Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Заставный, В. В. Савчук, Приближение классов сверток линейными операторами специального вида, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 351–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:15:51

Приближение классов сверток линейными операторами специального вида

В. П. Заставный, В. В. Савчук

Для класса сверток $\mathbf{W}_{p,m}(K)$, ядро K которого порождено моментной последовательностью, построено параметрическое семейство операторов G_ρ . Найдена формула для вычисления величины

$$E(\mathbf{W}_{p,m}(K); G_\rho)_p := \sup_{f \in \mathbf{W}_{p,m}(K)} \|f - G_\rho(f)\|_p.$$

В случае, когда $\mathbf{W}_{p,m}(K) = \mathbf{W}_{p,m}^{r,\beta}$, найдено разложение по степеням параметра $\varepsilon = -\ln \rho$ величины $E(\mathbf{W}_{p,m}^{r,\beta}; G_{\rho,r})_p$, где $\beta \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, $m \in \mathbb{N}$, а $p = 1$ или $p = \infty$.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

Пусть $L_p = L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, – классы 2π -периодических вещественнозначных измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}.$$

Коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1$ определяются по формуле

$$\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$H_p^0 = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leq 1\},$$

$$H_p^m = \{\varphi \in H_p^0 : \widehat{\varphi}(k) = 0, |k| \leq m-1, k \in \mathbb{Z}\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

По функции $K \in L_1$ определим класс функций $\mathbf{W}_{p,m}(K)$:

$$\mathbf{W}_{p,m}(K) := \left\{ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K(t) dt : \varphi \in H_p^m \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.1)$$

Известно, что $\mathbf{W}_{p,m}(K) \subset L_p$ при всех $1 \leq p \leq \infty$, а если $p = \infty$ или $K \in L_\infty$, то $\mathbf{W}_{p,m}(K) \subset C(\mathbb{R})$ (см., например, [1; гл. 4]). Если $m \in \mathbb{N}$, то для любой константы $c \in \mathbb{R}$ классы $\mathbf{W}_{p,m}(K)$ и $\mathbf{W}_{p,m}(K + c)$ очевидно совпадают.

Если $\{G_\rho\}_{0 < \rho < 1}$ – семейство линейных операторов, действующих из $\mathbf{W}_{p,m}(K)$ в L_p , то величина приближения класса $\mathbf{W}_{p,m}(K)$ операторами G_ρ определяется по формуле

$$E(\mathbf{W}_{p,m}(K); G_\rho)_p := \sup_{f \in \mathbf{W}_{p,m}(K)} \|f - G_\rho(f)\|_p. \quad (1.2)$$

В п. 2 настоящей работы рассмотрен случай, когда $m \in \mathbb{N}$, $p = 1$ или $p = \infty$ и

$$K(x) = \Psi_\beta(x) \sim \sum_{k \neq 0} \psi_{|k|} e^{-i\beta\pi \operatorname{sign} k/2} e^{ikx},$$

$$G_\rho(f)(x) \sim \hat{f}(0) + \sum_{k \neq 0} \hat{f}(k) \frac{\gamma_{|k|}(\rho)}{\psi_{|k|}} e^{ikx}, \quad f \in \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta).$$

В теореме 1 найдены явные формулы для величины (1.2) в случае, когда

$$\beta \in \mathbb{Z}, \quad \psi_k = \int_0^1 t^{k-1} d\mu(t), \quad \gamma_k(\rho) = \int_{[0,\rho)} t^{k-1} d\mu(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < \rho < 1,$$

где μ – неотрицательная конечная борелевская мера на отрезке $[0, 1]$, $\mu(\{1\}) = 0$ и $\mu((0, 1)) > 0$. При этом существенно используется теорема Никольского [2]. Как частный случай, когда $\psi_k = k^{-r}$, $r > 0$, получается явная формула для приближения известных классов $\mathbf{W}_{p,m}^{r,\beta}$ соответствующим семейством операторов $G_{\rho,r}$. Отметим, что в случае $r \in \mathbb{N}$ операторы $G_{\rho,r}$ совпадают с операторами $U_\alpha(p, r)$, изученными Жуком (см. формулу (407) из [3] при $\alpha = -\ln \rho$, $p = 1$).

