Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Базисы из экспонент в весовых пространствах, порожденные нулями функций типа синуса, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 894–913

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:51:02

Базисы из экспонент в весовых пространствах, порожденные нулями функций типа синуса

А. М. Седлецкий

Если ω есть A_p -вес с некоторым дополнительным условием, а (λ) – отделяемая последовательность всех нулей некоторой функции типа синуса, обладающей определенным мультипликаторным (в смысле преобразования Фурье) свойством, то соответствующая система экспонент $(e^{i\lambda_n t})$ образует базис в весовом пространстве $L^p((-\pi, \pi), \omega(t) dt)$, $1 < p < \infty$.

Библиография: 18 названий.

1. Введение

Речь пойдет о базисах из экспонент, т.е. о базисах вида

$$e(\Lambda) = (t^k e^{i\lambda_n t})_{k=0}^{m_n-1}_{n=0}^\infty,$$

где $\Lambda = (\lambda_n, m_n)_{n=0}^\infty$ есть последовательность комплексных точек λ_n ($|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$) кратности $m_n \in \mathbb{N}$ в весовых пространствах на конечном интервале I . Для удобства рассматриваем симметричный интервал $I = (-\pi, \pi)$, к которому общий случай легко сводится.

В теории базисов из экспонент важную роль играют *функции типа синуса*, т.е. целые функции экспоненциального типа, для которых вне некоторой горизонтальной полосы верна оценка

$$|L(z)| \asymp e^{\pi|y|}, \quad y = \operatorname{Im} z$$

(символ $\asymp$ означает, что отношение правой и левой частей отграничено от 0 и ∞ на указанном множестве). Именно с помощью такой функции Левин [1] впервые предложил в указанной теории характеризовать последовательности Λ как множества нулей целой функции с теми или иными свойствами, хотя сам термин функция типа синуса был предложен позже [2]. В [1] доказано, что если Λ – последовательность всех нулей функции типа синуса, то система $e(\Lambda)$ образует обобщенный базис в $L^2(-\pi, \pi)$. Вскоре Головин [3] дал уточнение: если к тому же последовательность λ_n *отделима*, т.е.

$$\inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0,$$

то $e(\Lambda)$ – базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00225-а).

В этом вопросе замена $L^2(-\pi, \pi)$ на $L^p(-\pi, \pi) = L^p$, $p \neq 2$, приводит к существенным трудностям; то, что в условиях работы [3] система $e(\Lambda)$ образует базис в L^p , $1 < p < 2$, обладающий свойством Рисса, было доказано автором значительно позже [4]. *Свойство Рисса* заключается в ограниченности проекционного оператора

$$\sum_{\lambda_n \in \Lambda} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t} \rightarrow \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n > 0} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t}; \quad (1)$$

здесь $P_{m_n-1}(t)$ – многочлен степени не выше $m_n - 1$. Оно иницировано теоремой М. Рисса, по которой в случае тригонометрической системы e^{int} , $n \in \mathbb{Z}$, данный оператор, являющийся проектором из L^p на пространство Харди H^p , ограничен при $1 < p < \infty$ (см. [5; глава 9]). Введенное в [4], это дополнительное свойство базиса оказалось полезным (см., например, [4; § 3.1]). Ясно, что базис Рисса из экспонент в L^2 свойством Рисса обладает.

В гораздо более сложном случае $p > 2$ сформулированный только что результат удалось доказать [6] при дополнительном условии, что соответствующая функция $L(x)$ типа синуса есть мультипликатор Фурье класса (L^p, L^p) .

Переходим к весовым пространствам.

Пусть I – интервал вещественной прямой (конечный или бесконечный), пусть ω – вес на I , т.е. измеримая, почти всюду положительная на I функция. Через $L_\omega^p(I) = L^p(I, \omega(t) dt)$ обозначаем пространство измеримых на I функций с нормой

$$\|f\|_{p, \omega} = \|f\|_{L_\omega^p(I)} = \left(\int_I |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty.$$

Естественно рассматривать веса, для которых в случае конечного интервала I верны топологические вложения

$$L^\infty(I) \hookrightarrow L_\omega^p(I) \hookrightarrow L^1(I). \quad (2)$$

Действительно, правое вложение сопутствует тому факту, что весь аппарат гармонического анализа (начиная с формул для коэффициентов Фурье) есть аппарат интегральный, а левое вложение обеспечивает принадлежность всех функций системы $e(\Lambda)$ пространству $L_\omega^p(I)$. Впредь без дополнительных оговорок имеем дело только с такими весами.

Вес ω на $\mathbb{R}$ называют A_p -весом и пишут $\omega \in (A_p)$ (см., например, [7]), если

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} = M < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad (3)$$

где верхняя грань берется по всем конечным интервалам I . В основном (но не только, см. теорему 1) далее будут встречаться A_p -веса.

Из (3) следует, что для сужения A_p -веса на конечный интервал I верны свойства

$$\omega \in L^1(I), \quad \omega^{-1/(p-1)} \in L^1(I), \quad (4)$$

влекущие (по неравенству Гёльдера) вложения (2).

Описание весовых пространств, в которых тригонометрическая система e^{int} , $n \in \mathbb{Z}$, образует базис, дано в статье Ханта, Макенхаупта и Уидена [8] (см. также [9]), где доказано следующее. Если ω есть 2π -периодический вес, то тригонометрическая

система образует базис в $L^p((-\pi, \pi), \omega(t) dt)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда ω есть A_p -вес.

Нелишне отметить, что именно с помощью тригонометрической системы и весовых пространств впервые был построен базис гильбертова пространства, не являющийся базисом Рисса. Это сделал Бабенко [10], доказавший, что если $-1 < \alpha \neq 0 < 1$, то тригонометрическая система образует в $L^2((-\pi, \pi), |t|^\alpha dt)$ базис, не являющийся базисом Рисса.

В связи с результатом [8] вызывает интерес конкретный вид A_p -весов. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ω — 2π -периодический вес вида

$$\omega(t) = \prod_{j=1}^s |t - b_j|^{\alpha_j}, \quad -\pi = b_1 < \dots < b_s = \pi, \quad 2 \leq s \in \mathbb{N}, \quad t \in (-\pi, \pi), \quad (5)$$

$$-1 < \alpha_j < p - 1, \quad 1 < p < \infty, \quad j = 1, \dots, s, \quad \alpha_1 = \alpha_s. \quad (6)$$

Тогда $\omega \in (A_p)$.

Результатов о базисах общих систем экспонент в весовых пространствах пока не много.

Моисеев [11] рассмотрел системы специального вида

$$e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

с $\Delta \in \mathbb{R}$ и получил критерии их базисности в пространствах $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, где ω — четный вес вида (5) с условиями (6), причем $s = 5$, $b_3 = 0$.

В [12] Λ есть отделимая последовательность всех нулей целой функции $L(z)$ экспоненциального типа с индикатором $h_L(\theta) = \pi |\sin \theta|$, а вес ω имеет вид (5). В каждом из следующих двух случаев система $e(\Lambda)$ образует базис в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, обладающий свойством Рисса:

1) $0 \leq \alpha_j = \alpha < p - 1$ при всех $j = 1, \dots, s$, а $L(z)$ имеет вид

$$L(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma(t) < \infty, \quad \sigma(\pm \pi) \neq \sigma(\pm \pi \mp 0) \quad (7)$$

(частный случай функции типа синуса);

2) $\max(0, p - 2) \leq \alpha_j = \alpha < p - 1$ при всех $j = 1, \dots, s$, а все нули функции $L(z)$ лежат в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq H$, и

$$|L(x + iy_0)|^{p/(1+\alpha)} \in (A_{p/(1+\alpha)})$$

при некотором $y_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0| > H$. (Последнее условие выполняется, в частности, для функции типа синуса.)

В данной статье мы исследуем базисные свойства систем $e(\Lambda)$, порожденных нулями функций типа синуса, в весовых пространствах с более общими, чем в [11], [12], весами. Отличительной чертой работы является систематическое привлечение весовых мультипликаторов Фурье.

