Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, Об эффективной компактности и сигма-компактности, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 840–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:59:18

Об эффективной компактности и сигма-компактности

В. Г. Кановой, В. А. Любецкий

Используя топологию Ганди–Харрингтона и другие методы эффективной дескриптивной теории множеств, мы доказываем несколько теорем о компактных и σ -компактных множествах. В частности, доказывается, что любое Δ_1^1 -множество A бэровского пространства $\mathcal{N}$ либо является не более чем счетным объединением компактных Δ_1^1 -множеств (и тогда это множество A σ -компактно), либо же A содержит относительно замкнутое подмножество, гомеоморфное $\mathcal{N}$ (и тогда, разумеется, A не может быть σ -компактным).

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Эффективная дескриптивная теория множеств возникла в 1950-е годы в первую очередь как средство для уточнения и упрощения построений классической дескриптивной теории, а также как механизм использования некоторых теорем теории рекурсии для задач дескриптивной теории множеств. Вскоре, однако, выяснилось, что эффективная дескриптивная теория множеств сама приводит к постановке и решению таких задач, которые не имели прямых аналогов в классической дескриптивной теории. Примером может служить следующая *теорема о базисе*: любое счетное Δ_1^1 -множество A бэровского пространства $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ состоит из Δ_1^1 -точек. В классической дескриптивной теории ей отдаленно соответствует теорема Лузина–Новикова о расщеплении плоских борелевских множеств со счетными сечениями.

В настоящей заметке методы эффективной дескриптивной теории множеств применяются к исследованию множеств $A \subseteq \mathcal{N}$ в плане свойств компактности и σ -компактности. Главные результаты таковы:

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого Δ_1^1 -множества $A \subseteq \mathcal{N}$ возможно одно и только одно из следующих двух утверждений:*

(I) *A совпадает с объединением U всех множеств вида $[T]$, где $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ – компактное дерево класса Δ_1^1 и $[T] \subseteq A$;¹*

(II) *имеется множество $Y \subseteq A$, гомеоморфное $\mathcal{N}$ и замкнутое в A .*

Дополнительно, в случае (I), если $A \neq \emptyset$, то A содержит Δ_1^1 -точку.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00445).

¹Тогда множество A σ -компактно, поскольку каждый эффективный класс, в частности, класс Δ_1^1 , не более чем счетен.

Условия (I) и (II) теоремы, очевидно, несовместимы, поскольку относительно замкнутое подмножество σ -компактного множества само σ -компактно, а пространство $\mathcal{N}$, а значит, и гомеоморфное ему множество Y в (II), не является σ -компактным.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого Σ_1^1 -множества $A \subseteq \mathcal{N}$ возможно одно и только одно из следующих двух утверждений:*

- (I) *A включено в объединение U всех множеств вида $[T]$, где $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ есть компактное дерево класса Δ_1^1 ;²*
- (II) *имеется замкнутое в $\mathcal{N}$ множество $Y \subseteq A$, гомеоморфное $\mathcal{N}$.*

И здесь условия (I) и (II) несовместимы, иначе Y было бы замкнутым подмножеством σ -компактного множества U , что, как мы заметили выше, невозможно.

Отметим, что условие (I) теоремы 1.2 слабее условия (I) теоремы 1.1, и соответственно условие (II) теоремы 1.2 сильнее условия (II) теоремы 1.1. Если мы заменим условие (II) теоремы 1.1 более сильным условием (II) теоремы 1.2, то результат перестанет быть верным. В самом деле, пусть A состоит из всех точек $a \in 2^{\mathbb{N}}$, для которых множество $\{k : a(k) = 1\}$ бесконечно. Тогда A – не σ -компактное Δ_1^1 -множество, но оно покрывается компактным множеством $2^{\mathbb{N}}$, а потому заведомо нет множеств $X \subseteq A$, замкнутых в $\mathcal{N}$ и гомеоморфных $\mathcal{N}$. Таким образом, для A не может выполняться ни (I) теоремы 1.1, ни (II) теоремы 1.2.

С другой стороны, если мы заменим условие (I) теоремы 1.1 более слабым условием (I) теоремы 1.2, то результат также становится неверным, в том смысле, что существует множество, именно, то же самое A из предыдущего абзаца, которое удовлетворяет как условию (I) теоремы 1.2, так и условию (II) теоремы 1.1. Оно само гомеоморфно $\mathcal{N}$ посредством отображения, сопоставляющего каждой точке $x \in \mathcal{N}$ точку $a = f(x) \in A$, определенную так, что при любом n значение $x(n)$ равно числу нулей между n -й и $(n+1)$ -й единицами последовательности a .

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Любое σ -компактное Δ_1^1 -множество $A \subseteq \mathcal{N}$ является счетным объединением компактных Δ_1^1 -множеств, и если оно непусто, то содержит Δ_1^1 -точку.*

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Если Δ_1^1 -множество $A \subseteq \mathcal{N}$ не σ -компактно, то оно содержит подмножество, гомеоморфное $\mathcal{N}$ и замкнутое в A . Если Σ_1^1 -множество $A \subseteq \mathcal{N}$ не покрыто σ -компактным множеством, то оно содержит подмножество, гомеоморфное $\mathcal{N}$ и замкнутое в $\mathcal{N}$.*

Как обычно, обе теоремы и следствия сохраняют силу в релятивизованной форме, т.е. когда классы Δ_1^1 и Σ_1^1 заменяются на классы вида $\Delta_1^1(p)$ и $\Sigma_1^1(p)$ соответственно, где $p \in \mathcal{N}$ – произвольный фиксированный параметр, причем те же самые доказательства подходят и для релятивизованных форм. Мы не будем углубляться в это обобщение.

