varphi_K(t, \lambda)\hat{h} \in \mathfrak{H}\}.$$

Так как $\mathcal{D}(L_\theta^*) = \{y \in \mathcal{D} : \tilde{y}(0) \in \theta\}$, то отображение $H_\lambda \ni \hat{h} \rightarrow \varphi_K(t, \lambda)\hat{h}$ является линейной биекцией H_λ на $\mathfrak{N}_\lambda(L_\theta)$. Отсюда следуют требуемые эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

Последнее утверждение вытекает из равенства $n_\pm(L_0) = n \cdot \dim H + n_{b\pm}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28. Пусть выражение (2.17) удовлетворяет хотя бы одному (и, следовательно, всем) условиям 1)-3) из предложения 27. Тогда

- 1) единственная распадающаяся граничная тройка для L имеет вид $\Pi = \{H^n, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\Gamma_0 y = y^{(2)}(0), \quad \Gamma_1 y = -y^{(1)}(0), \quad y \in \mathcal{D}; \quad (5.7)$$

- 2) соответствующее самосопряженное расширение A_0 задается равенствами

$$\mathcal{D}(A_0) = \{y \in \mathcal{D} : y^{(2)}(0) = 0\}, \quad A_0 = L \upharpoonright \mathcal{D}(A_0); \quad (5.8)$$

- 3) для всякого $\lambda \in \rho(A_0)$ существует единственное операторное решение $v_0(\cdot, \lambda) \in L_2'[H^n, H]$ уравнения (2.20) такое, что $v_0^{(2)}(0, \lambda) = I_{H^n}$; кроме того, m -функция расширения (5.8) (см. замечание 12) однозначно определяется условием

$$-c(t, \lambda)m(\lambda) + s(t, \lambda) \in L_2'[H^n, H], \quad \lambda \in \rho(A_0),$$

в силу которого $m(\lambda) = -v_0^{(1)}(0, \lambda)$;

- 4) γ -поле и функция Вейля для граничной тройки (5.7) задаются равенствами

$$(\gamma(\lambda)\hat{h})(t) = v_0(t, \lambda)\hat{h}, \quad \hat{h} \in H^n, \quad \lambda \in \rho(A_0), \quad M(\lambda) = m(\lambda), \quad \lambda \in \rho(A_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из формулы (2.29), а остальные утверждения – из замечания 12.

В случае минимальных дефектов полученные ранее результаты принимают наиболее простой вид. Именно, из теорем 24, 25 и предложения 28 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 29. При условиях предложения 28 справедливы теоремы 24 и 25 со следующими изменениями:

- 1) $\mathcal{H} = H^n$ и, следовательно, неванлинновская пара (2.8) задается равенством

$$\tau(\lambda) = \{(C_0(\lambda), C_1(\lambda)); H^n\} \in \tilde{R}(H^n), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-; \quad (5.9)$$

кроме того, граничное условие (3.6) принимает вид

$$C_1(\lambda)y^{(1)}(0) + C_0(\lambda)y^{(2)}(0) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-;$$

- 2) функция Грина, отвечающая паре (5.9), задается равенством

$$G_\tau(x, t, \lambda) = \begin{cases} v_0(x, \lambda)\varphi_\tau^*(t, \bar{\lambda}), & x > t, \\ \varphi_\tau(x, \lambda)v_0^*(t, \bar{\lambda}), & x < t, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-,$$

где $\varphi_\tau(\cdot, \lambda) : \Delta \rightarrow [H^n, H]$ – операторное решение уравнения (2.20) такое, что

$$\tilde{\varphi}_\tau(0, \lambda) = (-C_0^*(\bar{\lambda}) \quad C_1^*(\bar{\lambda}))^\top (C_0^*(\bar{\lambda}) - m(\lambda)C_1^*(\bar{\lambda}))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-;$$

- 3) *х.м.* $\Omega_\tau(\cdot)$ задается правой частью равенства (5.3) с $M(\lambda) = m(\lambda)$;
 4) в формуле (5.5)

$$M(\lambda) = m(\lambda) \quad \text{и} \quad S(\lambda) = \begin{pmatrix} -m(\lambda) & I_{H^n} \end{pmatrix}^\top : H^n \rightarrow H^n \oplus H^n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 30. 1) Для случая $\dim H < \infty$ предложение 28 доказано в [21].

