Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Тихомиров, Пунктуальные схемы Гильберта малой длины в размерностях 2 и 3, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 414–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:06:17

УДК 517.2

ПУНКТУАЛЬНЫЕ СХЕМЫ ГИЛЬБЕРТА МАЛОЙ ДЛИНЫ В РАЗМЕРНОСТЯХ 2 И 3

С. А. Тихомиров

В статье исследуется бирегулярная геометрия пунктуальных схем Гильберта в размерностях 2 и 3, т.е. схем, параметризующих 0-мерные подсхемы заданной длины с носителем в фиксированной точке гладкой поверхности и гладкого трехмерного многообразия. Точное бирегулярное описание этих схем было известно только в тривиальных случаях длины 3 и 4 в размерности 2. В статье рассматривается следующий случай длины 5 в размерности 2 и два первых нетривиальных случая длины 3 и 4 в размерности 3. Дается подробное описание бирегулярных свойств пунктуальных схем Гильберта и их естественных десингуляризаций многообразиями полных пунктуальных флагов.

Библиография: 8 названий.

Введение

Под *пунктуальной схемой Гильберта длины d* на поверхности (соответственно в пространстве) понимается схема Гильберта $H_d(0) = \text{Hilb}^d \text{Spec } k[[x, y]]_{\text{red}}$ (соответственно $H_d(0) = \text{Hilb}^d \text{Spec } k[[x, y, z]]_{\text{red}}$), обозначаемая также для краткости через $\text{Hilb}^d k[[x, y]]$ (соответственно через $\text{Hilb}^d k[[x, y, z]]$), параметризующая 0-мерные подсхемы длины d с носителем в фиксированной точке 0 поверхности (соответственно пространства). Исследование общих свойств схем $H_d(0)$, начатое в работах Бриансона [1], Ярробино [2], Грангера [3] и других, в настоящее время представлено довольно большим списком работ (см., например, обзорные статьи [4], [5]). Однако точное бирегулярное описание этих схем было известно только в тривиальных случаях $d = 1$ и 2 , а также в первых нетривиальных случаях $d = 3$ и 4 в размерности 2 (см. [6]). В настоящей статье мы рассматриваем следующий случай $d = 5$ в размерности 2 и два первых нетривиальных случая $d = 3$ и 4 в размерности 3. В этих случаях детально исследуется бирегулярная геометрия схем $H_d(0)$ и их естественная десингуляризация многообразиями полных пунктуальных флагов. Основной метод исследования состоит в том, что схема Z_d с носителем в точке 0 получается из схемы Z_{d-1} операций “добавления точки” 0, выражаемой на схемном языке точной тройкой $0 \rightarrow k(0) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_d} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{d-1}} \rightarrow 0$; при этом всевозможные такие расширения, классифицируемые соответствующими Ext-группами, дают описание пунктуальных схем Гильберта $H_d(0)$. Основное поле k считается алгебраически замкнутым.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS-OPEN-97-2072.

1. Пунктуальная схема Гильберта $\text{Hilb}^5 k[[x, y]]$

1.1. Предварительные сведения и обозначения. В этом пункте рассматривается случай размерности 2. Для удобства в качестве исходной поверхности возьмем проективную плоскость $\mathbf{P}^2$. Сначала мы приведем известные факты о пунктуальных схемах Гильберта $H_5(0) = \text{Hilb}^5 k[[x, y]]$ и многообразиях полных пунктуальных флагов X_4 (см. определение ниже), которые нам потребуются в дальнейшем. Согласно классификации Бриансона [1] имеем следующие пять классов изоморфизма 0-мерных пунктуальных схем длины 5 в размерности 2, определяемые своими идеалами $\mathcal{I}$ в кольце $k[[x, y]]$:

- (i) $\mathcal{I} = (y, x^5)$;
- (ii) $\mathcal{I} = (y^2 + x^3, xy)$;
- (iii) $\mathcal{I} = (y^2, xy, x^4)$;
- (iv) $\mathcal{I} = (x^2 + y^2, x^2y, x^3)$;
- (v) $\mathcal{I} = (y^2, x^2y, x^3)$.

При этом $H_5^c(0) = \{Z_5 \in H_5(0) \mid Z_5 - \text{схема типа (i), т.е. криволинейная схема}\}$ – плотное открытое множество в $H_5(0)$, и согласно Грангеру [3] $\text{Sing } H_5(0) = H_5(0) \setminus H_5^c(0) = \{Z_5 \in H_5(0) \mid Z_5 - \text{схема одного из типов (ii)–(v)}\}$ – замыкание в $H_5(0)$ множества $\text{Sing } H_5(0)^* = \{Z_5 \in H_5(0) \mid Z_5 - \text{схема типа (ii)}\}$, причем $\text{codim}_{H_5(0)} \text{Sing } H_5(0) = 1$ и в окрестности общей точки из $\text{Sing } H_5(0)$ многообразие $H_5(0)$ аналитически изоморфно $\text{Sing } H_5(0) \times C$, где C – кривая с уравнением $\{x^2 + y^3 = 0\}$ в $\mathbf{A}^2$. Кроме того, заметим, что $K := \{Z_5 \in H_5(0) \mid Z_5 - \text{схема типа (v)}\}$ – неприводимая кривая, изоморфная $\mathbf{P}^1$.

Далее, как известно [1], [3], для любого $d \geq 1$ $H_d^c(0) := \{Z_d \in H_d(0) \mid Z_d - \text{криволинейная схема}\}$ – плотное открытое подмножество в $H_d(0)$, являющееся гладким неприводимым многообразием. Тем самым, и

$$X_d^c := \{(Z_2, Z_3, \dots, Z_d) \in H_2^c(0) \times H_3^c(0) \times \dots \times H_d^c(0) \mid Z_2 \subset Z_3 \subset \dots \subset Z_d\}$$

– гладкое неприводимое многообразие. Его замыкание X_d в $H_2(0) \times H_3(0) \times \dots \times H_d(0)$ называется *многообразием полных пунктуальных флагов длины $\leq d$* . Очевидно, что $X_1 = \{0\}$ – точка. Согласно основному результату работы [6] при $d = 2, 3$ и 4 имеет место изоморфизм многообразий $X_d \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}_{d-1}^\vee)$, где $\mathcal{E}_{d-1} := \mathcal{E}xt_{\mathbf{P}^2}^1(\mathcal{O}_{T_{d-1}}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_{d-1}})$ – локально свободный пучок ранга 2, $T_{d-1} \subset \mathbf{P}^2 \times X_{d-1}$ – универсальный цикл длины $d - 1$ над X_{d-1} , а $p_2: \mathbf{P}^2 \times X_{d-1} \rightarrow X_{d-1}$ – проекция; при этом изоморфизме естественная проекция (морфизм забывания) $X_d \rightarrow X_{d-1}: (Z_1, Z_2, \dots, Z_d) \mapsto (Z_1, Z_2, \dots, Z_{d-1})$ совпадает со структурным морфизмом $\pi_d: \mathbb{P}(\mathcal{E}_{d-1}^\vee) \rightarrow X_{d-1}$.

Рассмотрим теперь более подробно многообразие полных пунктуальных флагов X_4 длины ≤ 4 . На X_4 имеем стандартные обратимые пучки $\mathcal{O}_{T_4} = \mathcal{O}_{X_4/X_3}(1)$, $\mathcal{O}_{T_3} = \pi_4^* \mathcal{O}_{X_3/X_2}(1)$, $\mathcal{O}_{T_2} = (\pi_3 \cdot \pi_4)^* \mathcal{O}_{X_2/X_1}(1)$, а также универсальный флаг $\{0\} \times X_4 = \mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}_2 \subset \mathbf{T}_3 \subset \mathbf{T}_4 = T_4$, где $\mathbf{T}_2$ и $\mathbf{T}_3$ подняты с $\mathbf{P}^2 \times X_2$ и $\mathbf{P}^2 \times X_3$ соответственно. В частности, $\mathbf{T}_3 = (1 \times \pi_4)^{-1}(T_3)$, а проекция взята из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^2 \times X_4 & \xrightarrow{1 \times \pi_4} & \mathbf{P}^2 \times X_3 \\ \downarrow p_2 & & \downarrow p_2 \\ X_4 & \xrightarrow{\pi_4} & X_3 \end{array} \quad . \quad (1)$$

При этом согласно [6, § 1.2] имеем точную тройку

$$0 \rightarrow k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}(T_4) \rightarrow \mathcal{O}_{T_4} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_3} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Наконец, рассмотрим на X_4 замкнутые подмножества $W_i = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4 \mid Z_i \text{ не является локально полным пересечением}\}, i = 3, 4$. Согласно основной теореме из [6] W_3 и W_4 – неприводимые дивизоры на X_4 . Заметим при этом, что для общей точки $(Z_2, Z_3, Z_4) \in W_3$ 0-мерная схема Z_4 задается идеалом в $k[[x, y]]$, изоморфным идеалу вида

$$\mathcal{I} = (x^2, y^2). \quad (3)$$

1.2. Основное вычисление. Применим к тройке (2) функтор $\mathcal{E}xt_{p_2}^\bullet(-, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4})$. Обозначая

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4 &= \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{T_4}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}), & \mathcal{F}_4 &= \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{T_4}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}), \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{T_3}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_3}), & \mathcal{F}_3 &= \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{T_3}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_3}) \end{aligned}$$

и учитывая очевидные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_{p_2}^0(k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}(\tau_4), k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}) &\simeq \mathcal{E}xt_{p_2}^2(k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}(\tau_4), k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}) \simeq \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4), \\ \mathcal{E}xt_{p_2}^1(k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}(\tau_4), k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}) &\simeq 2\mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4), \\ \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{T_3}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}) &\simeq \mathcal{O}_{X_4} \simeq \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{T_4}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}), \end{aligned}$$

а также равенства

$$\mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{T_3}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}) = \pi_4^* \mathcal{E}_3, \quad \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{T_3}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4}) = \pi_4^* \mathcal{F}_3,$$