Доказательство обеих теорем основано на таких методах эффективной дескриптивной теории множеств, как топология Ганди–Харрингтона, теорема Крайзеля о выборе и эффективный пересчет Δ_1^1 -множеств.

²Множество U σ -компактно по той же причине, что и в (I) теоремы 1.1.

2. Основные определения и базовые результаты. Мы используем стандартные обозначения классов эффективной проективной иерархии Σ_1^1 , Π_1^1 , Δ_1^1 для точек и подмножеств бэровского пространства $\mathcal{N}$, а также обозначения Σ_1^1 , Π_1^1 , Δ_1^1 для соответствующих проективных классов. О них см., например, в [1; глава 8], [2]–[4].

Через $\mathbb{N}^{<\omega}$ обозначается множество всех конечных кортежей (последовательностей) натуральных чисел, включающее и пустой кортеж Λ . Длина кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ обозначается через $\text{lh } s$. Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $n \in \mathbb{N}$, то $s^\wedge n$ – кортеж, полученный присоединением члена n справа к кортежу s . Положим для $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$

$$\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subset x\} \quad (\text{бэровский интервал в } \mathcal{N}).$$

Множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *деревом*, если мы имеем $s \in T$ всякий раз, когда $s^\wedge n \in T$ хотя бы для одного n . Понятно, что каждое непустое дерево содержит Λ . Дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *компактным*, когда

- 1) оно не имеет *концевых вершин*: если $s \in T$, то и $s^\wedge n \in T$ хотя бы для одного n ;
- 2) оно имеет *конечные ветвления*: если $s \in T$, то $s^\wedge n \in T$ выполнено лишь для конечно многих n .

В этом и только этом случае следующее множество компактно:

$$[T] = \{x \in \mathcal{N} : \forall m (x \upharpoonright m \in T)\}.$$

Если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – любые множества и $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то положим

$$\text{pr } P = \{x \in \mathbb{X} : \exists y (\langle x, y \rangle \in P)\} \quad \text{и} \quad (P)_x = \{y \in \mathbb{Y} : \langle x, y \rangle \in P\}$$

– соответственно *проекция* множества P на первую ось $\mathbb{X}$ и *сечение* множества P , определенное элементом $x \in \mathbb{X}$. Множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *однозначно*, если каждое его сечение $(P)_x$ (где $x \in \mathbb{X}$) содержит не более одной точки, и *счетнозначно*, если каждое сечение $(P)_x$ не более чем счетно.

В доказательствах наших главных теорем используются следующие хорошо известные результаты эффективной дескриптивной теории множеств, о которых см. в [5] и [6].

ТЕОРЕМА 2.1 (отделимость). *Если Σ_1^1 -множества $X, Y \subseteq \mathcal{N}$ дизъюнкты, то найдется Δ_1^1 -множество $Z \subseteq \mathcal{N}$ такое, что $X \subseteq Z$, но $Y \cap Z = \emptyset$.*

ТЕОРЕМА 2.2 (теорема Крайзеля о выборе). *Если Π_1^1 -множество $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{N}$ таково, что проекция $\text{pr } P$ имеет класс Δ_1^1 , то имеется такая Δ_1^1 -функция $f: \text{pr } P \rightarrow \mathbb{N}$, что*

$$\langle x, f(x) \rangle \in P \quad \text{для всех } x \in \text{pr } P.^3$$

Следующая теорема предоставляет удобное эффективное перечисление всех Δ_1^1 -множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. Собственно, множество $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех (конечных) кортежей натуральных чисел здесь можно отождествить с $\mathbb{N}$ через любую рекурсивную биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$.

ТЕОРЕМА 2.3 (перечисление Δ_1^1 -множеств). *Найдутся такие Π_1^1 -множества $E \subseteq \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ и такое Σ_1^1 -множество $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$, что*

³В этой ситуации говорят, что множество P *униформизируется* функцией f .

(i) если $e \in E$, то множества

$$(W)_e = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \langle e, s \rangle \in W\} \quad \text{и} \quad (W')_e$$

совпадают;

(ii) множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ есть Δ_1^1 , если и только если найдется число $e \in E$, для которого

$$T = (W)_e = (W')_e.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Множество

$$D = \{T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} : T \text{ есть } \Delta_1^1\}$$

принадлежит классу Π_1^1 . Множество

$$\{\langle p, T \rangle : p \in \mathcal{N} \wedge T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \wedge T \text{ есть } \Delta_1^1(p)\}$$

также принадлежит классу Π_1^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем E, W, W' , как указано в теореме 2.3. Тогда

$$\begin{aligned} T \in D &\iff \exists e (e \in E \wedge T = (W)_e) \\ &\iff \exists e (e \in E \wedge \forall s \in \mathbb{N}^{<\omega} (s \in (W')_e \implies s \in T \implies s \in (W)_e)), \end{aligned}$$

откуда и следует искомое.

ТЕОРЕМА 2.5. Если Δ_1^1 -множество $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ счетнозначно, то

- (i) $\text{pr } P$ есть Δ_1^1 -множество;
- (ii) P есть счетное объединение однозначных Δ_1^1 -множеств;
- (iii) P униформизируется Δ_1^1 -множеством.

Теоремы 2.1–2.3, 2.5 и следствие 2.4 остаются справедливыми, если фигурирующие в них классы $\Sigma_1^1, \Pi_1^1, \Delta_1^1$ заменяются релятивизованными классами $\Sigma_1^1(p), \Pi_1^1(p), \Delta_1^1(p)$, где $p \in \mathcal{N}$ – произвольный параметр. Поэтому теоремы 2.1, 2.2, 2.5 также верны для проективных классов $\Sigma_1^1, \Pi_1^1, \Delta_1^1$.