В п. 3 найдены разложения двух интегралов по степеням параметра. Из этих разложений получаются разложения величин $E(\mathbf{W}_{p,m}^{r,\beta}; G_{\rho,r})_p$ по степеням $\varepsilon = \ln(1/\rho)$ и по степеням $(1 - \rho)$.

Отметим еще, что асимптотическое разложение верхних граней уклонений функций f от их сумм Фейера, взятых по классу функций, удовлетворяющих условию Липшица, было найдено в 1969 г. в работе Теляковского [4], а для классов W^r и $\bar{W}^r$ – в работе Баскакова и Теляковского [5]. Разложение с явными коэффициентами верхних граней уклонений функций f от их интегралов Пуассона, взятых по классу $\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}$, $r \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, было найдено в работе Заставного [6].

2. Приближение классов $\mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta)$ операторами G_ρ

2.1. Некоторые известные факты. Пусть $\mathcal{T}_m$ – множество тригонометрических полиномов вида

$$\mathcal{T}_m = \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt : \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Наилучшее приближение функции $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, тригонометрическими полиномами определяется по формуле

$$E_m(f)_p = \inf_{T \in \mathcal{T}_m} \|f - T\|_p, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Если $K \in L_1$, то (см., например, [1; (4.23)])

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{\infty, m}(K)} \|f\|_{\infty} = \frac{1}{2\pi} E_m(K)_1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Говорят, что функция $K \in L_1$ удовлетворяет *условию* A_m^* , $m \in \mathbb{N}$, если существуют натуральное $n_* \geq m$ и тригонометрический полином $T^* \in \mathcal{T}_m$ такие, что для функции $\varphi_*(t) = \text{sign}(K(t) - T^*(t))$ почти всюду¹ выполняется равенство $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$. Если две функции $K_1, K_2 \in L_1$ совпадают почти всюду и функция K_1 удовлетворяет условию A_m^* , $m \in \mathbb{N}$, то и функция K_2 , очевидно, удовлетворяет этому условию.

Если для ядра $K \in L_1$ выполнено условие A_m^* , то из теоремы Никольского [2] вытекает, что справедливо равенство (см. также [1; теорема 4.3.3])

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_{1, m}(K)} \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} E_m(K)_1. \quad (2.2)$$

2.2. Общие формулы для вычисления величины $E(\mathbf{W}_{p, m}(\Psi_{\beta}); G_{\rho})_p$. Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ и $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая последовательность вещественных чисел, что тригонометрический ряд

$$\sum_{k \neq 0} \psi_{|k|} e^{-i\beta\pi \text{sign } k/2} e^{ikx} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cos\left(kx - \frac{\beta\pi}{2}\right) \quad (2.3)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Psi_{\beta} \in L_1$. Тогда для любой функции $f \in \mathbf{W}_{p, m}(\Psi_{\beta})$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, справедливы соотношения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \Psi_{\beta}(t) dt \sim \sum_{k \neq 0} \widehat{\varphi}(k) \psi_{|k|} e^{-i\beta\pi \text{sign } k/2} e^{ikx},$$

где φ – соответствующая функция из H_p^m (см. (1.1)). Пусть $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая последовательность вещественнозначных функций $\gamma_k(\cdot)$ на $(0, 1)$, что при каждом $\rho \in (0, 1)$ тригонометрический ряд

$$\sum_{k \neq 0} \gamma_{|k|}(\rho) e^{-i\beta\pi \text{sign } k/2} e^{ikx} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\rho) \cos\left(kx - \frac{\beta\pi}{2}\right) \quad (2.4)$$