вытекающие в силу замены базы из диаграммы (1), получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4) \rightarrow \pi_4^* \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_4 \xrightarrow{f} 2\mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4) \xrightarrow{g} \pi_4^* \mathcal{F}_3 \xrightarrow{h} \mathcal{F}_4 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4) \rightarrow 0. \quad (4)$$

Рассмотрим на X_4 дивизор $W = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4 \mid Z_4 \text{ не является локально полным пересечением}\}$. По построению W является сечением проекции $\pi_4: X_4 \rightarrow X_3$, так что

$$\mathcal{O}_{X_4}(W) = \mathcal{O}_{X_4}(\tau_4 + \mathcal{L}), \quad \mathcal{L} = \pi_4^* L, \quad L \in \text{Pic } X_3. \quad (5)$$

ЛЕММА 1. *Имеем*

$$\mathcal{F}_4 \otimes k(x) = \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{Z_4}, k(0)) = \begin{cases} k, & x = (Z_2, Z_3, Z_4) \notin W, \\ k^2, & x = (Z_2, Z_3, Z_4) \in W. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если Z_4 – криволинейная схема, то, очевидно, что $\text{Hom}(k(0), \mathcal{O}_{Z_4}) = k$, а значит, по двойственности Серра на S [7] $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{Z_4}, k(0)) = k$. Если Z_4 – по-прежнему локально полное пересечение, но не является криволинейной схемой, то ее идеал $\mathcal{I}_{Z_4}$ в локальном кольце $k[[x, y]]$ изоморфен (x^2, y^2) , поэтому любой ненулевой морфизм $k(0) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{Z_4}$ продолжается до точной тройки $0 \rightarrow k(0) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{Z_4} \xrightarrow{r} \mathcal{O}_{Z_3} \rightarrow 0$, где $\mathcal{O}_{Z_3} = 0^{(1)}$ – первая инфинитезимальная окрестность точки 0, а морфизм r necessarily пропорционален морфизму ограничения $\cdot \otimes \mathcal{O}_{0(1)}$. Тем самым, опять получаем требуемое равенство $\text{Hom}(k(0), \mathcal{O}_{Z_4}) = k$.

2) Пусть теперь Z_4 – не локально полное пересечение; тогда ее идеал $\mathcal{I}_{Z_4}$ изоморфен (x^3, xy, y^2) . В этом случае для любого ненулевого морфизма из $\text{Hom}(k(0), \mathcal{O}_{Z_4})$ его коядро есть пучок $\mathcal{O}_{Z_3}$, где Z_3 касается прямой $y = 0$ в точке 0; поскольку такие схемы Z_3 параметризуются проективной прямой $\mathbf{P}^1$, изоморфной $P(\text{Hom}(k(0), \mathcal{O}_{Z_4}))$, то $\text{Hom}(k(0), \mathcal{O}_{Z_4}) = k^2$, откуда по двойственности Серра [7] $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{Z_4}, k(0)) = k^2$.

Наконец, равенство $\mathcal{F}_4 \otimes k(x) = \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{Z_4}, k(0))$, $x = (Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4$, есть изоморфизм замены базы для относительного $\mathcal{E}xt_{p_2}$ -пучка $\mathcal{F}_4$.

Из настоящей леммы и эпиморфизма ε в длинной точной последовательности (4) получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Эпиморфизм ε в (4) совпадает с каноническим отображением $\mathcal{F}_4 \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{F}_4^{\vee\vee}$, а его ядро $\text{Tors}(\mathcal{F}_4) = \ker(\text{can})$ является обратимым пучком на некоторой схеме $\bar{W}$ с носителем W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, поскольку пучок $\mathcal{F}_4^{\vee\vee}$ обратим, имеем

$$\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X_4}}(\mathcal{F}_4^{\vee\vee}, k(x)) = \text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X_4}}(\mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4), k(x)) = 0, \quad x \in X_4.$$

Поэтому, умножая тензорно точную тройку $0 \rightarrow \text{Tors}(\mathcal{F}_4) \rightarrow \mathcal{F}_4 \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{F}_4^{\vee\vee} \rightarrow 0$ на $k(x)$, $x \in X_4$, в силу леммы получаем, что $\text{Supp}(\text{Tors}(\mathcal{F}_4)) = W$ и $\text{Tors}(\mathcal{F}_4) \otimes k(x) = k$, $x \in W$, т.е. пучок $\text{Tors}(\mathcal{F}_4)$ обратим на подходящей схеме $\bar{W}$ с носителем W .

Пусть T – максимальный подпучок размерности ≤ 1 в $\text{Tors}(\mathcal{F}_4)$ и $\mathcal{M} := \text{Tors}(\mathcal{F}_4)/T$, т.е. точна тройка

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{i} \text{Tors}(\mathcal{F}_4) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{M} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Предыдущее следствие означает, что $\mathcal{M}$ – обратимый пучок на n -кратном дивизоре W для некоторого $n \geq 1$, т.е. на подсхеме W_n в X_4 , определяемой пучком идеалов $\mathcal{I}_{W_n, X_4} = \mathcal{O}_{X_4}(-nW)$. Отсюда, в частности, следует, что $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X_4}}(\mathcal{M}, k(x)) = k$, $x \in W$. Тем самым, если $Y := \text{Supp } T \neq \emptyset$, то, умножая тензорно точную тройку (6) на $k(x)$, $x \in Y$, получаем точную последовательность $k \rightarrow T \otimes k(x) \rightarrow k \rightarrow k \rightarrow 0$, откуда $T \otimes k(x) \simeq k$, т.е. T – обратимый пучок на некоторой схеме с носителем Y . Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. Имеет место точная тройка (6), где $\mathcal{M}$ – обратимый пучок на n -кратном дивизоре W для некоторого $n \geq 1$, т.е. на подсхеме W_n в X_4 , определяемой пучком идеалов $\mathcal{I}_{W_n, X_4} = \mathcal{O}_{X_4}(-nW)$, а пучок T либо нулевой, либо является обратимым пучком на некоторой подсхеме Y размерности ≤ 1 с носителем $\text{Supp } Y \subset W$.

Заметим теперь, что согласно [6, предложение 2.2] точна тройка

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D(-\tau_2) \xrightarrow{e_1} \pi_4^* \mathcal{F}_3 \xrightarrow{e_2} \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_3) \rightarrow 0, \quad (7)$$

где D – дивизор на X_4 вида $D = \pi_4^{-1}(l_0) = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4 \mid Z_3 \text{ не является локально полным пересечением}\}$, а l_0 – исключительная прямая на X_3 . В частности, согласно основной теореме из [6]

$$\mathcal{O}_{X_4}(D) = \mathcal{O}_{X_4}(\tau_3 - 2\tau_2). \quad (8)$$

Далее, рассмотрим кривую $C = D \cap W$. Так как дивизоры D и W неприводимы и пересекаются вдоль C трансверсально, в силу следствия 1 композиция морфизмов $\mathcal{O}_D(-\tau_2) \xrightarrow{e_1} \pi_4^* \mathcal{F}_3 \xrightarrow{h} \text{Tor} s(\mathcal{F}_4) \xrightarrow{e} \mathcal{M}$ (см. (4), (7), (6)) равна нулю, а значит, определен морфизм $h': \mathcal{O}_D(-\tau_2) \rightarrow T$ такой, что $i \cdot h' = h \cdot e_1$, и соответственно эпиморфизм $h'': \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_3) \rightarrow \mathcal{M}$ такой, что $h'' \cdot e_2 = e \cdot h$.

Тем самым, ввиду следствия 2 $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{W_n}(-\tau_3)$ и тройки (7) и (6) включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \mathcal{I}_{Y'', D}(-\tau_2) & \rightarrow & \mathcal{O}_D(-\tau_2) & \xrightarrow{h'} & T & \rightarrow \text{coker } h' \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & e_1 \downarrow & & i \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \text{im } g & \rightarrow & \pi_4^* \mathcal{F}_3 & \xrightarrow{h} & \text{Tor} s(\mathcal{F}_4) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & e_2 \downarrow & & e \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_3 - nW) & \rightarrow & \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_3) & \xrightarrow{h''} & \mathcal{O}_{W_n}(-\tau_3) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \text{coker } h' & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & 0 & & & & &
 \end{array}, \quad (9)$$

где в силу следствия 2 $\text{coker } h' = T|_{Y'}$, а Y' – некоторая подсхема (априори, возможно, пустая) размерности ≤ 1 в Y ; соответственно $\text{im } h' = \mathcal{O}_{Y''}(-\tau_2)$, а Y'' – некоторая подсхема (априори, возможно, пустая) размерности ≤ 1 в D , причем $\text{Supp } Y \supset \text{Supp } Y''$. Теперь левая вертикальная последовательность в диаграмме (9) дает изоморфизм $\text{coker } h' = \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_3 - nW)|_{Y'}$ и точную тройку:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{Y'', D}(-\tau_2) \rightarrow \text{im } g \xrightarrow{\theta} \mathcal{I}_{Y', X_4}(-\tau_3 - nW) \rightarrow 0,$$

которая вместе с морфизмом g дает две точные тройки:

$$0 \rightarrow \ker(\theta \cdot g) \rightarrow 2\mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4) \xrightarrow{\theta \cdot g} \mathcal{I}_{Y', X_4}(-\tau_3 - nW) \rightarrow 0, \quad (10)$$

$$0 \rightarrow \ker g \rightarrow \ker(\theta \cdot g) \rightarrow \mathcal{I}_{Y'', D}(-\tau_2) \rightarrow 0. \quad (11)$$

Так как $\dim Y' \leq 1$, то из (10) следует, что $\ker(\theta \cdot g)$ – обратимый пучок на X_4 ; более того, условие $n \geq 1$ и равенство (5) необходимо влекут $n = 1$, а следовательно, $\ker(\theta \cdot g) = \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4 + \tau_3 + \mathcal{L})$. Из этого равенства, тройки (11) и условия $\dim Y'' \leq 1$ немедленно получаем, что $\dim Y'' = 1$, т.е. Y'' – дивизор на D , и с учетом (8) имеют место равенства

$$\mathcal{I}_{Y'', D}(-\tau_2) = \mathcal{O}_D(-\tau_2 - Y'') = \mathcal{O}_D(-\tau_4 + \tau_3 + \mathcal{L}), \quad \ker g = \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4 + 2\tau_2 + \mathcal{L}). \quad (12)$$