3. Топология Ганди–Харрингтона. Топология Ганди–Харрингтона на бэровском пространстве $\mathcal{N}$ состоит из всех объединений произвольных Σ_1^1 -множеств $S \subseteq \mathcal{N}$. Эта топология включает польскую топологию $\mathcal{N}$, но сама не является польской и даже не метризуема.

В самом деле, существует Π_1^1 -множество $P \subseteq \mathcal{N}$, не являющееся Σ_1^1 -множеством. По определению P замкнуто в топологии Ганди–Харрингтона. Предположим, что эта топология метризуема. Однако в метрических пространствах все замкнутые множества являются множествами $\mathbf{G}_\delta$. Поэтому $P = \bigcap_n \bigcup_m S_{mn}$, где все $S_{mn} \subseteq \mathcal{N}$ являются Σ_1^1 -множествами (т.е. базовыми открытыми множествами топологии Ганди–Харрингтона). Но класс Σ_1^1 замкнут относительно счетных объединений и пересечений. Тем самым, P оказывается Σ_1^1 -множеством, противоречие.

Тем не менее, топология Ганди–Харрингтона, не будучи сама польской, обладает одним свойством, которое позволяет получить некоторые результаты, типичные именно для польских пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Польской сетью* для семейства множеств $\mathcal{F}$ называется такая совокупность $\{\mathcal{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых плотных множеств $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{F}$, для которой имеет место следующее: для любой последовательности множеств $F_n \in \mathcal{D}_n$, удовлетворяющей условию непустоты конечных пересечений (т.е. $\bigcap_{k \leq n} F_k \neq \emptyset$ для каждого n), выполнено $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

Здесь множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ называется *открытым плотным*, если соблюдены два условия:

$$\begin{aligned} \forall F \in \mathcal{F} \exists D \in \mathcal{D} (D \subseteq F), \\ \forall F \in \mathcal{F} \forall D \in \mathcal{D} (F \subseteq D \implies F \in \mathcal{D}).^4 \end{aligned}$$

Например, польская сеть имеется для семейства всех непустых замкнутых множеств любого полного метрического пространства $\mathbb{X}$: возьмем в качестве $\mathcal{D}_n$ все непустые замкнутые множества диаметра $\leq n^{-1}$ в $\mathbb{X}$. Следующая теорема не столь элементарна. Как теорема, так и следствие хорошо известны, см., например, [7], [8], или [9] на русском языке.

ТЕОРЕМА 3.2. *Найдется польская сеть для совокупности $\mathbb{P}$ всех непустых Σ_1^1 -множеств в пространстве $\mathcal{N}$.*

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Множество $\mathcal{N}$ с топологией Ганди–Харрингтона удовлетворяет теореме Бэра, т.е. все ко-тощие⁵ множества всюду плотны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2 (эскиз). Пусть $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Положим

$$\text{pr } P = \{a : \exists b P(a, b)\}$$

(проекция) и

$$P_{st} = \{\langle a, b \rangle \in P : s \subset a \wedge t \subset b\} \quad \text{для } s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}.$$

Через $\mathcal{D}(P, s, t)$ обозначим семейство всех непустых Σ_1^1 -множеств $X \subseteq \mathcal{N}$ таких, что

$$\text{либо } X \cap \text{pr } P_{st} = \emptyset, \quad \text{либо } X \subseteq \text{pr } P_{s \wedge i, t \wedge j} \quad \text{для каких-то } i, j \in \mathbb{N}.$$

(Заметим, что во втором случае число i единственное, но j не обязательно единственное.) Поскольку эффективный класс Π_1^0 счетен, зафиксируем произвольное перечисление $\{\mathcal{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ всех семейств вида $\mathcal{D}(P, s, t)$, где $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ – множество класса Π_1^0 . Докажем, что совокупность всех $\mathcal{D}_n$ образует польскую сеть для $\mathbb{P}$.

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{D}(P, s, t)$ является открытым плотным множеством в $\mathbb{P}$ в смысле определения 3.1, каково бы ни было Π_1^0 -множество $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Так что все наши множества $\mathcal{D}_n$ открыты и плотны в $\mathbb{P}$.

Рассмотрим последовательность непустых Σ_1^1 -множеств $X_n \in \mathcal{D}_n$, удовлетворяющую условию непустоты конечных пересечений. Докажем, что $\bigcap_n X_n \neq \emptyset$. Множества $Y_n = \bigcap_{k \leq n} X_k$ непусты, очевидно, принадлежат Σ_1^1 (вместе с множествами X_k)

⁴Множества $\mathcal{D}$, удовлетворяющие только первому требованию, называются *плотными*. Если множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ плотно, то множество $\mathcal{D}' = \{F \in \mathcal{F} : \exists D \in \mathcal{D} (F \subseteq D)\}$ *открыто плотно*. Эти понятия открытости и плотности можно связать с определенной топологией на $\mathcal{F}$, чего мы не будем делать, оставив их чисто комбинаторными.

⁵*Ко-тощими* называются множества, дополненные в данном топологическом пространстве к тощим множествам, т.е. множествам первой категории.

и удовлетворяют $Y_n \subseteq X_n$. Поэтому мы имеем $Y_n \in \mathcal{D}_n$ вследствие открытой плотности множеств $\mathcal{D}_n$. Наконец, множества Y_n не просто удовлетворяют условию непустоты конечных пересечений, но вложены одно в другое, т.е. $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ для всех n . Нам достаточно доказать, что $\bigcap_n Y_n \neq \emptyset$.