является рядом Фурье некоторой функции $g_{\rho, \beta} \in L_1$. Предположим, что $\psi_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда каждой функции $f \in \mathbf{W}_{p, m}(\Psi_{\beta})$, $m \in \mathbb{N}$, можно поставить в соответствие семейство тригонометрических рядов (далее мы учли, что $\widehat{f}(0) = 0$)

$$\widehat{f}(0) + \sum_{k \neq 0} \widehat{f}(k) \frac{\gamma_{|k|}(\rho)}{\psi_{|k|}} e^{ikx} = \sum_{k \neq 0} \widehat{\varphi}(k) \gamma_{|k|}(\rho) e^{-i\beta\pi \text{sign } k/2} e^{ikx} = \sum_{k \neq 0} \widehat{\varphi}(k) \widehat{g}_{\rho, \beta}(k) e^{ikx}, \quad (2.5)$$

где φ – соответствующая функция из H_p^m . Так как $g_{\rho, \beta} \in L_1$, ряд (2.5) при $\rho \in (0, 1)$ является рядом Фурье функции

$$G_{\rho}(f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) g_{\rho, \beta}(t) dt \in L_p \quad (2.6)$$

¹Здесь и далее под *почти всюду* мы подразумеваем почти всюду относительно меры Лебега.

и

$$G_\rho(f)(x) \sim \widehat{f}(0) + \sum_{k \neq 0} \widehat{f}(k) \frac{\gamma_{|k|}(\rho)}{\psi_{|k|}} e^{ikx}, \quad f \in \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta). \quad (2.7)$$

Формулы (2.6) и (2.7) задают семейство линейных операторов $G_\rho: \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta) \rightarrow L_p$, $0 < \rho < 1$. Очевидно,

$$f(x) - G_\rho(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K_{\rho,\beta}(t) dt, \quad f \in \mathbf{W}_{p,m}(\psi),$$

где φ – соответствующая функция из H_p^m (см. (1.1)), $K_{\rho,\beta}(x) := \Psi_\beta(x) - g_{\rho,\beta}(x) \in L_1$ и

$$K_{\rho,\beta}(x) \sim \sum_{k \neq 0} (\psi_{|k|} - \gamma_{|k|}(\rho)) e^{-i\beta\pi \operatorname{sign} k/2} e^{ikx} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k - \gamma_k(\rho)) \cos\left(kx - \frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (2.8)$$

Очевидно, $f - G_\rho(f) \in L_p$ для любой $f \in \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta)$, а если $p = \infty$ или $\Psi_\beta \in L_\infty$, то $f - G_\rho(f) \in C(\mathbb{R})$. Поэтому при $1 \leq p \leq \infty$ имеет смысл следующая величина:

$$E(\mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta); G_\rho)_p := \sup_{f \in \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_\beta)} \|f - G_\rho(f)\|_p = \sup_{f \in \mathbf{W}_{p,m}(K_{\rho,\beta})} \|f\|_p.$$

Из (2.1) вытекает равенство

$$E(\mathbf{W}_{\infty,m}(\Psi_\beta); G_\rho)_\infty = \frac{1}{2\pi} E_m(K_{\rho,\beta})_1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Если дополнительно для семейства ядер $K_{\rho,\beta} \in L_1$ выполнено условие A_m^* , $m \in \mathbb{N}$, то справедливы равенства

$$E(\mathbf{W}_{\infty,m}(\Psi_\beta); G_\rho)_\infty = E(\mathbf{W}_{1,m}(\Psi_\beta); G_\rho)_1 = \frac{1}{2\pi} E_m(K_{\rho,\beta})_1, \quad 0 < \rho < 1. \quad (2.9)$$

2.3. Случай моментной последовательности. Пусть μ – неотрицательная конечная борелевская мера на отрезке $[0, 1]$, для которой выполнено $\mu(\{1\}) = 0$ и $\mu((0, 1)) > 0$. Последовательность $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ определим по формуле

$$\psi_k = \int_0^1 t^{k-1} d\mu(t), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Очевидно последовательность $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ убывает, $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \mu(\{1\}) = 0$ и $\psi_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, неравенства $\sum_{s=0}^p \binom{p}{s} (-1)^s \psi_{k+s} \geq 0$ выполняются при любых $p \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Ряд (2.3) сходится, по крайней мере, при всех $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, к своей сумме $\Psi_\beta(x)$. Если $\beta \in 2\mathbb{Z}$, то $\Psi_\beta \in L_1$ и ряд (2.3) является рядом Фурье функции Ψ_β (см., например, [7; гл. V] или [8; § 7.3]). Если дополнительно сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k/k$ (что эквивалентно условию $\int_0^1 |\ln(1-t)| d\mu(t) < +\infty$), то $\Psi_\beta \in L_1$ для $\beta \in \mathbb{R}$ и ряд (2.3) является рядом Фурье функции Ψ_β (см., например, [7; гл. V] или [8; § 7.3]).