Далее, согласно лемме 1.6 из [6] $\mathcal{E}_3$ – рефлексивный, а значит, локально свободный пучок ранга 2. Повторяя доказательство указанной леммы, получаем, что $\mathcal{E}_4$ – также рефлексивный пучок ранга 2 (на X_4). Поскольку в силу (4) $\ker f$ – пучок ранга 1 на X_4 , входящий ввиду соотношения $\operatorname{im} f = \ker g$ и второго равенства (12) в точную тройку $0 \rightarrow \ker f \rightarrow \mathcal{E}_4 \rightarrow \mathcal{O}_{X_4}(-\tau_4 + 2\tau_2 + \mathcal{L}) \rightarrow 0$, из рефлексивности $\mathcal{E}_4$ следует, что этот пучок локально свободен. Таким образом, доказано

Предложение 1. *Имеем $\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{T_4}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4})$ – локально свободный пучок ранга 2 на X_4 .*

1.3. Описание морфизма забывания $\sigma: X_5 \rightarrow H_5(0)$. Рассмотрим многообразие X_5 полных пунктуальных флагов длины ≤ 5 . Из предложения 1 и [6, §§ 1.2, 3] немедленно вытекает изоморфизм гладких многообразий $X_5 \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}_4^\vee)$, при котором естественная проекция (морфизм забывания) $\pi_5: X_5 \rightarrow X_4: (Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \mapsto (Z_2, Z_3, Z_4)$ совпадает со структурным морфизмом $\pi_5: \mathbb{P}(\mathcal{E}_4^\vee) \rightarrow X_4$.

Теперь для описания морфизма забывания $\sigma: X_5 \rightarrow H_5(0): (Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \mapsto Z_5$ рассмотрим на X_5 неприводимые дивизоры $D_i = \pi_5^{-1}(W_i) = \{(Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \in X_5 \mid Z_i \text{ не является локально полным пересечением}\}$, $i = 3, 4$. Из классификации Бриансона 0-мерных схем длины 5 (см. п. 1.1) и формулы (3) непосредственно следует, что для общей точки $(Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \in D_3$ схема Z_5 имеет тип (v), так что $\sigma(D_3) = K \simeq \mathbb{P}^1$. Тем самым, дивизор D_3 стягивается при морфизме забывания σ .

Далее, рассмотрим в X_4 плотное открытое множество $X_4^* = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4 \mid Z_4 \text{ – криволинейная схема}\} = X_4 \setminus (W_3 \cup W_4)$, соответственно в X_5 замыкание D_2 множества $D_2^* = \{(Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \in \pi_5^{-1}(X_4^*) \mid Z_5 \text{ – некриволинейная схема}\}$. Как показывает простое локальное вычисление, для произвольной точки $w = (Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4^*$ множество $D_2 \cap \pi_5^{-1}(w)$ есть точка (Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) , где Z_5 – схема типа (iii). Следовательно, D_2 – дивизор на X_5 . Так как согласно Бриансону [1] множество $S := \{Z_5 \in H_5(0) \mid Z_5 \text{ – схема типа (iii)}\}$ имеет размерность 2, а $\sigma(D_2^*) \subset S$, и легко видеть, что $\sigma(D_2^*) = S$, то $\sigma(D_2) = S$, т.е. дивизор D_2 стягивается при морфизме σ .

Далее, из определения дивизоров D_2, D_3, D_4 получаем, что множество

$$X_5^c = \{(Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \in \pi_5^{-1}(X_4^*) \mid Z_5 \text{ – криволинейная схема}\}$$

совпадает с множеством $X_5 \setminus (D_2 \cup D_3 \cup D_4)$ и $\sigma|_{X_5^*}: X_5^* \rightarrow H_5^c(0) = H_5(0) \setminus \operatorname{Sing} H_5(0)$ – изоморфизм, где $\operatorname{codim}_{H_5(0)} \operatorname{Sing} H_5(0) = 1$. Поэтому так как D_2 и D_3 стягиваются при морфизме σ , а D_4 – неприводимый дивизор на X_5 , получаем, что $\operatorname{Sing} H_5(0) = \sigma(D_4)$. При этом из описания X_5 в окрестности множества $\operatorname{Sing} H_5(0)$ (см. п. 1.1) немедленно следует, что $\sigma|_{D_4}: D_4 \rightarrow \operatorname{Sing} H_5(0)$ – бирациональный морфизм; тем самым, морфизм σ имеет разложение Штейна вида $\sigma = \nu \cdot \sigma'$, где σ' – стягивание дивизоров D_2 и D_3 , а $\nu: \sigma'(X_5) \rightarrow H_5(0)$ – морфизм нормализации вдоль дивизора $\sigma'(D_4)$.

Собирая вместе предыдущие утверждения, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. (i) *Многообразие X_5 полных пунктуальных флагов длины ≤ 5 в размерности 2 является гладким неприводимым многообразием, изоморфным $\mathbb{P}(\mathcal{E}_4^\vee)$, где $\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{T_4}, k(0) \boxtimes \mathcal{O}_{X_4})$ – локально свободный пучок ранга 2 на X_4 , причем морфизм забывания $\pi_5: X_5 \rightarrow X_4: (Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \mapsto (Z_2, Z_3, Z_4)$ совпадает со структурным морфизмом $\mathbb{P}(\mathcal{E}_4^\vee) \rightarrow X_4$.*

(ii) Бирациональный морфизм забывания $\sigma: X_5 \rightarrow H_5(0): (Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \mapsto Z_5$ имеет разложение Штейна вида $\sigma = \nu \cdot \sigma'$, где σ' – стягивание дивизоров D_3 и D_4 , а $\nu: \sigma'(X_5) \rightarrow H_5(0)$ – морфизм нормализации вдоль дивизора $\sigma'(D_2)$; здесь D_2 – замыкание в X_5 множества $\{(Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \in X_5 \mid Z_4 \text{ – криволинейная схема, а } Z_5 \text{ – схема типа (iii)}\}$, а $D_i = \{(Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) \in X_5 \mid Z_i \text{ не является локально полным пересечением}\}$, $i = 3, 4$.

2. Пунктуальная схема Гильберта $\text{Hilb}^3 k[[x, y, z]]$

2.1. Предварительные вычисления. В этом и следующем пунктах для удобства в качестве базисного 3-мерного многообразия берется проективное пространство $\mathbf{P}^3$ с фиксированной в нем точкой 0. Пусть $G := G(1, 3)$ – грассманиан прямых пространства $\mathbf{P}^3$, $\mathbf{P} = \{l \in G \mid l \ni 0\} \simeq P(T_0\mathbf{P}^3)$ – α -плоскость на G ,

$$\Sigma = \{(v, l, Y) \in \mathbf{P}^3 \times G \times \check{\mathbf{P}}^3 \mid 0 \in l \subset Y \ni v\}, \quad \Pi = \{(l, Y) \in G \times \check{\mathbf{P}}^3 \mid 0 \in l \subset Y\},$$

$$\Gamma = \{(v, Y) \in \mathbf{P}^3 \times \check{\mathbf{P}}^3 \mid v \in Y \ni 0\}, \quad \Pi \xleftarrow{\pi} \Sigma \xrightarrow{\tilde{\rho}_2} \Gamma, \quad \check{\mathbf{P}} \xrightarrow{\tilde{\rho}_0} \Gamma \xrightarrow{\rho} \mathbf{P}^3$$

и $\text{pr}_2: \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ – естественные проекции, $\{0\} \times \mathbf{P} = T_1 \subset T_2$ – универсальный флаг подсхем длины ≤ 2 в $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}$ и $T_1 \subset T_2$ – универсальный флаг подсхем длины ≤ 2 в Σ , где $T_i = \text{pr}_{12}^{-1}(T_i)$, $i = 1, 2$, а $\text{pr}_{12}: \Sigma \rightarrow \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}: (v, l, Y) \mapsto (v, l)$ – проекция. Введем также обозначения

$$\theta(l, m, n) := \theta_{\mathbf{P}^3}(l) \boxtimes \theta_{\mathbf{P}}(m) \boxtimes \theta_{\check{\mathbf{P}}}(n)|_{\Sigma}, \quad \theta(m, n) := \theta_{\mathbf{P}}(m) \boxtimes \theta_{\check{\mathbf{P}}}(n)|_{\Pi}, \quad l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

На Σ имеем точную тройку: $0 \rightarrow \theta_{T_1}(0, 1, 0) \rightarrow \theta_{T_2} \rightarrow \theta_{T_1} \rightarrow 0$. Применим к ней функтор $\mathcal{E}xt_{\pi}^{\bullet}(-, \theta_{T_1})$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{E}xt_{\pi}^0(\theta_{T_1}, \theta_{T_1}) &\rightarrow \mathcal{E}xt_{\pi}^0(\theta_{T_2}, \theta_{T_1}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\pi}^0(\theta_{T_1}(0, 1, 0), \theta_{T_1}) \\ &\xrightarrow{f} \mathcal{E}xt_{\pi}^1(\theta_{T_1}, \theta_{T_1}) \xrightarrow{g} \mathcal{E}xt_{\pi}^1(\theta_{T_2}, \theta_{T_1}) \xrightarrow{h} \mathcal{E}xt_{\pi}^1(\theta_{T_1}(0, 1, 0), \theta_{T_1}) \\ &\xrightarrow{j} \mathcal{E}xt_{\pi}^2(\theta_{T_1}, \theta_{T_1}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\pi}^2(\theta_{T_2}, \theta_{T_1}) \xrightarrow{e} \mathcal{E}xt_{\pi}^2(\theta_{T_1}(0, 1, 0), \theta_{T_1}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что $\mathcal{E}xt_{\pi}^0(\theta_{T_1}(0, 1, 0), \theta_{T_1}) = \theta_{\Pi}(-1, 0)$, $\mathcal{E}xt_{\pi}^0(\theta_{T_1}, \theta_{T_1}) = \theta_{\Pi}$. Поскольку $T_1 = \tilde{p}_2^{-1}(\mathbf{P}_0)$, где $\mathbf{P}_0 = \rho^{-1}(\{0\}) \xrightarrow{\pi_0^0} \check{\mathbf{P}}$, нетрудно видеть, что точна тройка

$$0 \rightarrow T_{\Gamma/\check{\mathbf{P}}}|\mathbf{P}_0 \rightarrow T_0\mathbf{P}^3 \otimes \theta_{\check{\mathbf{P}}} \rightarrow \theta_{\check{\mathbf{P}}}(1) \rightarrow 0,$$

совпадающая с точной последовательностью Эйлера на $\check{\mathbf{P}}$, откуда $T_{\Gamma/\check{\mathbf{P}}}|\mathbf{P}_0 \simeq \Omega_{\check{\mathbf{P}}}(1)$.