Обозначаем через $\hat{f}$ (или $f^\wedge$) преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, т.е.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обратное преобразование Фурье обозначается через $\tilde{f}$.

Функции, определенные на конечном интервале, автоматически будем считать продолженными нулем на внешность интервала. Всюду далее $1 < p < \infty$.

Пусть I, J – конечные интервалы в $\mathbb{R}$, пусть ω (Ω) – вес на I (J). Функцию $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ назовем *мультипликатором класса* $(L_\omega^p(I), L_\Omega^p(J))$, если для любой $f \in L_\omega^p(I)$ существует $g \in L_\Omega^p(J)$ такое, что

$$m\hat{f}(x) = \hat{g}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \|g\|_{p,\Omega} \leq C\|f\|_{p,\omega}, \quad (8)$$

где C от f не зависит.

Через K обозначаем класс финитных бесконечно дифференцируемых функций на прямой. Пусть $m \in L^\infty(\mathbb{R})$; на пространстве K введем оператор T по правилу

$$(Tf)^\wedge(x) = m(x)\hat{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть ω – вес на $\mathbb{R}$. Функция m называется L_ω^p -мультипликатором (см. [13]), если для любой $f \in K$

$$\|Tf\|_{p,\omega} \leq C\|f\|_{p,\omega},$$

где C от f не зависит; нормы предполагаются в $L_\omega^p(\mathbb{R})$.

В невесовом случае (т.е. при $\omega \equiv 1$) это определение переходит в известное определение мультипликатора Фурье класса (L^p, L^p) (см. [14; п. 2.2]).

Связь L_ω^p -мультипликаторов с мультипликаторами класса $(L_\omega^p(I), L_\Omega^p(J))$ в случае, когда $\Omega = \omega$, будет частично освещена в лемме 2.

Скажем, что вес ω на I имеет *особенность порядка* $\alpha \in \mathbb{R}$ в точке $b \in \bar{I}$, если

$$\text{существует } \delta > 0: \quad \omega(t) \asymp |t - b|^\alpha, \quad 0 < |t - b| < \delta, \quad t \in I.$$

В случаях, когда будет встречаться пространство $L_\omega^p(I)$, где $\omega \in (A_p)$, а I – конечный интервал, под весом на I , естественно, будем понимать сужение ω на I .

Получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Λ – отделимая последовательность всех нулей некоторой функции $L(z)$ типа синуса, и пусть ω есть A_p -вес, $1 < p < \infty$, сужение которого на $(-\pi, \pi)$ имеет особенность порядка $\alpha \in (-1, p - 1)$ в точках $\pm \pi$.

Предположим, что существуют вес Ω на $(-2\pi, 2\pi)$, имеющий особенность порядка α в точке 0, и $y_0 \in \mathbb{R}$ такие, что функция $L(x + iy_0)$ есть мультипликатор класса $(L_\omega^p(-\pi, \pi), L_\Omega^p(-2\pi, 2\pi))$.

Тогда если система $e(\Lambda)$ минимальна в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, то эта система образует базис в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, обладающий свойством Рисса.

В заметке [15], где (среди других результатов) анонсирована большая часть результатов данной статьи, теорема 1 дана с некоторым дополнительным условием.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть ω есть A_p -вес, $1 < p < \infty$, сужение которого на $(-\pi, \pi)$ имеет особенность порядка $\alpha \in (-1, p - 1)$ в точках 0, $\pm \pi$.

Пусть Λ – отделимая последовательность всех нулей некоторой функции $L(z)$ типа синуса, и пусть при некотором $y_0 \in \mathbb{R}$ функция $L(x + iy_0)$ есть L_ω^p -мультипликатор.

Тогда если система $e(\Lambda)$ минимальна в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, то эта система образует базис в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, обладающий свойством Рисса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если вес ω задан условиями (5), (6), то требование минимальности в теореме 1 и в следствии 1 излишне, так как в этом случае оно выполняется автоматически.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Λ – отделимая последовательность всех нулей функции вида (7). Пусть $\sigma_0(t) = \sigma(t)$, $|t| < \pi$, а значения $\sigma_0(\pm\pi)$ определяются по непрерывности. Предположим, что функция $\sigma_0(t)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и

$$\text{var}(\sigma'_0(t) : t \in [-\pi, \pi]) < \infty.$$

Пусть ω есть π -периодический A_p -вес, имеющий особенность порядка $\alpha \in (-1, p-1)$ в точке 0. Тогда система $e(\Lambda)$ образует базис в $L^p_\omega(-\pi, \pi)$, обладающий свойством Рисса.

В сферу действия следствия 2 входит тригонометрическая система e^{int} , $n \in \mathbb{Z}$; ей отвечает случай $L(z) = \sin \pi z$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ω есть A_p -вес, $1 < p < \infty$, имеющий особенность порядка $\alpha \in (-1, p-1)$ в точках $\pm\pi$. Тогда каждая из систем

$$e^{i(n+ih \operatorname{sign} n)t}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad e^{i(n+(ih-1/2) \operatorname{sign} n)t}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

образует базис в $L^p_\omega(-\pi, \pi)$, обладающий свойством Рисса.

Благодаря предложению 1, из теоремы 2 сразу получается

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть вес ω задается условиями (5), (6). Тогда каждая из систем (9) образует в пространстве $L^p_\omega(-\pi, \pi)$ базис, обладающий свойством Рисса.

2. Доказательство предложения 1

Рассмотрим сужение функции $\omega(t)$ на интервал $(-\pi, 3\pi)$, длина которого равна двум периодам функции ω . Имеем $b_s = b_1 + 2\pi$; положим

$$b_{s+1} = b_2 + 2\pi, \quad \dots, \quad b_{s+k} = b_{k+1} + 2\pi, \quad \dots, \quad b_{2s-1} = b_s + 2\pi.$$

Далее, имеем $\alpha_s = \alpha_1$; положим

$$\alpha_{s+1} = \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_{s+k} = \alpha_{k-1}, \quad \dots, \quad \alpha_{2s-1} = \alpha_s.$$

Тогда при $t \in (\pi, 3\pi)$ функция $\omega(t)$ будет представлена произведением (5), где $j = s, \dots, 2s-1$, причем для всех α_j будет выполняться двойное неравенство из условия (6).

Обозначим через d_j середины интервалов (b_j, b_{j+1}) , $j = 1, \dots, 2s-2$; пусть $d_0 = b_1$, $d_{2s-1} = b_{2s-1}$. Введем интервалы $J_j = (d_{j-1}, d_j)$, $j = 1, \dots, 2s-1$. Тогда из (5) следует, что

$$c|t - b_j|^{\alpha_j} \leq \omega(t) \leq C|t - b_j|^{\alpha_j}, \quad t \in J_j, \quad t \neq b_j, \quad j = 1, \dots, 2s-1,$$

где постоянные $C, c > 0$ от j не зависят.

Хорошо известно (см., например, [7]), что

$$\omega(t) = |t|^\alpha \in (A_p), \quad 1 < p < \infty, \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < \alpha < p-1.$$

И так как вес удовлетворяет условию (A_p) вместе с любым своим сдвигом, то условие (3) выполняется для всех интервалов.

Фиксируем положительное r так, чтобы $r < |b_{j+1} - b_j|/2$ при всех $j = 1, \dots, 2s-2$. По только что доказанному условие (3), в частности, выполняется для всех интервалов

$$I \subset \bigcup J_j: |I| \leq r. \quad (10)$$

Все интервалы $I \subset (-\pi, 3\pi)$ длины $\leq r$, не вошедшие в множество (10), принадлежат множеству

$$d_j - r \leq t \leq d_j + r, \quad j = 1, \dots, 2s-2. \quad (11)$$

Это множество находится на положительном расстоянии от множества точек b_j , $j = 1, \dots, 2s-1$, поэтому на нем

$$0 < c_1 \leq \omega(t) \leq C_1 < +\infty.$$

Отсюда следует, что условие (3) выполнено для всех интервалов длины $\leq r$, лежащих на множестве (11). В результате этого шага получаем, что условие (3) выполнено для всех интервалов $I \subset (-\pi, 3\pi)$ длины $\leq r$.