Последовательность функций $\{\gamma_k(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ определим по формуле

$$\gamma_k(\rho) = \int_{[0,\rho)} t^{k-1} d\mu(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (2.11)$$

Так как $\rho \in (0, 1)$, при любом $\beta \in \mathbb{R}$ ряд (2.4) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$ и, значит, является рядом Фурье своей суммы $g_{\rho, \beta} \in C(\mathbb{R})$. Поэтому при условии $\Psi_\beta \in L_1$ формулы (2.6) и (2.7) задают оператор $G_\rho: \mathbf{W}_{p, m}(\Psi_\beta) \rightarrow L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ – неотрицательная конечная борелевская мера на отрезке $[0, 1]$, для которой выполнены два условия $\mu(\{1\}) = 0$ и $\mu((0, 1)) > 0$. Пусть $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ моментная последовательность, определенная по формуле (2.10), а $\Psi_\beta(x)$ сумма ряда (2.3). Пусть $\{\gamma_k(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность, определенная по формуле (2.11), а $\{G_\rho\}$ – соответствующее семейство линейных операторов, заданных на классе $\mathbf{W}_{p, m}(\Psi_\beta)$ по формуле (2.7). Пусть

$$\nu_k(\rho) = \psi_k - \gamma_k(\rho) = \int_\rho^1 t^{k-1} d\mu(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < \rho < 1,$$

и $p = \infty$ или $p = 1$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если $\beta \in 2\mathbb{Z}$, то при любых $\rho \in (0, 1)$ и $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$E(\mathbf{W}_{p, m}(\Psi_\beta); G_\rho)_p = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu_{(2k+1)m}(\rho)}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \operatorname{arctg} t^m d\mu(t); \quad (2.12)$$

2) если $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$ и $\int_0^1 |\ln(1-t)| d\mu(t) < +\infty$, то при любых $\rho \in (0, 1)$ и $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$E(\mathbf{W}_{p, m}(\Psi_\beta); G_\rho)_p = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_{(2k+1)m}(\rho)}{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t^m}{1-t^m} d\mu(t). \quad (2.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если дополнительно к условиям теоремы 1 для любых $\rho \in (0, 1)$ выполняется неравенство $\mu((\rho, 1)) > 0$, то не трудно показать, что выполняется соотношение

$$\frac{4}{\pi} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \operatorname{arctg} t^m d\mu(t) \sim \mu([\rho, 1]), \quad \rho \rightarrow 1-0.$$

Если еще и $\int_0^1 |\ln(1-t)| d\mu(t) < +\infty$, то

$$\frac{2}{\pi} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t^m}{1-t^m} d\mu(t) \sim \frac{2}{\pi} \int_\rho^1 \ln \frac{1}{1-t} d\mu(t), \quad \rho \rightarrow 1-0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем, что в обоих случаях для семейства ядер $K_{\rho, \beta}$, $0 < \rho < 1$, (см. (2.8)) условие A_m^* выполняется для любого $m \in \mathbb{N}$ и, значит, справедливы равенства (2.9).