С другой стороны, ясно, что $T_{\Gamma/\check{\mathbf{P}}}|\mathbf{P}_0 \xrightarrow{\pi_0^*} \mathcal{E}xt_{\pi_0}^1(\theta_{\mathbf{P}_0}, \theta_{\mathbf{P}_0})$ – изоморфизм. Отсюда находим: $\mathcal{E}xt_{\pi_0}^1(\theta_{\mathbf{P}_0}, \theta_{\mathbf{P}_0}) \simeq \Omega_{\check{\mathbf{P}}}(1)$, так что, обозначая через p_2 проекцию $\Pi \rightarrow \check{\mathbf{P}}$ и пользуясь формулой проекции и заменой базы, получаем

$$\mathcal{G} := \mathcal{E}xt_{\pi}^1(\theta_{T_1}, \theta_{T_1}) = p_2^* \mathcal{E}xt_{\pi_0}^1(\theta_{\mathbf{P}_0}, \theta_{\mathbf{P}_0}) = \theta_{\mathbf{P}} \boxtimes \Omega_{\check{\mathbf{P}}}(1)|_{\Pi}.$$

Тем самым, $\det \mathcal{G} = \theta(0, -1)$. Имеем инъективность морфизма f в (13) и равенства

$$\text{im } g = \theta(1, -1), \quad \mathcal{E}xt_{\pi}^1(\theta_{T_1}(0, 1, 0), \theta_{T_1}) = \mathcal{G}(-1, 0). \quad (14)$$

Далее, так как $\omega_{\Gamma/\tilde{\mathbf{P}}} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{P}^3}(-3) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}}(1)|_{\Gamma}$, а значит, $\omega_{\Gamma/\tilde{\mathbf{P}}}|\mathbf{P}_0 \simeq \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}}(1)$ и, тем самым, $\omega_{\Sigma/\Pi}|_{\mathbf{T}_1} = \tilde{p}_2^*(\omega_{\Gamma/\tilde{\mathbf{P}}}|\mathbf{P}_0)$, то относительная двойственность Серра для плоского гладкого морфизма π и формула проекции дают

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_{\pi}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) &\simeq \mathcal{E}xt_{\pi}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(0, 1))^{\vee} = ((0, 1) \otimes \mathcal{E}xt_{\pi}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}))^{\vee} \\ &= ((0, 1) \otimes \mathcal{O}_{\Pi})^{\vee} = \mathcal{O}(0, -1), \end{aligned}$$

а также показывают, что морфизм e в (13) – изоморфизм. Тем самым, из (13) и (14) следует, что $\mathrm{im} \, h = \det \mathcal{G}(-1, 0) \otimes (\mathcal{E}xt_{\pi}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}))^{\otimes -1} = \mathcal{O}(-2, 0)$, т.е. точна тройка $0 \rightarrow \mathcal{O}(1, -1) \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{O}(-2, 0) \rightarrow 0$, где $\mathcal{E}_3 := \mathcal{E}xt_{\pi}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$. Ввиду очевидных равенств

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-2, 0), \mathcal{O}(1, -1)) = H^1(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Pi}}(\mathcal{O}(-2, 0), \mathcal{O}(1, -1))) = H^1(\mathcal{O}(3, -1)) = 0$$

эта тройка расщепляется, т.е.

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}xt_{\pi}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \simeq \mathcal{O}(1, -1) \oplus \mathcal{O}(-2, 0). \quad (15)$$

Теперь воспользуемся каноническим отождествлением $H_2(0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}$: $Z_2 \mapsto l = \mathrm{Span} \, Z_2$. Тогда по аналогии с двумерным случаем (ср. с п. 1.3) ввиду локальной свободы пучка $\mathcal{E}_3$ и относительной двойственности Серра для проекции π из результатов [6, § 1.2] вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Гладкое многообразие $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_3) = \mathbb{P}(\mathcal{O}(2, 0) \oplus \mathcal{O}(-1, 1))$ совпадает с многообразием $\tilde{X}_3 = \{(Z_2, Z_3, Y) \in H_2(0) \times H_3(0) \times \tilde{\mathbf{P}} \mid Z_2 \subset Z_3 \subset Y\}$, а структурный морфизм $\mu: \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_3) \rightarrow \Sigma$ совпадает с морфизмом забывания $\tilde{X}_3 \rightarrow \Pi: (Z_2, Z_3, Y) \mapsto (l = \mathrm{Span} \, Z_2, Y)$.*

2.2. Некоторые Ext-группы. Ниже в этом и следующем пунктах нам потребуются размерности некоторых Ext-групп на $\mathbf{P}^3$. А именно, имеет место

ЛЕММА 2. *Справедливы следующие формулы:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^i(k(0), k(0)) &= \begin{cases} k, & i = 0, 3, \\ k^3, & i = 1, 2, \end{cases} & \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_{Z_2}, k(0)) &= \begin{cases} k, & i = 0, 3, \\ k^3, & i = 1, 2, \end{cases} \\ \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_{Z_3}, k(0)) &= \begin{cases} k, & i = 0, 3, \\ k^3, & i = 1, 2, \end{cases} & \text{если } Z_3 \notin \mathrm{Sing} \, H_3(0), \\ \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_{Z_3}, k(0)) &= \begin{cases} k, & i = 0, \\ k^4, & i = 1, \\ k^5, & i = 2, \\ k^2, & i = 3, \end{cases} & \text{если } Z_3 \in \mathrm{Sing} \, H_3(0). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этой леммы рассмотрим два случая:

- (i) Z есть одна из схем $k(0)$, Z_2 или Z_3 , где $Z_3 \notin \mathrm{Sing} \, H_3(0)$;
- (ii) $Z = Z_3 \in \mathrm{Sing} \, H_3(0)$.

(i) В этом случае Z , очевидно, имеет в подходящей окрестности $U \subset \mathbf{P}^3$ точки 0 свободную резольвенту

$$K^\bullet : 0 \rightarrow \mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_4} 3\mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_3} 3\mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

Применяя к комплексу $K^\bullet$ функтор $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}^\bullet(-, k(0))$, т.е. беря двойственный к $K^\bullet$ комплекс $\check{K}^\bullet$ и умножая его на $k(0)$, получаем комплекс

$$0 \rightarrow k(0) \xrightarrow{\partial_1 \otimes k(0)} k(0)^3 \xrightarrow{\partial_2 \otimes k(0)} k(0)^3 \xrightarrow{\partial_3 \otimes k(0)} k(0) \xrightarrow{\partial_4 \otimes k(0)} 0,$$

в котором, очевидно, все дифференциалы $\check{\partial}_i \otimes k(0)$ нулевые. Так как когомологии этого комплекса суть пучки $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_U}^i(\mathcal{O}_Z, k(0))$, отсюда следует, что

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_U}^i(\mathcal{O}_Z, k(0)) = \begin{cases} k(0), & i = 0, 3, \\ k(0)^3, & i = 1, 2. \end{cases}$$

Отсюда и из спектральной последовательности локальных и глобальных $\mathcal{E}xt$ -ов (которая, очевидно, вырождается, поскольку пучки $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_U}^i(\mathcal{O}_Z, k(0))$ имеют 0-мерные носители) получаем вышеприведенные формулы для Ext -групп.

(ii) В этом случае Z представляет собой трансверсальное пересечение $Y \cap l^{(1)}$, где $Y = \text{Span } Z$ – плоскость, содержащая схему Z , а $l^{(1)}$ – первая инфинитезимальная окрестность прямой l в $\mathbf{P}^3$, пересекающей плоскость Y в точке 0. Нетрудно видеть, что в подходящей окрестности $U \subset \mathbf{P}^3$ точки 0 имеем свободные резольвенты пучков $\mathcal{O}_{Y \cap U}$ и $\mathcal{O}_{l^{(1)} \cap U}$:

$$K_1^\bullet : 0 \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_{Y \cap U} \rightarrow 0, \quad K_2^\bullet : 0 \rightarrow 2\mathcal{O}_U \rightarrow 3\mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_{l^{(1)} \cap U} \rightarrow 0.$$

Так как пересечение $Z = Y \cap l^{(1)}$ трансверсально, то резольвентой пучка $\mathcal{O}_{Z \cap U}$ является тотальный комплекс

$$K^\bullet = \text{tot}(K_1^\bullet \otimes K_2^\bullet) : 0 \rightarrow 2\mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_4} 5\mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_3} 4\mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{O}_U \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{O}_{Z \cap U} \rightarrow 0.$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения из (i) для комплекса $K^\bullet$, получаем требуемые формулы для Ext -групп. Лемма доказана.