На следующем шаге покажем, что условие (3) выполняется для всех интервалов $I \subset (-\pi, 3\pi)$ таких, что

$$0 < r < |I| \leq 4\pi.$$

При таком ограничении условие (3) принимает вид

$$\sup_I \left(\int_I \omega(t) dt \right) \left(\int_I (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} < \infty. \quad (12)$$

Но $\omega(t) \geq 0$, поэтому очевидно, что верхняя грань в (12) достигается при $I = (-\pi, 3\pi)$. Из формулы (5) и условий (6) на α_j следует, что в случае $I = (-\pi, 3\pi)$ оба интеграла в (12) конечны, и цель второго шага достигнута.

В итоге мы доказали, что условие (3) выполняется для всех интервалов $I \subset (-\pi, 3\pi)$.

Предложение 1 в полном объеме вытекает отсюда и из периодичности веса.

Действительно, так как любой интервал длины $\leq 2\pi$ путем сдвига на некоторое число, кратное 2π , можно поместить в интервал $(-\pi, 3\pi)$, то из доказанного и из 2π -периодичности $\omega(t)$ следует выполнение условия (3) для всех интервалов $I \subset \mathbb{R}$ длины $\leq 2\pi$.

Далее, пусть $|I| > 2\pi$, пусть a – левый конец I . Тогда найдется натуральное $k \geq 2$ такое, что

$$J = [a, a + 2k\pi] \supset I \supset [a, a + 2(k-1)\pi].$$

Мы только увеличим выражение под знаком $\sup$ в (3), если интервал интегрирования I заменим отрезком J , а его длину $|I|$ заменим на $2(k-1)\pi$. Используя 2π -периодичность веса, будем иметь

$$\begin{aligned} & \sup_{|I| > 2\pi} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(t) dt \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} \\ & \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\frac{k}{2(k-1)\pi} \int_a^{a+2\pi} \omega(t) dt \right) \left(\frac{k}{2(k-1)\pi} \int_a^{a+2\pi} (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} \leq 2^p M, \end{aligned}$$

где M – константа в условии (3), доказанного для $|I| \leq 2\pi$. Предложение 1 доказано.

3. Утверждения, применяемые при доказательствах теорем 1, 2 и следствий

3.1. Функции типа синуса.

ТЕОРЕМА А [1]. Пусть $L(z)$ – функция типа синуса, пусть $\Lambda = (\lambda_n; m_n)$ – ее нули. Тогда

- 1) все точки λ_n лежат в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq H$, и их число в прямоугольнике $|\operatorname{Re} z - t| < 1$, $|\operatorname{Im} z| \leq H$ ограничено по $t \in \mathbb{R}$; в частности, кратности нулей ограничены в совокупности, т.е. $\sup m_n = m < \infty$;
- 2) при любом $\delta > 0$ вне кружков радиуса δ с центрами в точках λ_n имеет место оценка

$$|L(z)| \geq c(\delta)e^{\pi|y|}, \quad c(\delta) > 0. \quad (13)$$

3.2. Преобразование Лапласа как оператор в весовых пространствах.

Обозначим через $G(z)$ преобразование Лапласа функции g , т.е.

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} g(t) dt, \quad x = \operatorname{Re} z > 0.$$

Норму в пространстве $L^p(I, |t|^\alpha dt)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

ТЕОРЕМА В [12; § 4.2]. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha < p - 1$. Тогда если $g \in L^p(\mathbb{R}_+, t^\alpha dt)$, то для любого $y \in \mathbb{R}$

$$G_y(x) := G(x + iy) \in L^p(\mathbb{R}_+, t^{p-2-\alpha} dt) \quad \text{и} \quad \|G_y\|_{p,p-2-\alpha} \leq C \|g\|_{p,\alpha},$$

где C от g и y не зависит.

3.3. Преобразование Фурье и весовые пространства.

ЛЕММА 1. Пусть $\omega \in (A_p)$, $1 < p < \infty$, и пусть I – конечный интервал. Тогда если $f \in L_\omega^p(I)$, то для любого $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left\| \int_a^b e^{ixt} \hat{f}(t) dt \right\|_{L_\omega^p(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_\omega^p(I)},$$

где C от f , a , b не зависит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно опирается на теорему Ханта–Макенхаупта–Уидена [8], утверждающую, что преобразование Гильберта

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

тогда и только тогда задает ограниченный оператор в $L_\omega^p(\mathbb{R})$, когда $\omega \in (A_p)$.

Обозначим через $\tilde{f}_{(a,b)}(x)$ интеграл под знаком нормы в формулировке леммы 1. Имеем

$$\tilde{f}_{(a,b)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_I f(u) du \int_a^b e^{it(x-u)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u)}{x-u} (e^{ib(x-u)} - e^{ia(x-u)}) du$$

и, значит, если положить $f_1(u) = f(u)e^{-ibu}$, $f_2(u) = f(u)e^{-iau}$, то получим

$$\|\tilde{f}_{(a,b)}\|_{L_\omega^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} (\|Hf_1\|_{L_\omega^p(\mathbb{R})} + \|Hf_2\|_{L_\omega^p(\mathbb{R})}) \leq C \|f\|_{L_\omega^p(I)}$$

по цитированной теореме из [8]. Лемма 1 доказана.

3.4. Полнота систем экспонент в весовых пространствах.

ТЕОРЕМА С. Пусть ω – вес на $(-\pi, \pi)$, имеющий особенность порядка $\alpha \in (-1, p-1)$ в точках $\pm\pi$ и такой, что выполнены условия (4). Пусть Λ – последовательность всех корней некоторой целой функции экспоненциального типа $L(z)$ такой, что

$$|L(iy)| \geq C_0 e^{\pi|y|}$$

при $y > Y_0$ и $y < -Y_0$, $Y_0 \geq 0$. Тогда система $e(\Lambda)$ полна в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$.

В частности, если вес ω удовлетворяет условиям теоремы 1, а Λ – последовательность всех корней функции типа синуса, то система $e(\Lambda)$ полна в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$.

Основная часть теоремы В (без последнего предложения) доказана в [12; § 4.3, следствие 2]. Попутно отметим опечатку, допущенную в [12] при формулировке следствия 2: в нем напечатано “или” вместо “и”.

3.5. Весовые мультипликаторы.

ТЕОРЕМА D [13]. Пусть $t \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, пусть $\omega \in (A_p)$, $1 < p < \infty$. Тогда если выполнено условие

$$\sup_{R>0} \left(R \int_{R<|x|<2R} |m'(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty, \quad (14)$$

то $m(x)$ есть L_ω^p -мультипликатор.

ЛЕММА 2. Пусть функция $L(x)$ есть L_ω^p -мультипликатор. Если к тому же $L(z)$ – целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$, то $L(x)$ – мультипликатор класса

$$(L_\omega^p(I), L_\omega^p(J)), \quad I = (-a, a), J = (-a - \sigma, a + \sigma) \quad \text{для любого } a > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L^p(I)$. Пусть K_a – класс бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с носителями в $(-a, a)$. Он плотен в $L_\omega^p(I)$, поэтому существует $f_n \in K_a$ такая, что $f_n \rightarrow f$ в $L_\omega^p(I)$, $n \rightarrow \infty$. По определению L_ω^p -мультипликатора существует $g_n \in L_\omega^p(\mathbb{R})$ такая, что

$$L(x)\hat{f}_n(x) = \hat{g}_n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \|g_n\|_{p,\omega} \leq C \|f_n\|_{p,\omega}, \quad (15)$$

где правая норма – это норма в $L_\omega^p(I)$, а левая – в $L_\omega^p(\mathbb{R})$.