Если $\beta \in 2\mathbb{Z}$, то ряд, стоящий в правой части соотношения (2.8), с точностью до знака совпадает с рядом

$$K(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cos kx, \quad \mu_k = 2\nu_k(\rho).$$

Очевидно последовательность $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ убывает к нулю и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\Delta^2 \mu_k := \mu_k - 2\mu_{k+1} + \mu_{k+2} \geq 0, \quad \Delta^3 \mu_k := \mu_k - 3\mu_{k+1} + 3\mu_{k+2} - \mu_{k+3} \geq 0.$$

В этом случае ядро $K \in L_1$ (см., например, [2; § 7]) удовлетворяет условию A_m^* для любого $m \in \mathbb{N}$ и (см., например, равенство (7.4) в [2])

$$\frac{1}{2\pi} E_m(K)_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_{(2k+1)m}}{2k+1}.$$

Так как $K_{\rho,\beta}(x) = (-1)^{\beta/2} K(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$, ядро $K_{\rho,\beta}$ также удовлетворяет условию A_m^* для любого $m \in \mathbb{N}$ и $E_m(K_{\rho,\beta})_1 = E_m(K)_1$. Поэтому справедливы равенства (2.9), из которых вытекает первое равенство в (2.12). Второе равенство в (2.12) получается из разложения

$$\operatorname{arctg} t = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{2p+1}, \quad |t| \leq 1.$$

Если $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$ и $\int_0^1 |\ln(1-t)| d\mu(t) < +\infty$, то ряд, стоящий в правой части соотношения (2.8), с точностью до знака совпадает с рядом

$$K(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sin kx, \quad \mu_k = 2\nu_k(\rho).$$

Очевидно последовательность $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ убывает к нулю, $\Delta^2 \mu_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k/k$. В этом случае ядро $K \in L_1$ (см., например, [2; § 7]) удовлетворяет условию A_m^* для любого $m \in \mathbb{N}$ и (см., например, равенство (7.8) в [2])

$$\frac{1}{2\pi} E_m(K)_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{(2k+1)m}}{2k+1}.$$

Аналогично, как и в первом случае, получаем справедливость первого равенства в (2.13). Второе равенство в (2.13) получается из условия $\int_0^1 |\ln(1-t)| d\mu(t) < +\infty$ и разложения

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1}, \quad |t| < 1.$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $m = 1$ и $p = \infty$ теорема 1 доказана в [9] (в теореме 1 этой работы пропущено условие монотонности функции $\lambda(t)$).

2.4. Случай $\mathbf{W}_{p,m}^{r,\beta}$. В качестве последовательности берем $\psi_k = k^{-r}$, $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Известно, что функция

$$\Psi_{r,\beta}(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-i\beta\pi \operatorname{sign} k/2}}{|k|^r} e^{ikx} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx - \beta\pi/2)}{k^r}, \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

принадлежит классу L_1 (см., например, [7; гл. V] или [8; гл. 7]). В этом случае появляются хорошо известные классы $\mathbf{W}_{p,m}^{r,\beta} := \mathbf{W}_{p,m}(\Psi_{r,\beta})$.

Равенство

$$\frac{1}{x^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} u^{r-1} e^{-ux} du = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 t^{x-1} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt, \quad r > 0, \quad x > 0$$

показывает, что последовательность $\{k^{-r}\}_{k \in \mathbb{N}}$ представима в виде (2.10), где

$$d\mu(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt.$$

Очевидно, интеграл $\int_0^1 |\ln(1-t)|(-\ln t)^{r-1} dt$ конечен при любом $r > 0$. Поэтому последовательность

$$\gamma_k(\rho) = \gamma_k(r, \rho) := \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\rho t^{k-1} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \rho \in (0, 1)$$

при любых $r > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ определяет по формуле (2.7) оператор $G_{\rho, r}: \mathbf{W}_{p, m}^{r, \beta} \rightarrow L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Из теоремы 1 сразу получается следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p = \infty$ или $p = 1$. Тогда при любых $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho \in (0, 1)$ справедливы равенства

$$E(\mathbf{W}_{p, m}^{r, \beta}; G_{\rho, r})_p = \frac{4}{\pi \Gamma(r)} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \arctg t^m \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt, \quad \beta \in 2\mathbb{Z}, \quad (2.14)$$

$$E(\mathbf{W}_{p, m}^{r, \beta}; G_{\rho, r})_p = \frac{2}{\pi \Gamma(r)} \int_\rho^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t^m}{1-t^m} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt, \quad \beta + 1 \in 2\mathbb{Z}. \quad (2.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $p = \infty$, $m = 1$ и $r \in \mathbb{N}$ следствие 1 доказано в [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $r \in \mathbb{N}$, то легко проверить, что

$$\frac{\gamma_k(r, \rho)}{\psi_k} = \rho^k \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(-k \ln \rho)^j}{j!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В этом случае операторы $G_{\rho, r}$ совпадают с операторами $U_\alpha(p, r)$, изученными Жук-ом (см. формулу (407) из [3] при $\alpha = -\ln \rho$, $p = 1$).