2.3. Описание схемы $H_3(0)$ и многообразия полных пунктуальных флагов

X_3 . Пусть $\mathbf{P} \xleftarrow{p_1} \Pi \xrightarrow{p_2} \check{\mathbf{P}}$ – естественные проекции и $l \in \mathbf{P}$ – произвольная прямая через точку 0, так что $\check{l} := p_1^{-1}(l) \simeq p_2 p_1^{-1}(l) \simeq \mathbf{P}^1$. Положим $\Sigma_l = \pi^{-1}(\check{l})$, $\pi_l = \pi|_{\Sigma_l}$. Пусть $Z_2 = Z_2(l) \in H_2(0)$ – 0-мерная схема длины 2, соответствующая прямой l при каноническом изоморфизме $H_2(0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}$, так что $\mathbf{T}_2 \times_\Sigma \Sigma_l = \mathbf{T}_2 \cap \Sigma_l \simeq Z_2 \times \mathbf{P}^1$. Обозначим $\mathcal{E}_3(l) = \mathcal{E}xt_{\pi_l}^i(\mathcal{O}_{Z_2(l) \times \mathbf{P}^1}, \mathcal{O}_{\{0\} \times \mathbf{P}^1})$. Поскольку согласно лемме 2 для любой плоскости $Y \in \check{\mathbf{P}}$ размерности пространств $\text{Ext}_{\check{Y}}^i(k(0), k(0))$, $0 \leq i \leq 2$, не зависят от точки Y , то с учетом предложения 2 имеем изоморфизмы замены базы

$$\mathcal{E}_3(l) \simeq \mathcal{E}_3|\check{l} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}, \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_3 \otimes k(\{Y\}) = \mathcal{E}_3(l) \otimes k(\{Y\}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_Y^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0)), \quad Y \in \check{l} \simeq \mathbf{P}^1. \quad (17)$$

Рассмотрим поверхность $S_l := \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_3(l)) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1})$, и пусть $\mu_l: S_l \rightarrow \tilde{l} \simeq \mathbf{P}^1$ – структурный морфизм и $\mathcal{O}_{S_l}(1)$ – пучок Гротендика такой, что $\mu_{l*}(\mathcal{O}_{S_l}(1)) = \tilde{\mathcal{E}}_3(l)$. Заметим, что для любой точки $Y \in \tilde{\mathbf{P}}$ естественное отображение $\text{Ext}_Y^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{P}^3}^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0))$ – мономорфизм, так что имеем вложение $P(\text{Ext}_Y^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0))) \hookrightarrow P(\text{Ext}_{\mathbf{P}^3}^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0)))$, которое в совокупности с изоморфизмом $P(\mathcal{E}_3(l)|\{Y\}) \simeq P(\text{Ext}_Y^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0)))$ определяет вложение f_l :

$$\mu_l^{-1}(\{Y\}) = P(\mathcal{E}_3(l)|\{Y\}) \hookrightarrow \mathbf{P}_l^2 := P(\text{Ext}_{\mathbf{P}^3}^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0))).$$

Здесь в силу леммы 2 $\mathbf{P}_l^2$ есть проективная плоскость, естественным образом лежащая в многообразии $X_3 = \{(Z_2, Z_3) \in H_2(0) \times H_3(0) \mid Z_2 \subset Z_3\}$ (в самом деле, всякой точке $k\xi \in P(\text{Ext}_{\mathbf{P}^3}^1(\mathcal{O}_{Z_2(l)}, k(0)))$ как расширению $\xi: 0 \rightarrow k(0) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_3} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_2(l)} \rightarrow 0$ сопоставляется точка $(Z_2(l), Z_3) \in X_3$). Отображение f_l глобализуется до морфизма $f_l: S_l \rightarrow \mathbf{P}_l^2$, совпадающего по построению с морфизмом забывания

$$f_l: S_l \rightarrow \mathbf{P}_l^2 \subset X_3: (Z_2(l), Z_3, Y) \mapsto (Z_2(l), Z_3). \quad (18)$$

Пусть $Z_3(l) \in H_3(0)$ – 0-мерная подсхема длины 3 на прямой l (называемая также *коллинеарным троеточием*). Так как S_l – поверхность типа $\mathbf{F}_1$, из описания (18) непосредственно следует, что f_l – раздутие проективной плоскости $\mathbf{P}_l^2$ в точке $(Z_2(l), Z_3(l))$, т.е. отображение полным линейным рядом пучка $|\mathcal{O}_{S_l}(1)|$. Таким образом, получаем канонический изоморфизм

$$\mathbf{P}_l^2 \simeq \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{S_l}(1))) = \mathbb{P}((p_1\mu_l)_*\mathcal{O}_{S_l}(1)). \quad (19)$$

Так как $X_3 = \bigcup_{l \in \mathbf{P}} \mathbf{P}_l^2$ и $\mathcal{O}_{S_l}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_3)}(1)|_{S_l}$, то изоморфизм (19), очевидно, глобализуется до изоморфизма

$$X_3 \simeq \mathbb{P}((p_1\mu_l)_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_3)}(1)) = \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_3) = \mathbb{P}(p_{1*}(\mathcal{O}(2, 0) \oplus \mathcal{O}(-1, 1))) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_3),$$

где $\mathcal{F}_3 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(2) \oplus \Omega_{\mathbf{P}}(1)$ – расслоение ранга 3 на $\mathbf{P}$. (Мы пользуемся здесь предложением 2 и равенством $p_{1*}\mathcal{O}(-1, 1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \otimes p_{1*}p_2^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) = \Omega_{\mathbf{P}}(1)$). Соответственно $\tilde{X}_3 = \bigcup_{l \in \mathbf{P}} S_l$ и в соответствии с (18) морфизм f_l глобализуется до морфизма забывания $f: \tilde{X}_3 \rightarrow X_3: (Z_2, Z_3, Y) \mapsto (Z_2, Z_3)$, определяемого относительным (над $\mathbf{P}$) полным линейным рядом пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_3)}(1)$ и представляющего собой стягивание дивизора $W = \{(Z_2, Z_3, Y) \in \tilde{X}_3 \mid Z_3 - \text{коллинеарное троеточие}\}$.

Наконец, морфизм забывания $g: X_3 = \mathbb{P}(\mathcal{F}_3) \rightarrow H_3(0): (Z_2, Z_3) \mapsto Z_3$ есть не что иное, как стягивание дивизора D на X_3 – изоморфного образа при морфизме f дивизора $\tilde{D} = \{(Z_2, Z_3, Y) \in \tilde{X}_3 \mid Z_3 = 0^{(1)}\}$ – первая инфинитезимальная окрестность точки 0 в плоскости Y . Ясно, что $g(D) = \text{Sing } H_3(0)$. Кроме того, нетрудно проверить, что $\mathcal{O}_{X_3}(D) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_3)}(1) \otimes \nu^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)$, где $\nu: \mathbb{P}(\mathcal{F}_3) \rightarrow \mathbf{P}$ – структурный морфизм, а $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_3)}(1) = \mathcal{O}_{X_3/\mathbf{P}}(1)$ – пучок Гротендика такой, что $\nu_*\mathcal{O}_{X_3/\mathbf{P}}(1) = \mathcal{F}_3$; при этом $h^0(\mathcal{O}_{X_3}(D)) = 1$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пунктуальная схема Гильберта $H_3(0) = \text{Hilb}^3 k[[x, y, z]]$ получается из многообразия полных пунктуальных флагов $X_3 = \{(Z_2, Z_3) \in H_2(0) \times H_3(0) \mid Z_2 \subset Z_3\}$, изоморфного гладкому неприводимому многообразию $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(2) \oplus \Omega_{\mathbf{P}}(1))$, посредством бирационального морфизма забывания $g: X_3 \rightarrow H_3(0)$, представляющего собой стягивание дивизора $D = \{(Z_2, Z_3, Y) \in X_3 \mid Z_3 - \text{первая инфинитезимальная окрестность точки } 0 \text{ в некоторой плоскости, т.е. } Z_3 \text{ не является локально полным пересечением}\}$. При этом D однозначно определяется как единственный дивизор линейного ряда $|\mathcal{O}_{X_3/\mathbf{P}}(1) \otimes \nu^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)|$, где $\nu: \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(2) \oplus \Omega_{\mathbf{P}}(1)) \rightarrow \mathbf{P}$ – структурный морфизм. Кроме того, $g(D) = \text{Sing } H_3(0) \simeq \dot{\mathbf{P}}$ и в окрестности любой точки $Z_3 \in \text{Sing } H_3(0)$ схема $H_3(0)$ аналитически изоморфна прямому произведению $\dot{\mathbf{P}}$ и конуса над кубической нормкривой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что дивизор D на X_3 изоморфен многообразию флагов “(точка, плоскость)” $\Gamma_{0,2} \subset \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{P}}$ и морфизм $g|_D: D \rightarrow \text{Sing } H_3(0)$ совпадает с проекцией на сомножитель $\text{pr}_2 | \Gamma_{0,2}: \Gamma_{0,2} \rightarrow \dot{\mathbf{P}}$.

3. Пунктуальная схема Гильберта $\text{Hilb}^4 k[[x, y, z]]$

3.1. Предварительные вычисления. Рассмотрим многообразие X_3 пунктуальных флагов 0-мерных подсхем длины 3 в $\mathbf{P}^3$, описанное в теореме 2, и введем на X_3 стандартное обозначение $\mathcal{O}_{X_3}(m, n) := \mathcal{O}_{X_3/\mathbf{P}}(1)^{\otimes m} \otimes \nu^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Имеем универсальный флаг пунктуальных семейств $\{0\} \times X_3 = \mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}_2 \subset \mathbf{T}_3 \in \mathbf{P}^3 \times X_3$, где $\mathbf{T}_3$ – универсальное троеточие, $\text{Supp } \mathbf{T}_3 = \{0\} \times X_3$. Так как $\mathbf{T}_1 \simeq X_3$, полагаем $\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(m, n) := \mathcal{O}_{X_3}(m, n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Имеем точные тройки

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(0, 1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(a, b) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_2} \rightarrow 0. \quad (20)$$

Первая тройка здесь очевидна. Чтобы найти a и b во второй тройке, обозначим $\mathcal{S} = \ker(\text{res}: \mathcal{O}_{\mathbf{T}_3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$. Тогда тройки (20) влекут точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(a, b) \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(0, 1) \rightarrow 0, \quad (21)$$

и из описания D как множества $\{(Z_2, Z_3) \in X_3 \mid \text{схема } Z_3 \text{ не является локально полным пересечением в } \mathbf{P}^3\}$ (см. теорему 2) следует, что

$$D = \{z = (Z_2, Z_3) \in X_3 \mid \dim(\mathcal{S} \otimes k(0, z)) = 2\}. \quad (22)$$

Применим к тройке (21) функтор $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}}^\bullet(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(0, 1), -)$ и в получающейся длинной точной последовательности рассмотрим первый связывающий гомоморфизм δ ; учитывая очевидное равенство

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(0, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(a, b)) = T_0 \mathbf{P}^3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(a, b - 1) \simeq 3\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(a, b - 1),$$

имеем $\delta: \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1} \rightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(a, b - 1)$. В силу (22) δ как сечение зануляется вдоль D (как и выше, мы отождествляем $\mathbf{T}_1$ с X_3), так что с учетом (21) и теоремы 2 $(a, b - 1) = (1, 0)$, т.е.

$$a = b = 1. \quad (23)$$

Обозначим через p_2 проекцию на сомножитель $\mathbf{P}^3 \times X_3 \rightarrow X_3$ и применим к пучкам $\mathcal{O}_{\mathbf{T}_i}$, $i = 1, 2, 3$, и второй тройке (20) функтор $\mathcal{E}xt_{p_2}^i(-, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$. Пользуясь леммой 2 и свойствами замены базы для относительных $\mathcal{E}xt$ -пучков [8], получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3. (i) $\mathrm{rk} \mathcal{E}xt_{p_2}^i(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) = 3$, $i = 1, 2$, $\mathrm{rk} \mathcal{E}xt_{p_2}^3(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) = 1$.