Так как $\text{supp } f_n \subset I$, то $\hat{f}_n$ – целая функция экспоненциального типа $\leq a$. По условию $L(z)$ – целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$. Значит, левая часть в равенстве (15), а следовательно, и правая, есть целая функция экспоненциального типа $\leq a + \sigma$. Отсюда следует, что $\text{supp } g_n \subset \bar{J}$ и норма g_n в (15) есть норма в $L_\omega^p(J)$.

Далее, из сходимости $f_n \rightarrow f$ в $L_\omega^p(I)$ и из неравенства для норм в (15) следует, что существует $g \in L_\omega^p(J)$ такая, что $g_n \rightarrow g$ в $L_\omega^p(J)$.

Теперь по правому вложению (2) заключаем, что $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$ соответственно в $L^1(I)$, $L^1(J)$. Но тогда

$$\hat{f}_n(x) \rightarrow \hat{f}(x), \quad \hat{g}_n(x) \rightarrow \hat{g}(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно на $\mathbb{R}$, и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (для всех $x \in \mathbb{R}$) и неравенстве (15), получаем свойства (8) с $m = L$, означающие, что $L(x)$ есть мультипликатор класса $L_\omega^p(I), L_\omega^p(J)$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Обозначая через B' пространство, сопряженное по отношению к банахову пространству B , имеем

$$(L_{\omega}^p(I))' = L_u^{p'}(I), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad u = \omega^{-p'/p} = \omega^{-1/(p-1)}, \quad (16)$$

причем реализация функционала Ψ на $L_{\omega}^p(I)$ осуществляется с помощью единственной отвечающей этому функционалу функции $\varphi \in L_u^{p'}(I)$ по правилу

$$\Psi(f) = \int_I f \varphi dt \quad \text{для любой } f \in L_{\omega}^p. \quad (17)$$

Из (16) и (4) видно, что вес u содержится в классе весов с условиями (2) вместе с ω .

Минимальность системы $e(\Lambda)$ в $L_{\omega}^p := L_{\omega}^p(-\pi, \pi)$ равносильна тому, что функция $L(z)/(z - \lambda_0)$ есть обратное преобразование Фурье некоторой функции из $L_u^{p'} := L_u^{p'}(-\pi, \pi)$, и если ввести функции

$$M_n(z) = \frac{(z - \lambda_n)^{m_n}}{L(z)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

то биортогональная система к системе $e(\Lambda)$ имеет вид

$$h_{nk}(t) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{m_n-k} \frac{M^{(m_n-k-i)}(\lambda_n)}{(m_n-k-i)!} \left(\frac{L(t)}{(t - \lambda_n)^i} \right)^{\wedge}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 0, \dots, m_n - 1$$

[12; § 7.1]; в частности, если $m_n \equiv 1$, то

$$h_n(t) = \left(\frac{1}{L'(\lambda_n)} \right) \left(\frac{L(t)}{t - \lambda_n} \right)^{\wedge}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Произвольной функции $f \in L_{\omega}^p(-\pi, \pi)$ отвечает биортогональный ряд по системе $e(\Lambda)$:

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} c_{nk} t^k \right) e^{i\lambda_n t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t}, \quad c_{nk} = \int_{-\pi}^{\pi} h_{nk}(t) f(t) dt. \quad (18)$$

В случае, когда $|\operatorname{Im} \lambda_n| \leq H < +\infty$ (это справедливо в условиях теоремы 1 по теореме А), ранее рассматривались так называемые прямоугольные частичные суммы ряда (18) (см. [12]). На этот раз придется рассмотреть их модификацию, состоящую в следующем.

Пусть $r > 0$. Обозначим через γ_r объединение двух простых кусочно-гладких кривых, расположенных соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} z < 0$, не проходящих через точки Λ и таких, что правая (соответственно левая) из них соединяет точки $r \pm i(H+1)$ (соответственно $-r \pm i(H+1)$) и пересекает вещественную ось в единственной точке r (соответственно $-r$).

Обозначим через E_r область, ограниченную кривыми γ_r и горизонтальными отрезками $-r \leq \operatorname{Re} z \leq r$, $|\operatorname{Im} z| = H+1$. Пусть $E_r^+ = E_r \cap \{z : \operatorname{Re} z > h\}$, где $h \geq 0$ фиксировано таким, что, во-первых, отрезок $\operatorname{Re} z = h$, $|\operatorname{Im} z| \leq H+1$ не проходит через точки Λ , и во-вторых, все точки λ_n : $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z > h$.

Назовем E_r и E_r^+ *модифицированными прямоугольниками*. Обозначим через Γ_r (соответственно Γ_r^+) границу модифицированной вертикальной полосы

$$E_r \cup \{z : -r < \operatorname{Re} z < r, |\operatorname{Im} z| \geq H + 1\} \\ (\text{соответственно } E_r^+ \cup \{z : h < \operatorname{Re} z < r, |\operatorname{Im} z| \geq H + 1\}).$$

Пусть

$$S_r = S_r(t; f) = \sum_{\lambda_n \in E_r} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t}, \quad S_r^+ = S_r^+(t; f) = \sum_{\lambda_n \in E_r^+} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t}.$$

Выражение S_r и есть модифицированная прямоугольная частичная сумма ряда (18), а S_r^+ – “проекция” этой суммы, отвечающая оператору (1). Пусть, далее,

$$R_r(t; f) = S_r(t, f) - \int_{-r}^r e^{izt} \widehat{f}(x) dx, \quad R_r^+(t; f) = S_r^+(t, f) - \int_h^r e^{izt} \widehat{f}(t) dt. \quad (19)$$

В [12; § 7.1], где исследовался случай веса (5) с условием $\max(0, p-2) \leq \alpha = \alpha_j < p-1$, $j = 1, \dots, s$, рассматривались прямоугольные частичные суммы (т.е. в роли γ_r выступали вертикальные отрезки $\operatorname{Re} z = \pm r$, $|\operatorname{Im} z| \leq H+1$) и были получены формулы

$$R_r(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E_r} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz, \quad R_r^+(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E_r^+} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz, \quad (20)$$

где $F(z)$ – кусочно-аналитическая функция, определяемая формулой

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}(u)L(u)}{u-z} du, \quad z \notin \mathbb{R}. \quad (21)$$

Принадлежность подынтегральной функции в (21) классу $L^1(\mathbb{R})$ обеспечивалась упомянутыми условиями на α_j и теоремой Питта, по которой $\widehat{f} \in L^q$, $(1+\alpha)/p + 1/q = 1$. В доказываемой теореме 1 условия на вес гораздо более общие, чем в [12], и потому нам предстоит более околный путь.

Пусть E_r , E_r^+ – модифицированные прямоугольники. Пусть $f \in K_\pi$ (K_π определен в доказательстве леммы 2); тогда, в частности, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Все шаги из [12] повторяются дословно; в итоге функция (21) имеет смысл и формулы (20) верны.

Преобразуем формулы (20). Так как $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ и $L(z)/(u-z) \in L^2(\mathbb{R})$ для любого $z \notin \mathbb{R}$ (что следует из определения функции типа синуса), то по неравенству Коши $F(z) \rightarrow 0$, $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm \infty$, равномерно в каждой вертикальной полосе. И так как в силу (13)

$$\left| \frac{e^{izt}}{L(z)} \right| \leq C e^{|y|(|t|-\pi)} \rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty,$$

при каждом $t \in (-\pi, \pi)$, то при $H \rightarrow +\infty$ формулы (20) переходят в формулы

$$R_r(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz, \quad R_r^+(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r^+} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz, \quad t \in (-\pi, \pi). \quad (22)$$

Теперь преобразуем формулу (21). Сдвиг $\Lambda = (\lambda_n, m_n) \rightarrow \Lambda_0 = (\lambda_n - iy_0, m_n)$ переводит $e(\Lambda)$ в эквивалентную систему $e(\Lambda_0)$. Но последовательность Λ_0 есть множество всех корней функции $L_0(z) = L(z + iy_0)$. Поэтому мы с самого начала можем

считать, что в теореме 1 $y_0 = 0$, т.е. существует вес Ω на $(-2\pi, 2\pi)$ такой, что функция $L(x)$ есть мультипликатор класса $(L_\omega^p(-\pi, \pi), L_\Omega^p(-2\pi, 2\pi))$. Это означает, что существует $g \in L_\Omega^p(-2\pi, 2\pi)$ такой, что

$$L(u)\widehat{f}(u) = \widehat{g}(u) \quad \text{и} \quad \|g\|_{p,\Omega} \leq C\|f\|_{p,\omega}, \quad (23)$$

где C от f не зависит.