3. Разложение интегралов (2.14) и (2.15) по степеням параметра

ТЕОРЕМА 2. При любых $m > 0$, $r > 0$ и $0 < \varepsilon < \pi$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} m^r \int_{e^{-\varepsilon/m}}^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t^m}{1-t^m} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt \\ = -\frac{\varepsilon^r \ln \varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon^r (1+r \ln 2)}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n B_n(1/2)}{(n+r)n!n} \varepsilon^{n+r}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если дополнительно $r \in \mathbb{N}$, то

$$m^r \int_{e^{-\varepsilon/m}}^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t^m}{1-t^m} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt = -\frac{\varepsilon^r \ln \varepsilon}{r} + \sum_{k=r}^{\infty} \frac{c_k(r)}{k!} \varepsilon^k, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} c_r(r) &= \frac{(1+r \ln 2)(r-1)!}{r}, \\ c_k(r) &= \frac{(-1)^{k-r+1} 2^{k-r} B_{k-r}(1/2)(k-1)!}{(k-r)!(k-r)}, \quad k \geq r+1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $B_n(x)$ – многочлены Бернулли.

СЛЕДСТВИЕ 2. При любых $m > 0$, $r \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho < 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} m^r \int_{\rho^{1/m}}^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t^m}{1-t^m} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt \\ = \frac{(-1)^{r+1} (\ln \rho)^r \ln(-\ln \rho)}{r} + \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(\rho-1)^n}{n!} \sum_{k=r}^n (-1)^k s(n, k) c_k(r), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $s(n, k)$ – числа Стирлинга первого рода, которые определяются из соотношения $x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k$, $n \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $r \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho < 1$, то (см. [6; (39) и (36)])

$$\begin{aligned} -\ln^r \rho \ln(-\ln \rho) &= \ln^r \rho \ln \frac{1}{1-\rho} + (-1)^r \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^n}{n!} \sum_{k=r+1}^n \frac{(-1)^k s(n, k) B_{k-r} k!}{(k-r)(k-r)!}, \\ \frac{\ln^r \rho}{r!} &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{s(n, r)}{n!} (\rho-1)^n. \end{aligned}$$

Здесь $B_n := B_n(0)$ – числа Бернулли.

ТЕОРЕМА 3. При любых $m > 0$, $r > 0$ и $0 < \varepsilon < \pi/2$ справедливо равенство

$$m^r \int_{e^{-\varepsilon/m}}^1 \frac{\operatorname{arctg} t^m}{t} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\varepsilon^r}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1} E_n(1/2)}{(n+1)!(n+r+1)} \varepsilon^{n+r+1}. \quad (3.5)$$

Если дополнительно $r \in \mathbb{N}$, то

$$m^r \int_{e^{-\varepsilon/m}}^1 \frac{\operatorname{arctg} t^m}{t} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{d_k(r)}{k!} \varepsilon^k, \quad (3.6)$$

где

$$d_r(r) = \frac{\pi}{4} (r-1)!, \quad d_k(r) = \frac{(-1)^{k-r} 2^{k-r-2} E_{k-r-1}(1/2) (k-1)!}{(k-r)!}, \quad k \geq r+1. \quad (3.7)$$

Здесь $E_n(x)$ – многочлены Эйлера.