(ii) $\mathcal{O}_{X_3}$ -пучки $\mathcal{E}xt_{p_2}^i(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$ и $\mathcal{E}xt_{p_2}^i(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$, $i \geq 0$, локально свободны, и для произвольной точки $z = (\{0\}, Z_2, Z_3) \in X_3$ соответствующие гомоморфизмы замены базы $\mathcal{E}xt_{p_2}^i(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \otimes k(z) \rightarrow \mathrm{Ext}^i(k(0), k(0))$, $i \geq 0$, – изоморфизмы. В частности, $\mathcal{O}_{X_3}$ -пучки $\mathcal{E}xt_{p_2}^i(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$ и $\mathcal{E}xt_{p_2}^i(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$, $i = 0, 3$, обратимы и естественный морфизм $\alpha_0: \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$ – изоморфизм. Аналогично, пучок $\mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$ обратим.

(iii) В диаграмме замены базы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \otimes k(z) & \xrightarrow{\partial_1 \otimes k(z)} & \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \otimes k(z) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Ext}^0(k(0), k(0)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{Z_2}, k(0)) \end{array}$$

нижнее горизонтальное отображение инъективно для любой точки $z \in X_3$, а значит, пучок соек ∂_1 локально свободен ранга 2.

3.2. Свойства пучка $\mathcal{E} = \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$. Многообразие $X_3 = \mathbb{P}(\check{\mathcal{E}})$ пунктуальных флагов длин 2, 3, 4. Применим ко второй тройке (20) функтор $\mathcal{E}xt_{p_2}^\bullet(-, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$; с учетом (23) получим длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) &\xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \xrightarrow{\beta_0} \mathcal{E}xt_{p_2}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \\ &\xrightarrow{\partial_1} \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \\ &\xrightarrow{\partial_2} \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \\ &\xrightarrow{\partial_3} \mathcal{E}xt_{p_2}^3(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \xrightarrow{\alpha_3} \mathcal{E}xt_{p_2}^3(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \xrightarrow{\beta_3} \mathcal{E}xt_{p_2}^3(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим морфизм ∂_2 в этой последовательности. Из леммы 3 непосредственно получаем $\mathrm{rk} \ker \partial_2 = 1$; тем самым, $\ker \partial_2$ обратим как ядро морфизма локально свободных пучков. Теперь заметим, что ввиду (20), (21) и равенств (23) морфизм ∂_2 включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 3\mathcal{O}_{X_3}(-1, -1) & \longrightarrow & 3\mathcal{O}_{X_3}(0, -1) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) & \xrightarrow{e} & \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(0, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \\ \parallel & & \uparrow \lambda \\ \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}(1, 1), \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) & \xrightarrow{\partial_2} & \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_2}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \end{array}$$

Теперь из теоремы 2 следует, что e разлагается в композицию

$$3\mathcal{O}_{X_3}(-1, -1) \xrightarrow{D} 3\mathcal{O}_{X_3}(0, -1) \xrightarrow{e'} 3\mathcal{O}_{X_3}(0, -1),$$

где e' – морфизм расслоений (т.е. $e' \otimes k(z)$ имеет одинаковый ранг во всех точках $z \in X_3$). Тем самым, пучок $\text{coker } e$ имеет гомологическую размерность ≤ 1 . С другой стороны, из первой тройки (20) следует, что

$$\text{coker}(\lambda: \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\theta_{T_2}, \theta_{T_1}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\theta_{T_1}(0, 1), \theta_{T_1})) = \mathcal{E}xt_{p_2}^3(\theta_{T_1}, \theta_{T_1}) \simeq \theta_{X_3},$$

а значит, с учетом утверждения (ii) леммы 3 получаем, что пучок

$$\mathcal{L} := \ker(\lambda: \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\theta_{T_2}, \theta_{T_1}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\theta_{T_1}(0, 1), \theta_{T_1}))$$

обратим. Это вместе с предыдущей диаграммой дает точную последовательность $0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \text{coker } \partial_2 \rightarrow \text{coker } e \rightarrow \theta_{X_3} \rightarrow 0$. Отсюда и из условия $hd(\text{coker } e) \leq 1$ получаем, что $hd(\text{coker } \partial_2) \leq 1$; тем самым,

$$\text{Tor}_2^{\theta_{X_3}}(\text{coker } \partial_2, k(z)) = 0, \quad z \in X_3. \quad (25)$$

Далее, из (24) и леммы 3 следует, что $\mathcal{E}xt_{p_2}^1(\theta_{T_1}(1, 1), \theta_{T_1}) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{E}xt_{p_2}^2(\theta_{T_2}, \theta_{T_1})$ – морфизм локально свободных пучков ранга 3, притом $\text{rk } \partial_2 = 2$, а значит, пучок $\ker \partial_2$ обратим. Более того, из (25) этот пучок является подрасслоением в $\mathcal{E}xt_{p_2}^1(\theta_{T_1}(1, 1), \theta_{T_1})$. Отсюда и из (24) и утверждения (iii) леммы 3 получаем, что пучок $\mathcal{E}xt_{p_2}^1(\theta_{T_3}, \theta_{T_1})$ локально свободен ранга 3. Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (i) Пучок $\mathcal{E} := \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\theta_{T_3}, \theta_{T_1})$ локально свободен ранга 3, и имеет место точная последовательность расслоений на X_3

$$0 \rightarrow \text{im } \alpha_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \text{im } \beta_1 \rightarrow 0, \quad (26)$$

где $\text{rkim } \beta_1 = 1$.

(ii) Морфизм замены базы $b(z): \mathcal{E} \otimes k(z) \rightarrow \text{Ext}^1(\theta_{Z_3}, k(0))$ инъективен для любого $z = (\{0\}, Z_2, Z_3) \in X_3$.

Из этого предложения с учетом неприводимости многообразия $H_4(0)$ (см. [1], [2]) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. 1) Схема $X_4 := P(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\check{\mathcal{E}})$, параметризующая пунктуальные флаги $z = (Z_2, Z_3, Z_4)$, $\{0\} \in Z_2 \subset Z_3 \subset Z_4$, является гладким неприводимым многообразием, и проекция $\pi_4: X_4 \rightarrow X_3: (Z_2, Z_3, Z_4) \rightarrow (Z_2, Z_3)$ совпадает со структурным морфизмом $\mathbb{P}(\check{\mathcal{E}}) \rightarrow X_3$.

2) Морфизм забывания

$$\sigma: X_4 \rightarrow H_4(0): (Z_2, Z_3, Z_4) \rightarrow Z_4 \quad (27)$$

сюръективен и является десингуляризацией многообразия $H_4(0)$.

3.3. Свойства пучка $\mathcal{E}|D$. Многообразие X_D и $\mathcal{Y}$. Рассмотрим произвольную точку $z = (\{0\}, Z_2, Z_3) \in D$. Из описания (22) следует, что точна тройка

$$0 \rightarrow k(0)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_3} \rightarrow k(0) \rightarrow 0. \quad (28)$$

Применяя к ней функтор $\text{Ext}^\bullet(-, k(0))$, получим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(k(0), k(0)) &\xrightarrow{\gamma_{0z}} \text{Hom}(\mathcal{O}_{Z_3}, k(0)) \longrightarrow \text{Hom}(k(0)^2, k(0)) \\ &\xrightarrow{\partial_{1z}} \text{Ext}^1(k(0), k(0)) \xrightarrow{\varepsilon_z} \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{Z_3}, k(0)). \end{aligned}$$

Здесь, очевидно, γ_{0z} – изоморфизм и из (28) и отождествления $\text{Ext}^1(k(0), k(0)) = T_0\mathbf{P}^3$ следует, что $\text{im } \partial_{1z} = T_0Z_3 \simeq k^2$, поэтому $\text{im } \varepsilon_z \simeq k$ и для любого вектора $\xi \in \text{Ext}^1(k(0), k(0)) \setminus \text{im } \partial_{1z}$ соответствующее расширение $\xi : 0 \rightarrow k(0) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_2} \rightarrow k(0) \rightarrow 0$ определяет схему $Z_2(\xi)$ такую, что

$$\text{Span}(T_0Z_3, T_0Z_2) = \text{Ext}^1(k(0), k(0)) = T_0\mathbf{P}^3. \quad (29)$$

Для этого вектора ξ вектор $0 \neq \varepsilon_z(\xi) \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{Z_3}, k(0))$ определяет расширение $0 \neq \varepsilon_z(\xi) : 0 \rightarrow k(0) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_4} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_3} \rightarrow 0$, входящее с (28) и предыдущей тройкой в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & k(0)^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_3} & \longrightarrow & k(0) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & k(0)^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_4} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_2} \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & k(0) & = & k(0) \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array} \quad (30)$$