Множество $X \subseteq \mathcal{N}$ назовем *позитивным*, если найдется индекс m такой, что $Y_m \subseteq X$. Для каждого n зафиксируем Π_1^0 -множество $P^n \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, для которого $Y_n = \text{pr } P^n$. Если $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и проекция $\text{pr } P_{st}^n$ позитивна, то по построению множеств Y_n найдутся единственное i и некоторое j , для которых проекция $\text{pr } P_{s^\wedge i, t^\wedge j}^n$ также позитивна. В самом деле, пусть по позитивности $Y_m \subseteq \text{pr } P_{st}^n$. Семейство $\mathcal{D}(P^n, s, t)$ совпадает с некоторым $\mathcal{D}_k$, так что найдется индекс k , для которого $Y_k \in \mathcal{D}(P^n, s, t)$. Тогда

$$\text{либо } Y_k \cap \text{pr } P_{st}^n = \emptyset, \quad \text{либо } Y_k \subseteq \text{pr } P_{s^\wedge i, t^\wedge j}^n \quad \text{для каких-то } i, j \in \mathbb{N}.$$

Но первое невозможно, поскольку $Y_m \subseteq \text{pr } P_{st}^n$, а множества Y_j вложены одно в другое. Значит, $Y_k \subseteq \text{pr } P_{s^\wedge i, t^\wedge j}^n$ для каких-то $i, j \in \mathbb{N}$. Но тогда проекция $P_{s^\wedge i, t^\wedge j}^n$ позитивна. Отсюда следует, что существует единственная точка $a = a_n \in \mathcal{N}$ и некоторая (не обязательно единственная) $b = b_n \in \mathcal{N}$ такие, что проекция $\text{pr } P_{a \upharpoonright k, b \upharpoonright k}^n$ позитивна для каждого k . Из замкнутости множеств P^n следует, что $\langle a_n, b_n \rangle \in P^n$, а значит, $a_n \in X_n$ для каждого n .

Остается доказать, что все эти точки a_n совпадают друг с другом, т.е. $a_m = a_n$ даже при $m \neq n$. Для этого просто заметим, что если проекции $\text{pr } P_{st}$ и $\text{pr } Q_{s't'}$ обе позитивны (даже для двух разных множеств $P, Q!$), то согласно тому же условию непустоты конечных пересечений выполнено либо $s \subseteq s'$, либо $s' \subseteq s$.

4. О компактных Δ_1^1 -множествах. Понятно, что если дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ имеет класс Δ_1^1 , то тому же классу принадлежит и множество

$$[T] = \{a \in \mathcal{N} : \forall m (a \upharpoonright m \in T)\},$$

поскольку мы имеем

$$x \in [T] \iff \forall m (x \upharpoonright m \in T).$$

ЛЕММА 4.1. Если $F \subseteq \mathcal{N}$ – замкнутое Δ_1^1 -множество, а $A \subseteq F$ – компактное Σ_1^1 -множество, то найдется компактное Δ_1^1 -дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ такое, что $A \subseteq [T] \subseteq F$. В частности, при $A = F$, если Δ_1^1 -множество $A \subseteq \mathcal{N}$ компактно, то найдется компактное Δ_1^1 -дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого $A = [T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть 1. Сначала попробуем подобрать Δ_1^1 -дерево S (не обязательно компактное), для которого $F = [S]$. Раз дополнительное Δ_1^1 -множество $G = \mathcal{N} \setminus F$ открыто, множество

$$P = \{\langle x, t \rangle : x \in G \wedge t \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in \mathcal{N}_t \subseteq G\} \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$$

удовлетворяет $\text{dom } P = G$. Кроме того, P есть Π_1^1 , так как ключевое соотношение $\mathcal{N}_t \subseteq G$ можно выразить Π_1^1 -формулой

$$\forall x (t \subset x \implies x \in G).$$

Поэтому теорема 2.2 дает нам Δ_1^1 -функцию $f : G \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$ такую, что $x \in \mathcal{N}_{f(x)} \subseteq G$ для всех $x \in G$. Множество

$$U = \{f(x) : x \in G\} = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \exists x \in G (f(x) = t)\}$$

тогда принадлежит Σ_1^1 и удовлетворяет $G = \bigcup_{t \in U} \mathcal{N}_t$. Однако

$$V = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathcal{N}_t \subseteq G\} = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall x (x \in \mathcal{N}_t \implies x \in G)\}$$

есть Π_1^1 -множество, причем $U \subseteq V$ и $G = \bigcup_{t \in V} \mathcal{N}_t$. По теореме 2.1 (отделимость) найдется Δ_1^1 -множество W такое, что $U \subseteq W \subseteq V$, и тогда все еще $G = \bigcup_{t \in W} \mathcal{N}_t$. Положим

$$S = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall t (t \in W \implies t \not\subseteq s)\}.$$

Легко видеть, что S является Δ_1^1 -деревом (возможно, с концевыми вершинами) и $[S] = F$, что и заканчивает часть 1 доказательства.

