Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Владимиров, Свойства эффективности интуиционистской теории множеств со схемой collection, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 658–672

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:49:43

Свойства эффективности интуиционистской теории множеств со схемой collection

А. Г. Владимиров

Рассматривается интуиционистская теория множеств со схемой collection. С помощью метода реализуемости для нее доказываются различные свойства эффективности.

Библиография: 18 названий.

Пусть $\mathbb{ZF}I2C$ – теория множеств в двусортном языке (где переменные сорта 0 пробегают натуральные числа, а переменные сорта 1 – множества) с подлежащей интуиционистской логикой. Аксиомы включают в себя все аксиомы гейтинговой арифметики HA и все обычные аксиомы Цермело–Френкеля, в том числе схему Collection в качестве схемы аксиом подстановки и схему TI в качестве схемы аксиом фундирования. Формальная нотация всех аксиом будет дана ниже.

Хорошо известно, что негативный перевод Геделя поднимается на уровень теории множеств (см. [1] и [2]), и в этом смысле классическая теория множеств содержится в интуиционистской теории. При этом в [2] используется классически верный принцип DCS (Double Complement of Sets) и интерпретация отношения $\in$ (в отличие от [1]) является стандартной. Также известно, что классическая $\mathbb{ZF}$ и интуиционистская $\mathbb{ZF}I2C$ имеют одни и те же доказуемо рекурсивные функции (см. [3]).

Для интуиционистской теории множеств известны гейтингозначные модели (аналоги булевозначных моделей для классической $\mathbb{ZF}$ – [4]). Для интуиционистской теории множеств со схемой Replacement вместо схемы Collection доказаны свойства дизъюнктивности и полной экзистенциальности (см. [5]). Теория $\mathbb{ZF}I2C$ свойством полной экзистенциальности не обладает [6]. Там же показано, что классы доказуемо рекурсивных функций у интуиционистских теорий множеств со схемой Replacement и со схемой Collection различны. Кроме того, в теории $\mathbb{ZF}I2C$ допустимо правило Маркова с параметрами по множествам (см. [7]).

Одним из важных методов анализа интуиционистских теорий является метод рекурсивной реализуемости Клини, поднятый на уровень теории множеств, см. [8] или [9]. К интуиционистской теории множеств без аксиомы объемности этот метод применен в [8], а в [9] строится модификация метода рекурсивной реализуемости Клини уже для теории с аксиомой объемности. В [10; гл. 5] предложена модификация метода Клини, позволяющая доказывать свойства эффективности связок.

В [11] и [12] построены модели типа q -реализуемости для нескольких вариантов интуиционистской теории множеств без аксиомы объемности, но со схемой Collection. В частности, в [12] доказаны свойства дизъюнктивности и нумерической экзистенциальности для теории множеств без аксиомы объемности и со схемой Collection, а также (с помощью некоторого перевода) для такой же теории множеств с аксиомой объемности, но только для формул вида $x \in Q$, где Q – это определимое в $\mathbb{ZF}I2C^-$ множество.

В данной работе строится модификация реализуемости из [9] для теории $\mathbb{ZF}I2C^-$. С помощью этой техники для нее доказываются дизъюнктивность и нумерическая экзистенциальность с параметрами по множествам для всех формул, а не только для формул вида $x \in Q$, где Q – определимое множество, что усиливает известный результат М. Бизона из [12]. Также доказывается, что в $\mathbb{ZF}I2C^-$ допустимы правила Чёрча, Маркова и униформизации (все – с параметрами по множествам). К теории $\mathbb{ZF}I2C^-$ можно добавить любую комбинацию принципа Маркова (M), принципа униформизации (UP), тезиса Чёрча с выбором (CT), а также принципа IP (см. формулировку в п. 12) с сохранением свойств дизъюнктивности и нумерической экзистенциальности, допустимости правил Чёрча и униформизации (все они – с параметрами по множествам).