Здесь по построению $Z_3 \subset Z_4 \supset Z_2$. Тем самым, в силу (29) для любой прямой $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^3$ через точку 0 получаем $l(\mathbf{P}^1 \cap Z_4) \geq 2$. Последнее неравенство ввиду условия $l(Z_4) = 4$ необходимо является равенством, а значит, $\mathcal{O}_{Z_4} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}^3/\mathfrak{m}^2$, где $\mathfrak{m} = \mathcal{I}_{0, \mathbf{P}^3}$ – пучок идеалов (приведенной) точки 0. Другими словами,

$$Z_4 = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}^3/\mathfrak{m}^2) = \text{Spec}(k[[x, y, z]]/(x, y, z)^2) = T_0\mathbf{P}^3. \quad (31)$$

Так как $\text{Ext}^1(k(0), k(0)) = \text{Ext}_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}) \otimes k(z) \simeq 3\mathcal{O}_{X_3} \otimes k(z) \simeq 3\mathcal{O}_D \otimes k(z)$, глобализуя теперь гомоморфизм $\text{Ext}^1(k(0), k(0)) \xrightarrow{\varepsilon_z} \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{Z_3}, k(0))$ до морфизма $\mathcal{O}_D$ -пучков $\varepsilon_D : 3\mathcal{O}_D = \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})|_D \rightarrow \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})|_D = \mathcal{E}|D$, легко получаем, что $\text{im } \varepsilon_D$ есть канонический фактор-пучок пучка $3\mathcal{O}_D$, т.е. изоморфен $g_D^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$, где $g_D := g|D : D \rightarrow \text{Sing } H_3(0)$ – проекция (см. замечание 1). Таким образом, учитывая следствие 3, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (i) *Морфизм локально свободных $\mathcal{O}_D$ -пучков*

$$\varepsilon_D: 3\mathcal{O}_D = \mathcal{E}xt_{\mathbf{P}}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})|D \rightarrow \mathcal{E}|D,$$

индуцированный сюръекцией $\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1}$, является морфизмом расслоений ранга 3 на D , имеющим ранг 1, и

$$\mathrm{im} \varepsilon_D = g_D^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1). \quad (32)$$

Таким образом, вложение подмногообразия $\mathcal{Y} := \mathbb{P}((\mathrm{im} \varepsilon_D)^\vee)$ в многообразие $X_D := X_4 \times_{X_3} D$ есть сечение $D \hookrightarrow X_D: (Z_2, Z_3) \mapsto (Z_2, Z_3, Z_4)$, $Z_4 = T_0 \mathbf{P}^3$, проекции $\pi_D = \pi_4|X_D: X_D \rightarrow D$.

(ii) Пусть $\sigma: X_4 \rightarrow H_4(0): (Z_2, Z_3, Z_4) \mapsto Z_4$ – морфизм забывания (27). Тогда $\sigma(\mathcal{Y}) = \{T_0 \mathbf{P}^3\}$ – точка.

3.4. Многообразие плоских некриволинейных флагов X_{pnc} . Рассмотрим множество плоских некриволинейных пунктуальных флагов $X_{\mathrm{pnc}} := \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in H_2(0) \times H_3(0) \times H_4(0) \mid \dim T_0 Z_4 = 2 \text{ и } Z_4 \text{ лежит в некоторой плоскости через точку } \{0\}, \text{ т.е. } \dim \mathrm{Span}(Z_4) = 2\}$. Заметим, что по непрерывности в силу следствия 3 X_{pnc} является подмногообразием в X_4 . При этом нетрудно видеть, что $X_{\mathrm{pnc}} \simeq P(\mathcal{F}) = \mathbb{P}(\check{\mathcal{F}})$, где $\mathcal{F}$ – некоторое подрасслоение ранга 2 в расслоении $\mathcal{E}|D$, так что естественная проекция (морфизм забывания) $\pi_1 = \pi_D|X_{\mathrm{pnc}}: X_{\mathrm{pnc}} \rightarrow D: (Z_2, Z_3, Z_4) \mapsto Z_4$ совпадает со структурным морфизмом $\mathbb{P}(\check{\mathcal{F}}) \rightarrow D$.

Рассмотрим проекцию $g_D := g|D: D \rightarrow \mathrm{Sing} H_3(0)$. Как следует из [6, предложение 2.7], для произвольной плоскости $Y \in \check{\mathbf{P}}$ слой $Q_Y = (g_D \pi_1)^{-1}(\{Y\})$ есть квадрика, и морфизм $\sigma|Q_Y$, где σ – морфизм забывания (27), совпадает с двойным накрытием $\sigma_Y: Q_Y \rightarrow P(S^2(T_0 Y))$, разветвленным в конике – образе Веронезе $P(T_0 Y) \hookrightarrow P(S^2(T_0 Y))$. Заметим, что $P(S^2(T_0 Y))$ является слоем проекции $\tau: \mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P} \rightarrow \check{\mathbf{P}}: z \mapsto \mathrm{Span} Z$, совпадающей со структурным морфизмом $\mathbb{P}(S^2 \Omega_{\check{\mathbf{P}}}) \rightarrow \check{\mathbf{P}}$ при естественном изоморфизме $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P} \simeq P(\mathrm{Ad}(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1))) \simeq \mathbb{P}(S^2 \Omega_{\check{\mathbf{P}}})$. Тем самым, морфизм $\sigma|X_{\mathrm{pnc}}$ совпадает с двойным накрытием $\sigma_1: X_{\mathrm{pnc}} \rightarrow \mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}$, разветвленным в дивизоре диагонали $\Delta = \{z \in \mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P} \mid \mathrm{Supp} Z = \{pt\}\}$. Итак, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Морфизм забывания $\sigma|X_{\mathrm{pnc}}$ совпадает с двойным накрытием $X_{\mathrm{pnc}} \rightarrow \mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}$, разветвленным в дивизоре диагонали $\Delta = \{z \in \mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P} \mid \mathrm{Supp} Z = \{pt\}\}$.*

3.5. Описание морфизма $\sigma|X_D$. Рассмотрим дополнение $X_D^* := X_D \setminus \{\mathcal{Y} \cup X_{\mathrm{pnc}}\}$ к объединению $\mathcal{Y} \cup X_{\mathrm{pnc}}$ в X_D . Предложение 4 непосредственно показывает, что

$$X_D^* = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_D \mid \dim T_0 Z_4 = 2, \dim \mathrm{Span}(Z_4) = 3\}. \quad (33)$$

Возьмем произвольную точку $(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_D^*$. Условия

$$\dim T_0 Z_4 = 2, \quad \dim \mathrm{Span}(Z_4) = 3$$

на схему Z_4 , как легко видеть, означают, что Z_4 лежит на ростке $(Q_{Z_4}, 0)$ некоторой квадрики через точку 0 с уравнением

$$Q_{Z_4} = \{z = ax^2 + bxy + cy^2, \ a, b, c \in k\} \quad (34)$$

в подходящих локальных координатах x, y, z в окрестности точки 0, причем $Y_{Z_4} := \mathcal{P}T_0Z_4 = \{z=0\} \in \check{\mathbf{P}}$ – проективная плоскость в $\mathbf{P}^3$ такая, что $Y_{Z_4} \cap Z_4 = Y_{Z_4} \cap Q_{Z_4} = Z_3$. Заметим, что проекция $(x, y, z) \mapsto (0, y, z)$ осуществляет аналитический изоморфизм ростков $(Q_{Z_4}, 0) \xrightarrow{\sim} (Y_{Z_4}, 0)$. Отсюда и из предложения 5 непосредственно следует, что морфизм $\sigma|_{X_{\text{pnc}}}$ продолжается до двойного накрытия $\sigma|(X_D^* \cup X_{\text{pnc}}) = \sigma|(X_D \setminus \mathcal{Y})$. Тем самым, с учетом предложения 4 (ii) получаем, что $\sigma|_{X_D}$ пропускается через двойное накрытие σ_D в коммутативной диаграмме, продолжающей двойное накрытие $\sigma_1: X_{\text{pnc}} \rightarrow \text{Hilb}^2 \mathbf{P} \simeq P(\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1)))$:

$$\begin{array}{ccc} X_{\text{pnc}} & \hookrightarrow & X_D \\ \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_D \\ P(\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1))) & \xrightarrow{j} & P(\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1)) \oplus \mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}}(m)) \end{array}, \quad (35)$$

где вложение j индуцировано вложением первого слагаемого в прямую сумму

$$\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1)) \oplus \mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}}(m),$$

а m – некоторое целое число. Итак, $\sigma|_{X_D}$ разлагается в композицию

$$\sigma|_{X_D} = \sigma_Y \cdot \sigma_D, \quad (36)$$

где по конструкции $\sigma_Y: \sigma_D(X_D) = P(\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1)) \oplus \mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}}(m)) \rightarrow \sigma(X_D)$ представляет собой стягивание в точку $\{T_0\mathbf{P}^3\}$ сечения $P(\mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}}(m))$ структурной проекции

$$P(\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1)) \oplus \mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}}(m)).$$

Таким образом, $\sigma(X_D)$ – конус с вершиной в точке $\{T_0\mathbf{P}^3\}$ над многообразием

$$P(\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1))) \simeq \text{Hilb}^2 \mathbf{P}.$$

Итак, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} D \simeq & \mathcal{Y} & \hookrightarrow & X_D & \\ \downarrow g_D & \downarrow \sigma_D & & \downarrow \sigma_D & \\ \check{\mathbf{P}} \simeq & P(\mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}}(m)) & \hookrightarrow & P(\mathcal{A}d(T_{\check{\mathbf{P}}}(-1)) \oplus \mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}}(m)) & . \\ & \downarrow \sigma_Y & & \downarrow \sigma_Y & \\ & \{T_0\mathbf{P}^3\} & \in & \sigma(X_D) & \end{array} \quad (37)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Конус $\sigma(X_D)$ над $\text{Hilb}^2 \mathbf{P}$ содержит дивизориальный подконус K_Δ над дивизором Δ , причем по построению $K_\Delta = \{Z_4 \in H_4(0) \mid Z_4 \text{ не является локально полным пересечением в } \mathbf{P}^3\}$.