Обозначим через $e_\pm^{izt}$ сужение функции e^{izt} на полупрямую $t \geq 0$ (z фиксировано). Тогда

$$\frac{1}{u-z} = \pm i \widetilde{e_\mp^{izt}} \quad \text{при} \quad y = \operatorname{Im} z \geq 0. \quad (24)$$

Теперь к правой части формулы (21) применим последовательно первую часть строки (23), равенство Парсеваля и формулу (24). Получим, что

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{g}(u)}{u-z} du = \pm \int_{-2\pi}^{2\pi} g(t) e_\mp^{izt} dt, \quad y \geq 0,$$

и, следовательно,

$$F(z) = i \int_{-2\pi}^0 e^{-izt} g(t) dt \quad \text{при} \quad y > 0, \quad (25)$$

$$F(z) = -i \int_0^{2\pi} e^{-izt} g(t) dt \quad \text{при} \quad y < 0. \quad (26)$$

Значит, для $f \in K_\pi$ верны формулы (22), где F определена в (25), (26), а g – в (23).

Класс K_π плотен в $L_\omega^p = L_\omega^p(-\pi, \pi)$, и потому для любой $f \in L_\omega^p$ существует $f_n \in K_\pi$: $f_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$, в норме L_ω^p . Обозначим через M оператор $f \rightarrow g$ (см. (23)), и пусть $g_n = Mf_n$. Так как оператор M ограничен, то

$$g_n \rightarrow g \in L_\Omega^p(-2\pi, 2\pi) \subset L^1(-2\pi, 2\pi), \quad n \rightarrow \infty,$$

и формулы (25), (26) имеют смысл. Итак, для любой $f \in L_\omega^p$ верны формулы (22), где $F(z)$ определена в (25), (26).

Основная часть доказательства – оценки интегралов в формулах (22). Фиксируем последовательность $0 < r_k \uparrow +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, и кривые γ_{r_k} так, чтобы выполнялись условия

- а) длины кривых γ_{r_k} ограничены в совокупности;
- б) $\operatorname{dist}((\bigcup_1^\infty \gamma_{r_k}), \Lambda) > 0$;
- в) множество $\Lambda_{k+1} = (\lambda_n : \lambda_n \in E_{r_{k+1}})$ получается из $\Lambda_k = (\lambda_n : \lambda_n \in E_{r_k})$ присоединением единственной точки λ_k такой, что нумерация последовательности (λ_n) в соответствии с неубыванием $|\operatorname{Re} \lambda_n|$ совпадает с нумерацией (λ_k) .

Это возможно по теореме А; по ней условие б) влечет оценку (13) на $\bigcup \Gamma_{r_k}$ и на $\bigcup \Gamma_{r_k}^+$.

Обозначим

$$\Phi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in L_u^{p'}(-\pi, \pi), \quad (27)$$

и, используя (17), первую формулу (22) и свойство (13), оценим норму функции $R_r(t, f)$ в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$ для $r = r_k$. Имеем

$$\|R_r(t, f)\|_{p,\omega} = \sup_{\varphi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} R_r(t, f) \varphi(t) dt \right| = \sup_{\varphi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{\Phi(z) F(z)}{L(z)} dz \right|, \quad r = r_k, \quad (28)$$

где верхняя грань берется по всем $\varphi \in L_u^{p'}(-\pi, \pi)$ таким, что $\|\varphi\| = 1$. (Вес u определен в (16)).

Сначала оценим часть интеграла в (28), отвечающую компонентам γ_{r_k} . Так как

$$L_u^{p'}(-\pi, \pi) \hookrightarrow L^1(-\pi, \pi), \quad L_\Omega^p(-2\pi, 2\pi) \hookrightarrow L^1(-2\pi, 2\pi),$$

а длины $\gamma_{\pm k}$ ограничены в совокупности (условие а)), то из формулы (27) следует, что

$$|\Phi(z)| \leq C_1 \|\varphi\|_1 \leq C_2 \|\varphi\|_{p', u}, \quad z \in \bigcup \gamma_{\pm k}, \quad (29)$$

а из формул (25), (26) и неравенства (23) следует, что

$$|F(z)| \leq C_3 \|g\|_1 \leq C_4 \|g\|_{p, \Omega} \leq C_5 \|f\|_{p, \omega}, \quad z \in \bigcup \gamma_{\pm k}. \quad (30)$$

С учетом того, что на $\bigcup \gamma_{r_k}$ оценка (13) превращается в оценку

$$|L(z)| \geq \delta_0 > 0, \quad z \in \bigcup \gamma_{r_k},$$

из (29), (30) получаем следующее:

$$\sup_{\varphi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{\Phi(z)F(z)}{L(z)} dz \right| \leq M \|f\|_{p, \omega}, \quad r = r_k, \quad (31)$$

где M от $f \in L_\omega^p$ и k не зависит.

Переходим к оценке той части интеграла в (28), которая отвечает вертикальным лучам. Для этого отдельно исследуем $F(z)$ и $\Phi(z)$ на этих лучах. Начнем с $F(z)$.

По условию теоремы

$$\Omega(t) \asymp |t|^\alpha, \quad 0 < |t| < \delta. \quad (32)$$

Отсюда, из того, что $g \in L_\Omega^p(-2\pi, 2\pi)$, и из неравенства в (23), имеем

$$g_0 = g|_{(-\delta, \delta)} \in L^p((-\delta, \delta), |t|^\alpha dt), \quad \|g_0\|_{p, \alpha} \leq C \|f\|_{p, \omega}, \quad (33)$$

$$g_1 = g|_{(\delta < |t| < 2\pi)} \in L^1(\delta < |t| < 2\pi), \quad \|g_1\|_1 \leq C_1 \|g\|_{p, \Omega} \leq C_2 \|f\|_{p, \omega}, \quad (34)$$

где постоянные C , C_1 , C_2 от f не зависят.

Пусть $y = \operatorname{Im} z > 0$. Тогда по формуле (25)

$$-iF(z) = \int_0^\delta e^{izt} g_0(-t) dt + \int_\delta^{2\pi} e^{izt} g_1(-t) dt =: A(z) + B(z). \quad (35)$$

По теореме В с учетом (33) имеем: для любого $k \in \mathbb{N}$

$$A(\pm r_k + iy) \in L^p((H+1, +\infty), y^{p-2-\alpha} dy), \quad \|A(\pm r_k + iy)\|_{p, p-2-\alpha} \leq C \|f\|_{p, \omega}.$$

Далее, из (34) сразу следует, что

$$|B(\pm r_k + iy)| \leq e^{-\delta y} \|g\|_1 \leq C_3 \|f\|_{p, \omega},$$

и так как $\alpha < p-1$, то

$$B(\pm r_k + iy) \in L^p((H+1, +\infty), y^{p-2-\alpha} dy), \\ \|B(\pm r_k + iy)\|_{p, p-2-\alpha} \leq C_4 \|g\|_{p, \alpha} \leq C_5 \|f\|_{p, \omega}.$$

Подставляя полученные свойства функций $A(z)$, $B(z)$ в формулу (35), получаем, что

$$F(\pm r_k + iy) \in L^p((H+1, +\infty), y^{p-2-\alpha} dy)$$

и норма функции $F(\pm r_k + iy)$ в этом пространстве мажорируется величиной $C\|f\|_{p,\omega}$.