СЛЕДСТВИЕ 3. При любых $m > 0$, $r \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho < 1$ справедливо равенство

$$m^r \int_{\rho^{1/m}}^1 \frac{\operatorname{arctg} t^m}{t} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(\rho-1)^n}{n!} \sum_{k=r}^n (-1)^k s(n, k) d_k(r). \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Легко проверить, что при любом фиксированном значении $\varepsilon > 0$ левая часть равенства (3.1) не зависит от $m > 0$. Поэтому считаем $m = 1$. Делая замену $t = e^{-u}$, получаем, что при $r > 0$, $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{e^{-\varepsilon}}^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt \\ = \int_0^{\varepsilon} \ln \frac{1+e^{-u}}{1-e^{-u}} u^{r-1} du = \frac{1}{r} \left(\varepsilon^r \ln \frac{1+e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}} - 2 \int_0^{\varepsilon} \frac{u^r e^{-u}}{e^{-2u}-1} du \right) \\ = -\frac{\varepsilon^r \ln \varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon^r \ln(1+e^{-\varepsilon})}{r} + \frac{\varepsilon^r}{r} \ln \frac{\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon}} - \frac{2}{r} \int_0^{\varepsilon} \frac{u^r e^{-u}}{e^{-2u}-1} du. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Многочлены Бернулли $B_n(x)$ определяются с помощью следующей производящей функции (см., например, [10; гл. I, § 13])

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(x), \quad |t| < 2\pi.$$

Полагая в этом равенстве $x = 1/2$, $t = -2u$, $|u| < \pi$, получаем следующее разложение:

$$-2 \int_0^\varepsilon \frac{u^r e^{-u}}{e^{-2u} - 1} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \cdot B_n\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\varepsilon^{n+r}}{n+r}, \quad 0 < \varepsilon < \pi. \quad (3.10)$$

Функция

$$g(z) := \ln \frac{z}{1 - e^{-z}}$$

(здесь $\ln 1 = 0$) является аналитической в достаточно малой окрестности точки $z = 0$, $g(0) = 0$ и в этой окрестности

$$g'(z) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{(-z)e^{-z}}{e^{-z} - 1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B_n(1)}{n!} z^{n-1}.$$

Из последнего равенства вытекает, что функция $g(z)$ аналитически продолжается в круг $|z| < 2\pi$ и раскладывается в этом круге в ряд Тейлора в точке $z = 0$, радиус сходимости которого равен 2π и $g^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} B_n(1)/n$ при $n \geq 1$. Следовательно,

$$\ln \frac{z}{1 - e^{-z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B_n(1)}{n} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \quad (3.11)$$

Для разложения функции $\ln(1 + e^{-z})$ в ряд Тейлора в точке $z = 0$ воспользуемся следующим определением многочленов Эйлера $E_n(x)$ (см., например, [10; гл. I, § 14]):

$$\frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E_n(x), \quad |t| < \pi.$$

Связь между многочленами Эйлера и Бернулли вытекает из следующего тождества:

$$\frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \frac{2e^{tx}}{e^t - 1} - \frac{4e^{tx}}{e^{2t} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{2}{n} \left(B_n(x) - 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right) \right), \quad 0 < |t| < \pi.$$

Поэтому

$$E_{n-1}(x) = \frac{2}{n} \left(B_n(x) - 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Функция $f(z) := \ln(1 + e^{-z})$ (здесь $\ln 1 = 0$) является аналитической в достаточно малой окрестности точки $z = 0$, $f(0) = \ln 2$ и в этой окрестности

$$f'(z) = -\frac{e^{-z}}{e^{-z} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} E_n(1)}{2n!} z^n.$$

Из последнего равенства вытекает, что функция $f(z)$ аналитически продолжается в круг $|z| < \pi$ и раскладывается в этом круге в ряд Тейлора в точке $z = 0$, радиус сходимости которого равен π . Следовательно,

$$\ln(1 + e^{-z}) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{n-1}(1)}{2} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.9) разложения (3.10), (3.11) и (3.13), получим равенство (3.1) при $m = 1$, и, значит, при любом $m > 0$. Следует только учесть равенства (3.12) при $x = 1$ и $B_0(x) \equiv 1$. Равенство (3.2) получается из (3.1). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Легко проверить, что при любом фиксированном значении $\varepsilon > 0$ левая часть равенства (3.5) не зависит от $m > 0$. Поэтому считаем $m = 1$. Делая замену $t = e^{-u}$, получаем, что при $r > 0$, $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\int_{e^{-\varepsilon}}^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt = \int_0^{\varepsilon} u^{r-1} \operatorname{arctg} e^{-u} du. \quad (3.14)$$