3.6. Исключительный дивизор W на X_4 . Стягивание дивизора W при морфизме σ . Рассмотрим многообразие $X_3^* := X_3 \setminus D$ и возьмем произвольную точку $z = (Z_2, Z_3) \in X_3^*$. По определению Z_3 есть криволинейная схема (т.е. лежащая на гладкой кривой); тем самым, точна тройка

$$\xi : 0 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_2} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_3} \xrightarrow{\otimes k(0)} k(0) \rightarrow 0. \quad (38)$$

Применяя к этой тройке функтор $\text{Ext}^\bullet(-, k(0))$, получаем длинную точную последовательность; в этой последовательности первый связывающий гомоморфизм

$$\partial_1 : \text{Hom}(\mathcal{O}_{Z_2}, k(0)) \rightarrow \text{Ext}^1(k(0), k(0))$$

в силу леммы 2 инъективен, поэтому образ $\text{im } \alpha_1$ следующего за ∂_1 гомоморфизма

$$\alpha_1 : \text{Ext}^1(k(0), k(0)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{Z_3}, k(0))$$

двумерен. Поскольку в силу леммы 2 и предложения 3 (ii)

$$P(\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{Z_2}, k(0))) = \pi_4^{-1}(z), \quad (39)$$

где $\pi_4 : X_4 \rightarrow X_3$ – проекция, то $W_z := P(\text{im } \alpha_1) \simeq \mathbf{P}^1$ – дивизор в $\pi_4^{-1}(z)$. Положим $W^* := \bigcup_{z \in X_3^*} W_z$ и пусть $W := \overline{W^*}$ – замыкание W^* в X_4 . По построению W – дивизор на X_4 .

Опишем произвольную точку $w = (Z_2, Z_3, Z_4) \in W^*$. Для этого, отождествляя точки из $\text{Ext}^1(k(0), k(0)) = T_0 \mathbf{P}^3$ с 0-мерными схемами длины 2 с носителем в 0 и учитывая отождествление (39), возьмем какую-либо схему (длины 2) $Z'_2 \in \text{Ext}^1(k(0), k(0)) \setminus (\text{im } \partial_1)$ (т.е. $Z'_2 \neq Z_2$) такую, что $P(k\alpha_1(Z'_2)) = w$. Тогда по определению отображений ∂_1 и α_1 имеем коммутативную диаграмму расширений

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \xi : 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_3} & \longrightarrow & k(0) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_4} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z'_2} \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & k(0) & \equiv & k(0) \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array} \quad (40)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из диаграммы (40) и условия $Z'_2 \neq Z_2$, где $Z_2, Z'_2 \subset Z_4$ по построению, следует, что $\dim T_0 Z_4 = 2$. Тем самым, Z_4 лежит на ростке $(Q_{Z_4}, 0)$ некоторой квадррики вида (34) (либо, в специальном случае, плоскости) и притом не является локально полным пересечением в $(Q_{Z_4}, 0)$. Последним условием и средней горизонтальной тройкой в (40) (или, что равносильно, парой (Q_{Z_4}, Z_2)) схема Z_4 определяется однозначно (см. [6, § 2.5–6]).

Теперь для взятой выше точки $w = (Z_2, Z_3, Z_4)$ рассмотрим точку $z = (Z_2, Z_3) = \pi_4(w)$. По построению точке $w \in \pi_4^{-1}(z)$ биективно соответствует подпространство $\text{Span}(Z_2, Z'_2)$ в $T_0 \mathbf{P}^3$, т.е. плоскость через прямую $\mathcal{P}T_0 Z_2$, или, что то же самое, точка $v(w)$ дивизора D на X_3 , лежащая в слое $\gamma_1^{-1}(Z_2)$, где $\gamma_1: D \rightarrow \mathbf{P}$ – естественная проекция. Рассмотрим в плоскости $\nu^{-1}(Z_2)$ проективную прямую $l(w) = \text{Span}(z, v(w))$ и ее открытое подмножество $l^*(w) = l(w) \setminus \{v(w)\}$. Простое вычисление с уравнением (34) ростка Q_{Z_4} показывает, что

$$l^*(w) = \{(Z_2, Z'_3, Z_4) \in W^* \mid Z'_3 \subset Q_{Z_4} \cap Y, Z_2 \subset Y \in \check{\mathbf{P}}^3, T_0 Y \neq T_0 Q_{Z_4}\}. \quad (41)$$

Заметим, что условием $Z'_3 \subset Q_{Z_4} \cap Y$ схема Z'_3 , очевидно, определяется однозначно. Тем самым, через точку $w = (Z_2, Z_3, Z_4)$ проходит однозначно определяемая прямая $m^*(w) := \{(Z_2, Z'_3, Z_4) \in W^* \mid (Z_2, Z'_3) \in l^*(w)\}$, так что $\sigma(m^*(w)) = \{Z_4\} = Z_4$. Пусть $m(w)$ – замыкание $m^*(w)$ в W , $m(w) \simeq \mathbf{P}^1$. Мы получаем, что $\sigma(m(w)) = Z_4$. При этом в силу замечаний 2 и 3 $Z_4 \in K_\Delta$ и нетрудно видеть, что отображение $\sigma: W \rightarrow K_\Delta$ сюръективно. Таким образом имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Дивизор W на X_4 стягивается при морфизме $\sigma: X_4 \rightarrow H_4(0)$ на 4-мерный конус $K_\Delta = \{Z_4 \in H_4(0) \mid Z_4 \text{ не является локально полным пересечением в } \mathbf{P}^3\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нетрудно видеть, что W содержит сечение $\mathcal{U} = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4 \mid Z_4 = T_0 \mathbf{P}^3\}$ проекции $\pi_D: X_D \rightarrow D$ (см. предложение 4), притом коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \hookrightarrow & W \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \{T_0 \mathbf{P}^3\} & \in & K_\Delta \end{array} \quad (42)$$

Собирая теперь вместе результаты предложений 3, 4, 6, следствия 3, замечания 4 и описания морфизма $\sigma|X_D$ (см. (35)–(37)), получаем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3. (i) Пусть X_3 – многообразие пунктуальных флагов длины 3 в пространстве, $p_2: \mathbf{P}^3 \times X_3 \rightarrow X_3$ – проекция и $\mathcal{E} := \mathcal{E}xt_{p_2}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{T}_3}, \mathcal{O}_{\mathbf{T}_1})$. Пучок $\mathcal{E}$ локально свободен ранга 3 и $X_4 = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ – гладкое неприводимое многообразие, параметризующее пунктуальные флаги $z = (Z_2, Z_3, Z_4)$, $\{0\} \in Z_2 \subset Z_3 \subset Z_4$ длины 2, 3 и 4, с проекцией $\pi_4: X_4 \rightarrow X_3: (Z_2, Z_3, Z_4) \rightarrow (Z_2, Z_3)$, совпадающей со структурным морфизмом $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X_3$.

(ii) Рассмотрим на многообразии X_4 дивизоры $X_D = \pi_4^{-1}(D) = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4 \mid Z_3 \text{ не является локально полным пересечением}\}$ и $W = \{(Z_2, Z_3, Z_4) \in X_4 \mid Z_4 \text{ не является локально полным пересечением}\}$ и пусть $\sigma: X_4 \rightarrow H_4(0): (Z_2, Z_3, Z_4) \mapsto Z_4$ – морфизм забывания. Тогда σ является бирациональным морфизмом, разлагающимся в композицию $\sigma = \sigma_2 \cdot \sigma_1$, где σ_1 есть стягивание дивизора W , а σ_2 есть морфизм нормализации (склейки вдоль дивизора $\sigma_1(X_D)$), так что $\sigma|_{X_D}: X_D \rightarrow \sigma(X_D)$ есть двойное в общей точке накрытие. При этом $K_\Delta = \sigma(W) = \{Z_4 \in H_4(0) \mid Z_4 \text{ не является локально полным пересечением}\}$, а $\sigma(X_D) = \{Z_4 \in H_4(0) \mid Z_4 \text{ не является криволинейной схемой (т.е. не лежит на гладкой кривой)}\}$. Более того, $\sigma(X_D)$ есть конус над $\text{Hilb}^2 \mathbf{P}$, в котором K_Δ есть подконус над диагональю $\Delta \subset \text{Hilb}^2 \mathbf{P}$, причем $\sigma(X_D)$ есть множество особенностей многообразия $H_4(0)$: $\sigma(X_D) = \text{Sing } H_4(0)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Briangon J. Description de $\text{Hilb}^n \mathbf{C}\{x, y\}$ // Invent. Math. 1977. V. 41. P. 45–89.
- [2] Iarrobino A. Punctual Hilbert Schemes. Memoires of the Amer. Math. Society. V. 10, 1977.
- [3] Granger M. Géométrie de schémas de Hilbert ponctuels // Mermoire Soc. Math. France Nouv. sér. n°9/10. 1981. V. 111. №3. P. 1–84.
- [4] Iarrobino A. Compressed algebras and components of the punctual Hilbert scheme // Sitges, 1983. Lecture Notes in Math. V. 1124. Berlin: Springer, 1985. P. 146–165.
- [5] Iarrobino A. Hilbert schemes of points: overview of last ten years // Proc. of AMS. Symp. in Pure Math. (Algebraic Geometry, Bowdoin, 1985). V. 46, 1987. P. 297–320.
- [6] Тихомиров А.С. Гладкая модель пунктуальных схем Гильберта поверхности // Тр. МИАН. 1995. Т. 208. С. 318–334.
- [7] Drezet M., Le Potier J. Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbf{P}_2$ // Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 série. 1985. V. 18. P. 193–244.
- [8] Bănică C., Putinar M., Schumacher G. Variation der globalen Ext and Deformationen kompakter komplexen Raume // Math. Ann. 1980. V. 250. P. 135–155.

Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского
E-mail: alexandr@tikho.yaroslavl.su

Поступило
13.09.1999