Часть 2. Заметим, что множество P всех пар $\langle s, u \rangle$ таких, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $u \subseteq \mathbb{N}$, конечно и непусто, и

$$\forall x \in \mathcal{N} ((x \in A \wedge s \subset x) \implies \exists k \in u (s \wedge k \subset x) \wedge \forall k \in u (s \wedge k \in S))$$

есть Π_1^1 в пространстве $\mathbb{N} \times \mathcal{P}_{\text{fin}} \mathbb{N}$, где второй множитель (множество всех конечных $u \subseteq \mathbb{N}$) отождествляется с $\mathbb{N}$ через какую-нибудь подходящую рекурсивную биекцию. При этом $\text{dom} P = \mathbb{N}^{<\omega}$. (В самом деле, если s таково, что нет $x \in A$, для которых $s \subset x$, то $\langle s, u \rangle \in P$ для любого конечного u . Если же такая точка x есть, то множество $u = \{x(n) : s \subset x \in A\}$, где $n = \text{lh } s$, конечно по компактности – его мы и берем.) Значит, снова имеется Δ_1^1 -функция $f : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}} \mathbb{N}$ такая, что $\langle s, f(s) \rangle \in P$ для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Остается взять

$$T = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall n < \text{lh } s (s(n) \in f(s \upharpoonright n))\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Любое компактное Δ_1^1 -множество $A \subseteq \mathcal{N}$ содержит точку $x \in A$ класса Δ_1^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $A = [T]$ для подходящего компактного Δ_1^1 -дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ по лемме 4.1. Возьмем в качестве x самую лексикографически левую ветвь дерева T , т.е. так, что для каждого n выполнено

$$x(n) = \min \{s(n) : s \in T \wedge n < \text{lh } s \wedge s \upharpoonright n = \langle x(0), \dots, x(n-1) \rangle\}.$$

5. Доказательство первой главной теоремы. Начиная доказательство теоремы 1.1, мы первым делом докажем, что множество U из (I) теоремы 1.1 (т.е. просто объединение всех компактных Δ_1^1 -множеств $K \subseteq A$) есть Π_1^1 . Возьмем Π_1^1 -множества $E \subseteq \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ и Σ_1^1 -множество $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ как в теореме 2.3. Теперь

$$x \in U \iff \exists e (e \in E \wedge (W)_e \text{ — компактное дерево} \wedge x \in [(W)_e] \subseteq A).$$

Свойство “быть компактным деревом” выражается занудно длинной арифметической формулой, которую мы не хотим здесь выписывать на несколько строк, а вложение $[(W)_e] \subseteq A$ выражается Π_1^1 -формулой

$$\forall y (\forall n (y \upharpoonright n \in (W)_e) \implies y \in A),$$

где $y \upharpoonright n \in (W)_e$ можно заменить на $\langle e, y \upharpoonright n \rangle \in W$. Имеем арифметический квантор $\exists e$ на Π_1^1 -формуле, т.е. Π_1^1 -формулу. Итак, $U \in \Pi_1^1$. Это значит, что множество $A' = A \setminus U$ есть Σ_1^1 . Остается доказать, что если $A' \neq \emptyset$, то имеется множество $Y \subseteq A'$, гомеоморфное $\mathcal{N}$ и замкнутое в A' .

ЛЕММА 5.1. *Множество A' не имеет непустых замкнутых σ -компактных подмножеств класса Σ_1^1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что A' не имеет непустых компактных подмножеств класса Σ_1^1 . Пусть, напротив, $\emptyset \neq Z \subseteq A'$ – компактное Σ_1^1 -множество. Мы собираемся найти замкнутое Δ_1^1 -множество F , для которого $Z \subseteq F \subseteq A$. Тогда по лемме 4.1 существует компактное Δ_1^1 -дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющее $Z \subseteq [T] \subseteq F \subseteq A$. Но тогда $[T] \subseteq U$ по определению множества U и, значит, $Z \subseteq U$ – противоречие.

Поскольку дополнение $C = \mathcal{N} \setminus Z$ открыто, множество

$$H = \{\langle x, s \rangle : x \in C \cap \mathcal{N}_s \wedge \mathcal{N}_s \cap Z = \emptyset\}$$

принадлежит Π_1^1 и удовлетворяет $\text{rg } H = C$. В частности, Δ_1^1 -множество $D = \mathcal{N} \setminus A$ включено в $\text{rg } H$. Это означает, что более узкое Π_1^1 -множество

$$H' = \{\langle x, s \rangle \in H : x \in D\}$$

удовлетворяет $\text{rg } H' = D$. Отсюда по теореме 2.2 найдется Δ_1^1 -функция $f : D \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, для которой

$$x \in D \implies \langle x, f(x) \rangle \in H,$$

или, другими словами, мы имеем

$$x \in \mathcal{N}_{f(x)} \subseteq C \quad \text{для всех } x \in D.$$

Тогда множество

$$\Sigma = \text{ran } f = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$$

есть Σ_1^1 и

$$D \subseteq \bigcup_{s \in \Sigma} \mathcal{N}_s \subseteq C.$$

Однако

$$\Pi = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathcal{N}_s \subseteq C\}$$

есть Π_1^1 и $\Sigma \subseteq \Pi$. Значит, по теореме отделимости для Σ_1^1 -множеств (теорема 2.1) найдется Δ_1^1 -множество Δ , для которого выполнено $\Sigma \subseteq \Delta \subseteq \Pi$. Тогда все еще $D \subseteq \bigcup_{s \in \Delta} \mathcal{N}_s \subseteq C$, так что замкнутое множество $F = \mathcal{N} \setminus \bigcup_{s \in \Delta} \mathcal{N}_s$ удовлетворяет $Z \subseteq F \subseteq A$. Однако $x \in F$ равносильно

$$\forall s (s \in \Delta \implies x \notin \mathcal{N}_s),$$

так что F есть Δ_1^1 вместе с Δ , что и требовалось.