Все перечисленные результаты переносятся затем на экстенциональную теорию $\mathbb{ZF}I2C$ с помощью некоторого перевода. Все дополнительные постулаты содержат любые сорта параметров. Нотацию всех дополнительных принципов и свойств см. ниже, в п. 10.

Отметим еще, что DCS не зависит от $\mathbb{ZF}I2C$ (см. [13]), поэтому этот принцип необходимо добавить для того, чтобы интуиционистская теория множеств содержала классическую в смысле отмеченного ранее двойного негативного перевода Гёделя. В свою очередь, схема Collection не зависит от DCS (см. [14]).

Принцип DCS будет рассмотрен во второй части данной работы. Таким образом, будет доказано, что $\mathbb{ZF}I2C$ обладает целым рядом важных свойств эффективности. С другой стороны, многие неформальные математические рассуждения могут быть формализованы в этой теории. В частности, в $\mathbb{ZF}I2C$ можно формализовать и решить многие неформальные задачи преобразования классических доказательств в интуиционистские для извлечения явного описания математического объекта из доказательства его существования. Хорошо известные примеры результатов такого рода см. в [15]. Кроме того, схема CT также реализуема в $\mathbb{ZF}I2C$, а принцип Маркова M – в $\mathbb{ZF}I2C + M$. Известно, см. [16], что из схемы CT выводится следующая форма аксиомы выбора AC^0 :

$$\begin{aligned} & \forall n \exists m \varphi(n; m) \\ & \rightarrow \exists x [\text{Fnc}(x) \wedge \text{Dom}(x) = \omega \wedge \text{Rng}(x) \subseteq \omega \wedge \forall n \exists m \varphi(n; m) \wedge (\langle n; m \rangle \in x)]. \end{aligned}$$

Отметим, что допустимость правила Чёрча была доказана автором в [17].

Все это говорит о том, что теория $\mathbb{ZF}I2C$ – существенно конструктивная теория, достаточно естественным образом формализующая значительную часть содержательной классической математики.

1. Язык $\mathcal{L}_0$ теории $\mathbb{ZF}I2C$ содержит два сорта переменных: по натуральным числам $(a; b; c; d; n; m; p)$ и по множествам $(x; y; z; u; v)$, три предикатных символа:

$=^0$ для равенства чисел, $\in^0$ для принадлежности числа множеству и $\in^1$ для принадлежности одного множества другому (далее верхние индексы будем опускать), а также функциональные символы для всех примитивно рекурсивных функций и константы 0 (число нуль).

2. Язык $\mathcal{L}$ неэкстенциональной теории множеств $\mathbb{ZF}12C^-$ должен включать в себя символ равенства, а также систему термов, для того, чтобы можно было работать с обычными определениями теории множеств (см. п. 3). Дадим его точное определение.

Язык $\mathcal{L}$ содержит: все символы языка теории $\mathbb{ZF}12C$, а также символ равенства и следующие константы и функциональные символы:

- 1) константу $\emptyset$ и определяющие аксиомы: $\forall x(x \notin \emptyset)$ и $\forall a(a \notin \emptyset)$;
- 2) бинарные функциональные символы $\{x; y\}$ и $\{a; b\}$ и определяющие аксиомы:

$$\forall z(z \in \{x; y\} \equiv (z = x) \vee (z = y)), \quad \forall a(a \notin \{x; y\})$$

и аналогичные аксиомы для $\{a; b\}$;

- 3) унарный функциональный символ $\cup$ и определяющие аксиомы:

$$\forall y(y \in \cup x \equiv (\exists z \in x)(y \in z)), \quad \forall a(a \in \cup x \equiv (\exists z \in x)(a \in z));$$

- 4) константу ω и определяющие аксиомы: $\forall x(x \notin \omega)$ и $\forall a(a \in \omega)$;
- 5) константу ω_0 и определяющие аксиомы:

$$\emptyset \in \omega_0, \quad \forall z(z \in \omega_0 \rightarrow z' \in \omega_0),$$

а также

$$\forall x[(\emptyset \in x) \wedge \forall z(z \in x \rightarrow z' \in x) \rightarrow \omega \subseteq x],$$