Если $y = \operatorname{Im} z < 0$, то отправляясь от формулы (26), аналогичным образом приходим к тому же выводу, но уже в отношении пространства $L^p((-\infty, -H-1), |y|^{p-2-\alpha} dy)$.

Объединяя оба случая, имеем

$$F(\pm r_k + iy) \in L^p(|y| > H+1, |y|^{p-2-\alpha} dy)$$

и

$$\|F(\pm r_k + iy)\|_{p,p-2-\alpha} \leq C\|f\|_{p,\omega} \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}. \quad (36)$$

Переходя к оценке $\Phi(z)$ (см. (27)), уточним свойства веса $u(t)$, $t \in I = (-\pi, \pi)$. Уже отмечалось, что для u вложения (2) имеют место. Далее, по условию теоремы вес ω имеет особенность порядка α в точках $\pm \pi$. Значит (см. (16)),

$$u(t) = \omega^{-p'/p}(t) \asymp (\pi - |t|)^{-\alpha p'/p} \quad \text{при } \pi - \gamma < |t| < \pi. \quad (37)$$

Пусть $y > 0$; запишем

$$\Phi(z) = \left(\int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 \right) e^{izt} \varphi(t) dt =: \Phi_+(z) + \Phi_-(z).$$

Очевидно,

$$|\Phi_+(z)| \leq \|\varphi\|_1 \leq C_1 \|\varphi\|_{p',u} \leq C_1, \quad y > 0. \quad (38)$$

Далее,

$$e^{i\pi z} \Phi_-(z) = \int_0^\pi e^{izt} \varphi_1(t) dt, \quad \varphi_1(t) = \varphi(t - \pi). \quad (39)$$

Так как $\varphi \in L_u^{p'}(-\pi, 0)$, то

$$\varphi_1 \in L_{u_1}^{p'}(0, \pi), \quad u_1(t) = u(t - \pi), \quad 0 < t < \pi.$$

Значит, в силу (37)

$$u_1(t) \asymp t^{-\alpha p'/p}, \quad 0 < t < \gamma,$$

т.е. условие на вес u_1 совпадает с условием (32) на вес Ω при $0 < t < \delta$ с той разницей, что показатель α теперь заменяется на $-\alpha p'/p$. С учетом этой разницы и того, что правая часть в (39) имеет вид правой части в (35) (где 2π и δ заменяются на π и γ , а в роли g_0 , g_1 выступают сужения φ_1 на $(0, \gamma)$ и (γ, π) соответственно), почти дословно повторяются рассуждения, следующие за (35). В результате чего получаем, что функции

$$e^{i\pi(\pm r_k + iy)} \Phi_-(\pm r_k + iy) \in L^{p'}((H+1, +\infty), y^{p'-2+\alpha p'/p} dy),$$

и их нормы ограничены величиной $C_1\|\varphi\| \leq C_1$, так как мы рассматриваем $\varphi: \|\varphi\| = 1$. В силу (38) это верно и для функции $\exp(i\pi(\pm r_k + iy))\Phi_+(\pm r_k + iy)$.

Значит, указанные свойства верны для функции $\exp(i\pi(\pm r_k + iy))\Phi(\pm r_k + iy)$. Аналогично эти свойства доказываются для функций $\exp(-i\pi(\pm r_k + iy))\Phi(\pm r_k + iy)$ и пространства $L^{p'}((-\infty, -H-1), |y|^{p'-2+\alpha p'/p} dy)$. В итоге имеем: для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e^{-\pi|y|}\Phi(\pm r_k + iy) &\in L^{p'}(|y| > H, |y|^{p'-2+\alpha p'/p} dy), \\ \|e^{-\pi|y|}\Phi(\pm r_k + iy)\|_{p', p'-2+\alpha p'/p} &\leq C < \infty, \end{aligned} \quad (40)$$

где C от k не зависит.

Из (40) и из оценки (13) следует, что

$$\left\| \frac{\Phi(\pm r_k + iy)}{L(\pm r_k + iy)} \right\|_{p', p'-2+\alpha p'/p} \leq C_1 < +\infty, \quad (41)$$

где норма подразумевается в $L^{p'}(|y| > H+1, |y|^{p'-2+\alpha p'/p} dy)$, а C_1 от $f \in L_\omega^p$ и k не зависит.

Из (36) и (41) с помощью неравенства Гёльдера получаем оценку

$$\sup_{\varphi} \left| \int_{\Gamma_r} F(z) \frac{\Phi(z)}{L(z)} dz \right| \leq C \|f\|_{p, \omega}, \quad r = r_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Объединяя ее с оценкой (31) и подставляя в правую часть формулы (28), получим

$$\|R_r(t; f)\|_{p, \omega} = \left\| S_r(t, f) - \int_{-r}^r e^{ixt} \widehat{f}(x) dx \right\|_{p, \omega} \leq M \|f\|_{p, \omega}, \quad r = r_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (42)$$

Отсюда и из леммы 1 по неравенству треугольника следует оценка

$$\|S_{r_k}(t; f)\|_{p, \omega} \leq C \|f\|_{p, \omega}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (43)$$

Это означает, что нормы операторов S_r , $r = r_k$ ограничены в совокупности. Если f – линейная комбинация системы $e(\Lambda)$, то

$$S_{r_k}(t; f) \rightarrow f(t), \quad k \rightarrow \infty, \quad (44)$$

в норме $L_\omega^p = L_\omega^p(-\pi, \pi)$, так как $S_r(t; f) = f(t)$ при достаточно больших $r = r_k$. По теореме В такие функции f образуют плотное множество в L_ω^p ; значит, по теореме Банаха–Штейнгауза предельное соотношение (44) в норме L_ω^p верно для любой функции $f \in L_\omega^p$.

По свойству в) множество E_{k+1} отличается от E_k в точности одной точкой λ_j . Благодаря этому, (44) есть утверждение о представимости функции f сходящимся в L_ω^p рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t} = f(t). \quad (45)$$

Остается “расщепить” слагаемые в многочленах $P_{m_n-1}(t)$. Из сходимости ряда в (45) по норме L_ω^p следует, что норма общего члена стремится к нулю. Так как $|\operatorname{Im} \lambda_n| \leq H$, то это равносильно свойству

$$\|P_{m_n-1}\|_{p, \omega} = \left\| \sum_{k=0}^{m_n-1} c_{nk} t^k \right\|_{p, \omega} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Переходя к первообразной

$$Q(t) = Q_{m_n}(t) = \int_0^t P_{m_n-1}(t) dt = \sum_{k=0}^{m_n-1} \frac{c_{nk}}{k+1} t^{k+1},$$

по неравенству Гёльдера, примененного к интегралу, из (46) делаем вывод, что $\|Q\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0$. Отсюда, из того, что $\sup m_n = m < \infty$ (см. теорему А) и из известного [16] свойства

$$|a_j| \leq C(m) \left\| \sum_{k=0}^m a_k t^k \right\|_{C[-a, a]}, \quad j = 0, \dots, m, \quad a > 0,$$

вытекает, что $c_{nk} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Вместе с (45) и свойством $\sup m_n < \infty$ это показывает, что система $e(\Lambda)$ образует базис в L_ω^p .

Убедимся, что он обладает свойством Рисса. Для этого надо доказать, что для любой $f \in L_\omega^p$ ряд

$$\sum_{\operatorname{Re} \lambda_n > 0} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t} \quad (47)$$

сходится в L_ω^p .