Теперь докажем полное утверждение леммы. Пусть напротив, непустое замкнутое Σ_1^1 -множество $F = \bigcup_n F_n \subseteq A'$ σ -компактно, а все F_n компактны. Тогда существует базовое открыто-замкнутое множество $U \subseteq \mathcal{N}$ такое, что пересечение $Z = U \cap F$ непусто и целиком включено в одно из F_n . Таким образом, Z – непустое компактное Σ_1^1 -множество, противоречие с уже доказанным. Лемма доказана.

Возвращаясь к теореме, мы предположим, что условие (I) теоремы 1.1 не имеет места, так что Σ_1^1 -множество $A' \subseteq A$ непусто, и выведем отсюда (II) теоремы 1.1. Имеются следующие два случая.

Случай 1. Существует непустое замкнутое Σ_1^1 -множество $F \subseteq A'$. Оно не σ -компактно по лемме 5.1, и простая конструкция сразу дает замкнутое множество $Y \subseteq F$, гомеоморфное пространству $\mathcal{N}$.

Случай 2. Непустых замкнутых Σ_1^1 -множеств $F \subseteq A'$ нет. В этом предположении, чтобы получить искомое *относительно* замкнутое множество $Y \subseteq A$, гомеоморфное $\mathcal{N}$, мы построим систему непустых Σ_1^1 -множеств $Y_s \subseteq A'$, удовлетворяющую таким техническим условиям:

- (1) $Y_{s \wedge i} \subseteq Y_s$ всякий раз, когда $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $i \in \mathbb{N}$;
- (2) диаметр Y_s не превосходит $2^{-\text{lh } s}$;
- (3) $Y_{s \wedge k} \cap Y_{s \wedge n} = \emptyset$ для всех s и $k \neq n$ и, более того, $Y_{s \wedge k}$ можно заключить в открытое множество $Y'_{s \wedge k}$, которое не пересекается с $\bigcup_{n \neq k} Y_{s \wedge n}$;
- (4) $Y_s \in \mathcal{D}_{\text{lh } s}$, где по теореме 3.2 $\{\mathcal{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ – польская сеть для совокупности $\mathbb{P}$ всех непустых Σ_1^1 -множеств $Y \subseteq \mathcal{N}$;
- (5) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x_k \in Y_{s \wedge k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то последовательность точек x_k сходится к точке из $\mathcal{N} \setminus A'$.

Если такое построение выполнено, то условие (4) обеспечивает непустоту каждого пересечения $\bigcap_m Y_{a \upharpoonright m}$, где $a \in \mathcal{N}$ по определению польской сети, а согласно (2) каждое такое пересечение содержит ровно одну точку, которую мы обозначим через $f(a)$, и это отображение

$$f: \mathcal{N} \xrightarrow{\text{на}} Y = \text{ran } f = \{f(a) : a \in \mathcal{N}\},$$

как легко видеть, является гомеоморфизмом. Заметим, что $Y = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_m Y_{a \upharpoonright m}$.

Для доказательства замкнутости множества Y в A' положим $y \in \bar{Y}$ (замыкание множества Y). Тогда $y \in \bar{Y}_\Lambda$, поскольку $Y \subseteq Y_\Lambda$. Далее, предположим, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $y \in \bar{Y}_s$. Тогда в наших предположениях $y \in \bigcup_k Y_{s \wedge k}$. Следовательно, согласно (5) либо $y \notin A'$, либо $y \in \bar{Y}_{s \wedge k}$ для некоторого (на самом деле, единственного) k . Из этого рассуждения следует, что если $y \in \bar{Y} \cap A'$, то существует точка $a \in \mathcal{N}$, для которой $y \in \bar{Y}_{a \upharpoonright m}$ для всех m . Но тогда $y = f(a)$ согласно (2), так что $y \in Y$, что и требовалось.

Наконец, расскажем о построении множеств Y_s .

Если мы уже имеем непустое Σ_1^1 -множество $Y_s \subseteq \mathcal{N}$, то его замыкание $\bar{Y}_s$ – также множество из Σ_1^1 , откуда следует $\bar{Y}_s \not\subseteq A'$ согласно гипотезе случая 2. Возьмем любую точку $y \in \bar{Y}_s \setminus A'$ и сходящуюся к ней последовательность попарно различных точек $y_n \in Y_s$. Пусть U_n – базовая окрестность точки y_n (т.е. бэровский интервал) диаметра $\leq 1/3$ от наименьшего из расстояний от y_n до точек y_k , $k \neq n$. Положим $Y_{s \wedge n} = Y_s \cap U_n$, а затем еще сузим эти множества $Y_{s \wedge n}$ до подходящих бэровских интервалов с тем, чтобы выполнить требования (2) и (4). Теорема доказана.

6. Доказательство второй главной теоремы. Здесь доказывается теорема 1.2. Множество U из (I) есть Π_1^1 : это легко получается из следствия 2.4. Таким образом, разность $A \setminus U$ есть Σ_1^1 -множество.

ЛЕММА 6.1. В условиях теоремы 1.2, если $Y \subseteq A \setminus U$ – непустое Σ_1^1 -множество, то его топологическое замыкание в $\mathcal{N}$ некомпактно, т.е. дерево

$$T(Y) = \{y \upharpoonright n : y \in Y \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

имеет хотя бы одно бесконечное ветвление.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда множество

$$H = \{\langle t, n \rangle : t \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \forall k (t \wedge k \in T(Y) \implies k \leq n)\}$$

класса Π_1^1 (так как Σ_1^1 -фрагмент $T(Y)$ встречается слева от импликации) удовлетворяет $\text{dom} H = \mathbb{N}^{<\omega}$. Из теоремы 2.2 следует, что существует Δ_1^1 -функция $f: \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$\langle t, f(t) \rangle \in H \quad \text{для всех } t \in \mathbb{N}^{<\omega}.$$