Функция $f(z) := \operatorname{arctg} e^{-z}$ является аналитической в достаточно малой окрестности точки $z = 0$, $f(0) = \pi/4$ и в этой окрестности

$$f'(z) = -\frac{e^{-z}}{e^{-2z} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{n-1} E_n \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Из последнего равенства вытекает, что функция $f(z)$ аналитически продолжается в круг $|z| < \pi/2$ и раскладывается в этом круге в ряд Тейлора в точке $z = 0$, радиус сходимости которого равен $\pi/2$. Следовательно,

$$\operatorname{arctg} e^{-z} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{n-1} E_n \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}. \quad (3.15)$$

Подставляя в (3.14) разложение (3.15), получим равенство (3.5) при $m = 1$, и, значит, при любом $m > 0$. Равенство (3.6) получается из (3.5). Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Достаточно рассмотреть случай $m = 1$. Если к равенству (3.2) применить лемму 1 из [6], то получим, что равенство (3.4) справедливо при $1/(\pi + 1) < \rho < 1$. Отсюда следует, что функция

$$q(\rho) = \int_{\rho}^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{r-1} dt + \frac{(-1)^r (\ln \rho)^r \ln(-\ln \rho)}{r}$$

аналитически продолжается в круг $|w - 1| < \pi/(\pi + 1)$ и в этом круге (берем ту ветвь логарифма, для которой $\ln 1 = 0$)

$$q'(w) = (-1)^r \cdot \frac{(\ln w)^{r-1}}{w} \left(\ln(1+w) + \ln \frac{\ln w}{w-1} + \frac{1}{r} \right).$$

Функции $(\ln w)^{r-1}$, $\ln(1+w)$ и $1/w$ очевидно являются аналитическими в круге $|w - 1| < 1$. Рассмотрим функцию

$$f(w) = \ln \frac{\ln w}{w-1}.$$

В достаточно малой окрестности точки $w = 1$ имеем $f'(w) = 1/(w \ln w) - 1/(w - 1)$. Из этого равенства вытекает, что функция $f(w)$ (а вместе с ней и $q(w)$) аналитически продолжается в круг $|w - 1| < 1$. Отсюда следует справедливость равенства (3.4) при $0 < \rho < 1$. Следствие 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Достаточно рассмотреть случай $m = 1$. Если к равенству (3.6) применить лемму 1 из [6], то получим, что равенство (3.8) справедливо при $2/(\pi + 2) < \rho < 1$. Функция в левой части равенства (3.8), очевидно, аналитически продолжается в круг $|w - 1| < 1$. Отсюда следует справедливость равенства (3.8) при $0 < \rho < 1$. Следствие 3 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.
- [2] С. М. Никольский, “Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:3 (1946), 207–256.
- [3] В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1982.
- [4] С. А. Теляковский, “О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера”, *Укр. матем. журн.*, **21**:3 (1969), 334–343.
- [5] В. А. Баскаков, С. А. Теляковский, “О приближении дифференцируемых функций суммами Фейера”, *Матем. заметки*, **32**:2 (1982), 129–140.
- [6] В. П. Заставный, “О рядах, возникающих при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 497–511.
- [7] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965.
- [8] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 1, Мир, М., 1985.
- [9] В. В. Савчук, “Приближение 2π -периодических и голоморфных функций некоторыми линейными методами”, *Сб. трудов Ин-та матем. НАН Украины*, **5**:1 (2008), 309–323.
- [10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.

В. П. Заставный

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: zastavn@rambler.ru

Поступило

02.11.2009

Исправленный вариант

16.03.2011

В. В. Савчук

Институт математики НАН Украины, г. Киев, Украина

E-mail: savchuk@imath.kiev.ua