Поступая со второй формулой (22) так же, как с первой, получаем оценку, аналогичную (42):

$$\|R_r^+(t, f)\|_{p, \omega} = \left\| S_r^+(t, f) - \int_h^r e^{ixt} \widehat{f}(x) dx \right\|_{p, \omega} \leq C \|f\|_{p, \omega}, \quad r = r_k.$$

Отсюда по неравенству треугольника и по лемме 1 следует подобная (43) оценка

$$\|S_r^+(t, f)\|_{p, \omega} \leq C_1 \|f\|_{p, \omega}, \quad r = r_k. \quad (48)$$

Если f – линейная комбинация системы $e(\Lambda)$, а f^+ – часть f , состоящая из слагаемых с $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, то последовательность $S_{r_k}^+(t, f)$ сходится в L_ω^p , так как $S_r^+ = f^+$, $r = r_k$, $k > k_0$. Отсюда, из плотности указанных линейных комбинаций в L_ω^p (теорема В) и из (48) следует сходимость $S_{r_k}^+(t, f)$ в L_ω^p для любой функции $f \in L_\omega^p$, т.е. сходимость ряда (47) в L_ω^p . Итак, базис $e(\Lambda)$ в L_ω^p обладает свойством Рисса. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Проведем его для первой системы (9) (вторая система эквивалентна ей) и для $h \neq 0$ (при $h = 0$ первая система (9) превращается в тригонометрическую, а для нее утверждение теоремы известно).

Последовательность показателей $\lambda_n = n + ih \operatorname{sign} n$, $n \in \mathbb{Z}$, первой системы (9) совпадает с множеством нулей целой функции

$$L_h(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + ih)^2} \right),$$

которая, как показано в [12; § 8.1, теорема 6] является функцией типа синуса. По формуле Левинсона [17] (см. также [12; § 3.1])

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n+ih)^2} \right) = c(h) \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2ih} dt, \quad c(h) \neq 0.$$

Значит, функция $L_h(x)/x$ есть преобразование Фурье ограниченной на $(-\pi, \pi)$ функции, а потому первая система (9) минимальна в $L^1(-\pi, \pi)$. В силу топологического вложения $L_{\omega}^p(-\pi, \pi) \hookrightarrow L^1(-\pi, \pi)$ она минимальна в $L_{\omega}^p(-\pi, \pi)$.

Верна формула (см. [12; § 8.1])

$$L_h(x) = C(h)m(x) \sin \pi(x - ih), \quad (49)$$

где

$$C(h) = \frac{(ih\Gamma(ih))^2}{\pi}, \quad m(x) = \frac{x}{x+ih} \cdot \frac{\Gamma(x-ih)}{\Gamma(x+ih)}. \quad (50)$$

Утверждается, что если $\Omega \in (A_p)$, то функция $m(x)$ является L_{Ω}^p -мультипликатором. Действительно, для обоих сомножителей в правой части (50) выполнено условие (14) теоремы D: производная второго сомножителя есть $O(1/(1+|x|))$ (см. [12; § 8.1]), а

$$\left(\frac{x}{x+ih} \right)' = O\left(\frac{1}{1+x^2} \right).$$

По теореме D каждый из сомножителей в правой части (50) является L_{Ω}^p -мультипликатором. Очевидно, произведение двух L_{Ω}^p -мультипликаторов также есть L_{Ω}^p -мультипликатор, и потому функция $m(x)$ есть L_{Ω}^p -мультипликатор.

Следующая цепочка рассуждений вызвана тем, что L_{ω}^p -мультипликатор определяется через финитные C^{∞} -функции. Зададим оператор V формулой

$$(Vf)(t) = v(t), \quad f \in L^1(-\pi, \pi), \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} v(t) &= (2i)^{-1} e^{\pi h} f(t + \pi) && \text{при } t \in (-2\pi, 0), \\ v(t) &= -(2i)^{-1} e^{-\pi h} f(t - \pi) && \text{при } t \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Тогда простая выкладка показывает, что

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x) \sin \pi(x - ih) &= \frac{e^{i\pi(x-ih)} - e^{-i\pi(x-ih)}}{2i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-ixt} v(t) dt = \widehat{v}(x). \end{aligned} \quad (52)$$

Определим вес Ω формулой

$$\Omega(t) = \omega(t + \pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как $\omega - A_p$ -вес с особенностью порядка α в точке π , то $\Omega - A_p$ -вес с особенностью порядка α в точке 0.

Пусть $I = (-\pi, \pi)$, $J = (-2\pi, 2\pi)$. Формулы для $v(t)$ показывают, что оператор $V: L_{\omega}^p = L_{\omega}^p(I) \rightarrow L_{\Omega}^p(J) = L_{\Omega}^p$ ограничен.

Класс K_π плотен в L_ω^p и потому существует $f_n \in K_\pi$ такая, что $f_n \rightarrow f$ в норме L_ω^p при $n \rightarrow \infty$. Пусть

$$v_n = Vf_n;$$

тогда $v_n \in K_{2\pi}$ и $v_n \rightarrow v$ в L_Ω^p (в виду ограниченности оператора V), и в силу (52),

$$\widehat{f}_n(x) \sin \pi(x - ih) = \widehat{v}_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

Далее, функция $m(x)$ (см. (50)) есть L_Ω^p -мультипликатор, поэтому для любого n существует g_n такой, что

$$m(x)\widehat{v}_n(x) = \widehat{g}_n(x) \quad \text{и} \quad \|g_n\|_{L_\Omega^p(\mathbb{R})} \leq C_1 \|v_n\|_{L_\Omega^p(J)}. \quad (54)$$

Умножим равенство (53) почленно на $m(x)$. Обозначив $c(h) = 1/C(h)$, с учетом формулы (49), соотношений (54) и ограниченности оператора V получим

$$\widehat{f}_n(x)L_h(x) = c(h)\widehat{g}_n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \|g_n\|_{L_\Omega^p(\mathbb{R})} \leq C\|f_n\|_{p,\omega}. \quad (55)$$

Так как $\text{supp } f_n \subset (-\pi, \pi)$, а $L_h(z)$ есть целая функция экспоненциального типа $\leq \pi$, то левая, а значит, и правая часть в равенстве (55) есть целая функция экспоненциального типа $\leq 2\pi$. Следовательно, $\text{supp } g_n \subset [-2\pi, 2\pi]$, и норма в левой части неравенства (54) понимается в $L_\Omega^p(J)$. Значит, последовательность $c(h)g_n$ сходится в $L_\Omega^p(J)$ и предельная функция $g \in L_\Omega^p(J)$. Теперь по правому вложению (2) заключаем, что $f_n \rightarrow f$, $c(h)g_n \rightarrow g$ соответственно в $L^1(I)$, $L^1(J)$. Но тогда равномерно на $\mathbb{R}$

$$\widehat{f}_n(x) \rightarrow \widehat{f}(x), \quad c(h)\widehat{g}_n(x) \rightarrow \widehat{g}(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (для любого $x \in \mathbb{R}$) и неравенстве (55), получаем свойства (8) с $m = L_h$, означающие, что $L_h(x)$ есть мультипликатор класса $(L_\omega^p(I), L_\Omega^p(J))$.

Все условия теоремы 1 выполнены. По ней первая система (9) образует в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$ базис, обладающий свойством Рисса. Теорема 2 доказана.

6. Доказательство следствий 1, 2 и замечания 1

Сначала докажем замечание 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 1. Фиксируем $\alpha \in (\max(0, p-2), p-1)$ таким, чтобы $\alpha_j \leq \alpha$, $j = 0, \dots, s$. Известно [12; § 8.1], что в сделанных предположениях относительно Λ и α система $e(\Lambda)$ минимальна в $L_{\omega_\alpha}^p(-\pi, \pi)$, где ω_α – вес (5), (6), в котором все α_j заменены на α . Но $\alpha_j \leq \alpha$, и потому

$$\|f\|_{p,\omega_\alpha} \leq C(p, \omega, \alpha)\|f\|_{p,\omega} \quad \text{для всех} \quad f \in L_\omega^p(-\pi, \pi).$$

А это неравенство показывает, что минимальность системы $e(\Lambda)$ в $L_{\omega_\alpha}^p(-\pi, \pi)$ влечет ее минимальность в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$. Замечание 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Следствие 1 сразу вытекает из теоремы 1, если положить $\Omega = \omega$ и учесть, что по лемме 2 функция $L(x)$ есть мультипликатор класса $(L_\omega^p(-\pi, \pi), L_\omega^p(-2\pi, 2\pi))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Функция (7) есть функция типа синуса, а представление (7) (независимо от последнего условия в (7)) влечет минимальность системы $e(\Lambda)$ в $L^1(\pi, \pi)$ (по поводу этих фактов см. [12]), а значит, по правому вложению (2) – и в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$.