Отсюда по определению H имеем $y(n) \leq f(y \upharpoonright n)$ для всех $y \in Y$ и n , так что $Y \subseteq [T']$, где T' есть дерево из всех кортежей $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющих

$$t(n) \leq f(t \upharpoonright n) \quad \text{для каждого } n < \text{lh } t.$$

Но T' – компактное дерево, и легко видеть, что T' есть Δ_1^1 вместе с f . Отсюда $[T'] \subseteq U$, противоречие.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1.2, предположим, что (I) не имеет места, т.е. множество $A \setminus U$ непусто. В этом предположении существует система непустых Σ_1^1 -множеств $Y_s \subseteq A \setminus U$, удовлетворяющая техническим условиям (1)–(4) из п. 5, а также следующему требованию вместо (5):

(5') если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x_k \in Y_{s \wedge k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то последовательность точек x_k не имеет сходящихся подпоследовательностей в $\mathcal{N}$.

Если такая система множеств построена, то по тем же причинам, что и в доказательстве теоремы 1.1, ассоциированная функция $f: \mathcal{N} \rightarrow A \setminus U$ взаимно однозначна и является гомеоморфизмом из $\mathcal{N}$ на свой полный образ

$$Y = \text{ran } f = \{f(a) : a \in \mathcal{N}\} \subseteq A \setminus U.$$

Проверка абсолютной замкнутости Y в $\mathcal{N}$ подобна проверке относительной замкнутости в доказательстве теоремы 1.1, но здесь условие (5') сильнее. Таким образом, мы пришли к (II).

Теперь скажем о построении множеств Y_s . Если Σ_1^1 -множество $Y_s \subseteq A \setminus U$ уже построено, то согласно лемме 6.1 можно подобрать $t \in T(Y_s)$ так, что $t \wedge k \in T(Y_s)$ для всех k из бесконечного множества $K_s \subseteq \mathbb{N}$. Это позволяет выбрать последовательность попарно различных точек $y_k \in Y_s$, $k \in \mathbb{N}$, не имеющую сходящихся подпоследовательностей. Накрываем эти точки достаточно малыми бэровскими интервалами U_k с тем, чтобы для полученных Σ_1^1 -множеств $Y_{s \wedge i} = Y_s \cap U_s$ было верно (5'), а затем при необходимости ужимаем эти множества, чтобы удовлетворить требования (2) и (4). Теорема доказана.

7. Замечания. Основные результаты этой заметки можно сравнить со следующими теоремами классической дескриптивной теории множеств.

ТЕОРЕМА 7.1 (Гуревич [10]). Пусть $\mathbb{X}$ – польское пространство. Любое не σ -компактное Σ_1^1 -множество $A \subseteq \mathbb{X}$ имеет подмножество, гомеоморфное $\mathcal{N}$ и замкнутое в A .

ТЕОРЕМА 7.2 (Сан-Раймон [11], см. также 21.23 в [12]). Пусть $\mathbb{X}$ – польское пространство и $A \subseteq \mathbb{X}$ есть Σ_1^1 -множество, которое нельзя накрыть σ -компактным множеством $Z \subseteq \mathbb{X}$. Тогда найдется множество $P \subseteq A$, гомеоморфное $\mathcal{N}$ и замкнутое в $\mathbb{X}$.

Выкладки в [12] показывают, что каждую из этих теорем достаточно получить для случая $\mathbb{X} = \mathcal{N}$, а затем распространить на множества любого польского пространства $\mathbb{X}$ уже чисто топологическими методами. В варианте для $\mathbb{X} = \mathcal{N}$ теорема 7.2 прямо следует из релятивизованной формы (т.е. для классов $\Sigma_1^1(p)$, где $p \in \mathcal{N}$ произвольно) нашей теоремы 1.2. Теорема же 7.1 выводится из релятивизованной формы теоремы 1.1 только для случая множеств A класса Δ_1^1 (т.е. борелевских). Интересная проблема состоит в том, чтобы соответственным образом распространить теорему 1.1 на класс Σ_1^1 . Ожидаемый результат может при сохранении условия (II) теоремы 1.1 потребовать некоторого ослабления условия (I) теоремы, например, посредством обращения к деревьям не класса Δ_1^1 .

Теорема 1.1 позволяет без особого труда получить, еще несколько известных результатов, которые собраны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 7.3 (ср. с теоремой 2.5). Допустим, что множество $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ принадлежит Δ_1^1 и все сечения

$$(P)_x = \{y : \langle x, y \rangle \in P\}, \quad x \in \mathbb{X},$$

σ -компактны. Тогда

- (i) $\text{pr } P$ есть Δ_1^1 -множество;
- (ii) P – счетное объединение Δ_1^1 -множеств с компактными сечениями;
- (iii) P униформизируется Δ_1^1 -множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим множество H всех пар $\langle x, T \rangle$ таких, что $x \in \mathcal{N}$, $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ – компактное дерево класса $\Delta_1^1(x)$ и $[T] \subseteq (P)_x$. Множество H имеет класс Π_1^1 согласно следствию 2.4. По теореме 1.1, если $\langle x, y \rangle \in P$, то найдется дерево T такое, что $\langle x, T \rangle \in H$ и $y \in [T]$. Поэтому Π_1^1 -множество

$$E = \{\langle x, y, T \rangle : \langle x, y \rangle \in P \wedge \langle x, T \rangle \in H \wedge y \in [T]\} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times 2^{(\mathbb{N}^{<\omega})}$$