2) Для скалярного выражения Штурма–Лиувилля $l[y] = -y'' + qu$ на полуоси $[0, \infty)$ с индексами дефекта $n_\pm(L_0) = 1$ (случай предельной точки) теорема 24 и утверждение 1) теоремы 25 доказаны в [12], [3]. Отметим также работы [13], [14] в которых аналогичные результаты получены для конечномерных гамильтоновых систем в случае предельной точки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Штраус, “Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **21**:6 (1957), 785–808.
- [2] В. М. Брук, “Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка в пространстве вектор-функций”, *Матем. заметки*, **15**:6 (1974), 945–954.
- [3] A. Dijksma, H. Langer, “Operator theory and ordinary differential operators”, *Lectures on Operator Theory and its Applications* (Waterloo, ON, 1994), Fields Inst. Monogr., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 73–139.
- [4] P. A. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson, “Sturm–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter. I”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **45**:3 (2002), 631–645.
- [5] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [6] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [7] V. A. Derkach, M. M. Malamud, “Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps”, *J. Funct. Anal.*, **95**:1 (1991), 1–95.
- [8] V. Mogilevskii, “Boundary triplets and Titchmarsh–Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **15**:3 (2009), 280–300.
- [9] В. М. Брук, “Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии”, *Матем. сб.*, **100**:2 (1976), 210–216.
- [10] V. Mogilevskii, “Boundary triplets and Krein type resolvent formula for symmetric operators with unequal defect numbers”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **12**:3 (2006), 258–280.
- [11] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.
- [12] И. С. Кац, “Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **27**:5 (1963), 1081–1112.
- [13] A. Dijksma, H. Langer, H. de Snoo, “Hamiltonian systems with eigenvalue depending boundary conditions”, *Contributions to Operator Theory and its Applications* (Mesa, AZ, 1987), Oper. Theory Adv. Appl., **35**, Birkhäuser, Basel, 1988, 37–83.
- [14] A. Dijksma, H. Langer, H. de Snoo, “Eigenvalues and pole functions of Hamiltonian systems with eigenvalue depending boundary conditions”, *Math. Nachr.*, **161**:1 (1993), 107–154.

- [15] V. A. Derkach, S. Hassi, M. M. Malamud, H. S. V. de Snoo, “Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **6**:3 (2000), 24–55.
- [16] V. Derkach, S. Hassi, M. Malamud, H. de Snoo, “Boundary relations and generalized resolvents of symmetric operators”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:1 (2009), 17–60.
- [17] V. Mogilevskii, “Nevanlinna type families of linear relations and the dilation theorem”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **12**:1 (2006), 38–56.
- [18] Ф. С. Рофе-Бекетов, “О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций”, *Теория функц., функц. анализ и их прилож.*, 1969, № 8, 3–24.
- [19] V. Mogilevskii, “Fundamental solutions of boundary problems and resolvents of differential operators”, *Укр. матем. вестн.*, **6**:4 (2009), 492–530.
- [20] M. M. Malamud, V. I. Mogilevskii, “Krein type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **8**:4 (2002), 72–100.
- [21] В. А. Деркач, М. М. Маламуд, “Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов”, *Укр. матем. журн.*, **44**:4 (1992), 435–459.

В. И. Могилевский

Луганский национальный педагогический университет

им. Тараса Шевченко, Украина

E-mail: vim@mail.dsip.net

Поступило

20.09.2009

Исправленный вариант

05.11.2010