Отделим в интеграле (7) ненулевые скачки функции $\sigma(t)$ в точках $\pm \pi$, которые обозначим через A и B . Затем, пользуясь абсолютной непрерывностью функции $\sigma_0(t)$, запишем интеграл Стильтеса как интеграл Лебега и проинтегрируем по частям. Получим

$$L(z) = Ae^{i\pi z} + Be^{-i\pi z} - \frac{1}{iz} \left(A_1 e^{i\pi z} - B_1 e^{-i\pi z} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma'_0(t) \right) = M(z) + N(z),$$

где $M(z)$ – сумма первых двух слагаемых в средней части (выражение $N(z)$ может и отсутствовать, например, когда $L(z) = \sin \pi z$).

Зададим оператор V формулой (51), где на этот раз

$$v(t) = Af(t + \pi), \quad t \in (-2\pi, 0), \quad v(t) = Bf(t - \pi), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Тогда формула типа (52) показывает, что

$$M(x)\widehat{f}(x) = \widehat{v}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

А так как вес ω имеет период π , то оператор

$$V: L_\omega^p(I) \rightarrow L_\omega^p(J), \quad I = (-\pi, \pi), \quad J = (-2\pi, 2\pi),$$

ограничен. Следовательно, $M(x)$ – мультипликатор класса $(L_\omega^p(I), L_\omega^p(J))$.

Далее, из вида $N(x)$ следует, что $N'(x) = O(1/(1 + |x|))$, $x \in \mathbb{R}$. По теореме D $N(x)$ есть L_ω^p -мультипликатор. Но $N(z)$ – целая функция экспоненциального типа $\leq \pi$, и по лемме 2 $N(x)$ – мультипликатор класса $(L_\omega^p(I), L_\omega^p(J))$.

Таким образом, если положить $\Omega = \omega$, то для весов ω , Ω и для функции $L(z)$ все условия теоремы 1 выполнены (особенность порядка α веса ω в точках $\pm \pi$ следует из его особенности в нуле и π -периодичности). Следствие 2 доказано.

В качестве частного случая следствия 2 рассмотрим один пример. Пусть $\sigma(t) = -t/(2k\pi)$, $t \in (-\pi, \pi)$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$, а в точках $\pm \pi$ функция $\sigma(t)$ имеет скачки, равные $1/2$, $\sigma(t)$ удовлетворяет условиям следствия 2. Тогда

$$L(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t) = \cos \pi z - \frac{\sin \pi z}{k\pi z}.$$

Значит, корни функции $L(z)$ симметричны относительно точки 0, ненулевые корни совпадают с ненулевыми корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \pi z = k\pi z, \tag{56}$$

а точка 0 является корнем функции $L(z)$ (причем двукратным) только при $k = 1$. Графики функций $\operatorname{tg} \pi x$ и $k\pi x$ показывают, что все положительные корни $L(z)$ даются формулой

$$\mu_n = n + \frac{1}{2} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \tag{57}$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, если $k < 0$ и $k > 1$, и $n \in \mathbb{N}$, если $0 < k \leq 1$. Подставляя выражение для μ_n в уравнение (56), с обозначением $c = 1/(k\pi^2)$ получаем

$$\operatorname{tg} \pi \varepsilon_n = -\frac{1}{k\pi(n + 1/2 + \varepsilon_n)}, \quad \text{откуда} \quad \varepsilon_n = -\frac{c}{n + 1/2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (58)$$

Далее, на окружностях $|z| = N$, $N \in \mathbb{N}$, для функции $f = \cos \pi z$ верна оценка (13), и $|g| \leq e^{\pi|y|}$, где $g = \sin \pi z$. Значит, $|f| > |g|$ на этих окружностях при больших N , и по теореме Руше число нулей функции $L(z)$ в круге $|z| < N$ равно числу нулей функции $\cos \pi z$, т.е. числу точек $n + 1/2$. Значит, при $k < 0$ и $k \geq 1$ все корни $L(z)$ вещественны, а при $0 < k < 1$ это так, за исключением двух чисто мнимых корней. При этом в силу (57), (58) и указанного выше множества индексов во всех случаях множество всех корней имеет вид $\pm \mu_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где

$$\mu_n = n + \frac{1}{2} - \frac{c}{n + 1/2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Это хорошо известно при $k = 1$ [18]. (При $k = 1$ двукратному корню 0 отвечает пара точек $\pm \mu_0$.) По следствию 2 система $e^{\pm i\mu_n t}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, образует в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, базис со свойством Рисса, как только вес ω удовлетворяет условиям этого следствия.

Операция $\pm \mu_n \rightarrow \pm \mu_n - 1/2$ приведет к эквивалентной системе экспонент. Затем (при $k = 1$) к тому же приведет и замена двукратной точки 0 двумя простыми точками -1 и 0 . Наконец, используем тот факт, что если $(\lambda_n - \mu_n) \in l^1$, то соответствующие системы экспонент эквивалентны в рассматриваемом пространстве (см. [12; § 6.2]). Получим

СЛЕДСТВИЕ 4. Если вес ω удовлетворяет условиям следствия 2, то система $(e^{i\lambda_n t})_{n \in \mathbb{Z}}$, где λ_0 произвольно, а

$$\lambda_n = n + \frac{c}{n} \operatorname{sign} n + \epsilon_n, \quad n \neq 0, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}, \quad (\epsilon_n) \in l^1,$$

образует базис в $L_\omega^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, обладающий свойством Рисса.

Автор благодарит А. А. Кореновского за плодотворную переписку по A_p -весам, способствовавшую доказательству предложения 1, и рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Я. Левин, "О базисах показательных функций в L^2 ", *Зап. матем. отд. физ.-мат. фак-та ХГУ и ХМО. Сер. 4*, **27** (1961), 39–48.
- [2] Б. Я. Левин, "Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа", *Математическая физика и функциональный анализ*, **1**, ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1969, 136–146.
- [3] В. Д. Головин, "О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций", *Зап. матем. отд. физ.-мат. фак-та ХГУ и ХМО. Сер. 4*, **30** (1964), 18–29.
- [4] А. М. Седлецкий, "Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси", *УМН*, **37:5** (1982), 51–95.
- [5] К. Г офман, *Банаховы пространства аналитических функций*, ИЛ, М., 1963.

- [6] А. М. Седлецкий, “Базисы, встречающиеся при решении уравнений смешанного типа”, *Дифференц. уравнения*, **35**:4 (1999), 507–515.
- [7] Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер, “Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **21**, ВИНТИ, М., 1983, 42–129.
- [8] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, “Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **176** (1973), 227–251.
- [9] R. A. Hunt, W.-S. Young, “A weighted norm inequality for Fourier series”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), 274–277.
- [10] К. И. Бабенко, “О сопряженных функциях”, *Докл. АН СССР*, **62**:2 (1948), 157–160.
- [11] Е. И. Моисеев, “О базисности систем синусов и косинусов в весовом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **34**:1 (1998), 40–44.
- [12] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [13] D. S. Kurtz, R. L. Wheeden, “Results on weighted norm inequalities for multipliers”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **255** (1979), 343–362.
- [14] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [15] С. С. Пухов, А. М. Седлецкий, “Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале”, *Докл. РАН*, **425**:4 (2009), 452–455.
- [16] И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Гостехиздат, М.–Л., 1949.
- [17] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **26**, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [18] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, М., 1977.

А. М. Седлецкий

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: sedlet@mail.ru

Поступило

03.06.2009

Исправленный вариант

01.02.2010