удовлетворяет $\text{pr}_{xy} E = P$, т.е. если $\langle x, y \rangle \in P$, то найдется дерево T , для которого $\langle x, y, T \rangle \in E$. Униформизируем E Π_1^1 -множеством $U \subseteq E$, т.е. если $\langle x, y \rangle \in P$, то существует единственное T , для которого $\langle x, y, T \rangle \in U$. Но U есть и Σ_1^1 , так как $\langle x, y, T \rangle \in U$ равносильно такой формуле:

$$\langle x, y \rangle \in P \wedge y \in [T] \wedge \forall T' \in \Delta_1^1(x) \quad (\langle x, y, T' \rangle \in U \implies T = T'),$$

а кванторы вида $\forall x \in \Delta_1^1(y)$ сохраняют класс Σ_1^1 . Итак, Σ_1^1 -множество

$$F = \{\langle x, T \rangle : \exists y (\langle x, y, T \rangle \in U)\}$$

включено в Π_1^1 -множество H . По теореме отделимости (теорема 2.1) найдется Δ_1^1 -множество V , для которого $F \subseteq V \subseteq H$. И при этом по построению выполнено

$$\langle x, y \rangle \in P \iff \exists T (\langle x, T \rangle \in V \wedge y \in [T]).$$

Наконец, множество V счетнозначно: если $\langle x, T \rangle \in V$, то $T \in \Delta_1^1(x)$ (так как $V \subseteq H$). Сразу заметим, что $\text{rg } P = \text{rg } V$, а потому проекция $D = \text{rg } P$ имеет класс Δ_1^1 по теореме 2.5.

(ii) По теореме 2.5 множество V равно объединению $V = \bigcup_n V_n$ однозначных множеств V_n класса Δ_1^1 , причем каждая проекция $D_n = \text{rg } V_n \subseteq D$ есть Δ_1^1 . По существу каждое V_n есть график Δ_1^1 -функции $\tau_n: D_n \rightarrow \text{компактные деревья}$, и $(P)_x = \bigcup_{x \in D_n} [\tau_n(x)]$. Положим

$$P_n = \{\langle x, y \rangle : x \in D_n \wedge y \in [\tau_n(x)]\}$$

для каждого n . Тогда $P = \bigcup_n P_n$, по предыдущему все множества P_n имеют только компактные сечения и каждое P_n есть Δ_1^1 -множество, поскольку этому классу принадлежат множества D_n и функции τ_n .

(iii) Опять по теореме 2.5 (iii) множество V униформируется однозначным Δ_1^1 -множеством, т.е. найдется Δ_1^1 -функция

$$\tau: D_n \rightarrow \text{компактные деревья}$$

такая, что $\langle x, \tau(x) \rangle \in V$ для всех $x \in D$. Рассмотрим множество Q всех пар $\langle x, y \rangle \in P$ таких, что y есть самая лексикографически левая точка компактного множества $[\tau(x)]$. Нетрудно проверить, что Q имеет класс Δ_1^1 (см. доказательство следствия 4.2) и униформирует данное множество P .

Теорема 7.3 остается верной для класса $\Delta_1^1(p)$ с любым фиксированным параметром $p \in \mathcal{N}$ с тем же доказательством – а тогда, разумеется, и для проективного класса Δ_1^1 (всех борелевских множеств). Мы получаем такое следствие, соединяющее несколько классических результатов дескриптивной теории множеств (Арсенин, Кунугуи, Щегольков, Сан-Раймон, ссылки см. в [3; § 4]).

СЛЕДСТВИЕ 7.4. Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – польские пространства, а Δ_1^1 -множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ удовлетворяет такому условию: все сечения $(P)_x = \{y : \langle x, y \rangle \in P\}$, $x \in \mathbb{X}$, σ -компактны. Тогда

- (i) $\text{rg } P$ есть Δ_1^1 -множество;
- (ii) P – счетное обединение Δ_1^1 -множеств с компактными сечениями;
- (iii) P униформируется Δ_1^1 -множеством.

Авторы благодарны рецензенту за ряд замечаний, улучшивших изложение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств*, ред. К. Дж. Баруайз, Наука, М., 1982.
- [2] В. Г. Кановей, “Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории”, *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств*, ред. К. Дж. Баруайз, Наука, М., 1982, 273–364.

- [3] В. Г. Кановей, “Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н. Н. Лузина”, *УМН*, **40**:3 (1985), 117–155.
- [4] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, “О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств”, *УМН*, **58**:5 (2003), 3–88.
- [5] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*, МЦНМО, М., 2010.
- [6] V. Kanovei, *Borel Equivalence Relations. Structure and Classification*, Univ. Lecture Ser., **44**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [7] L. A. Harrington, A. S. Kechris, A. Louveau, “A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations”, *J. Amer. Math. Soc.*, **3**:4 (1990), 903–928.
- [8] G. Hjorth, “Actions by the classical Banach spaces”, *J. Symbolic Logic*, **65**:1 (2000), 392–420.
- [9] В. Г. Кановей, “Топологии, порожденные эффективно суслинскими множествами, и их приложения в дескриптивной теории множеств”, *УМН*, **51**:3 (1996), 17–52.
- [10] W. Hurewicz, “Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A)”, *Fundam. Math.*, **12** (1928), 78–109.
- [11] J. Saint-Raymond, “Approximation des sous-ensembles analytiques par l’intérieur”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **281**:2-3 (1975), 85–87.
- [12] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.

В. Г. Кановей

Институт проблем передачи информации, г. Москва

E-mail: kanovei@rambler.ru

Поступило

01.11.2009

Исправленный вариант

27.05.2011

В. А. Любецкий

Институт проблем передачи информации, г. Москва

E-mail: lyubetsk@iitp.ru