где $z' \rightleftharpoons z \cup \{z\}$;

- 6) унарный функциональный символ $\mathfrak{P}$ и определяющую аксиому:

$$\forall x \forall y[(y \in \mathfrak{P}(x)) \equiv y \subseteq x],$$

где введено обычное сокращение:

$$y \subseteq x \rightleftharpoons \forall d(d \in y \rightarrow d \in x) \wedge \forall w(w \in y \rightarrow w \in x);$$

- 7) для каждой пары формул такой функциональный символ $U_{\varphi, \psi}$, что если $\vec{p}$ – список всех параметров формул φ и ψ , то

$$U_{\varphi, \psi}(u; \vec{p}) \rightleftharpoons \{x \in u \mid \psi(x)\} \cup \{a \in u \mid \varphi(a)\}$$

– терм нашего языка, а также определяющие аксиомы:

$$y \in U_{\varphi, \psi}(u; \vec{p}) \equiv (y \in u) \wedge \psi(y), \quad a \in U_{\varphi, \psi}(u; \vec{p}) \equiv (a \in u) \wedge \varphi(a).$$

Мы итерируем процесс добавления всех этих функциональных символов ω раз.

3. Аксиомы $\mathbb{ZF}I2C^-$ содержат аксиомы $\mathbb{HA}$ (включая схему индукции для всех формул языка), определяющие аксиомы для констант и функциональных символов, а также схемы аксиом Collection и TI (трансфинитной индукции). Нотация всех аксиом $\mathbb{ZF}I2C^-$ приводится ниже в доказательстве теоремы 1.

В теории $\mathbb{ZF}I2C^-$ можно уже давать все обычные определения, например, такие как

$$\begin{aligned}\langle x; y \rangle &\Leftarrow \{\{x\}; \{x; y\}\}, & \text{Fld}(x) &\Leftarrow \cup \cup x, & \text{Rel}(x) &\Leftarrow (\forall y \in x)(\exists y \exists z)[y = \langle x; y \rangle], \\ \text{Dom}(x) &= \{z \in \text{Fld}(x) | (\exists y)[\langle z; y \rangle \in x]\}, & \text{Rng}(x) &= \{z \in \text{Fld}(x) | (\exists y)[\langle y; z \rangle \in x]\}, \\ \text{Fnc}(x) &\Leftarrow \text{Rel}(x) \wedge \forall u, v, w [\langle u; v \rangle \in x \wedge \langle u; w \rangle \in x \rightarrow v = w]\end{aligned}$$

и т.д.

4. Все используемые обозначения являются достаточно стандартными, см., например, [12]. Как уже упоминалось, чтобы избежать индексов, буквы x, y, z, u, v, w всегда будут использоваться для обозначения множеств, а буквы $a, b, c, d, n, m, p, k, l$ – для обозначения натуральных чисел, ω обозначает множество всех натуральных чисел.

5. Для доказательства сформулированных утверждений мы используем прием со свободными константами. А именно, пусть теория $\mathbb{T}$ – одна из теорий $\mathbb{ZF}I2C^-$ или $\mathbb{ZF}I2C^- + \text{DCS}$, а $\mathbb{T}^c$ получается из теории $\mathbb{T}$ добавлением счетного множества новых констант сорта 1: $c_1, c_2, \dots$. Чтобы доказать одно из наших утверждений для $\mathbb{T}$, сначала доказываем его без параметров для $\mathbb{T}^c$, а затем заменяем все c_i на параметры (см., например, [5]).

6. Определим реализуемость индукцией по сложности формулы φ (см. [12]).

Напомним, что мы используем все стандартные обозначения теории рекурсии, формализованной в $\mathbb{HA}$ (см., например, [18]). В частности, $T_1(e; x; y)$ – это обычный предикат Клини, а $\{e\}(p) = q$ – это сокращение для $\exists d [T_1(e; p; d) \wedge (U(d) = q)]$, где U – стандартная примитивно рекурсивная функция, выдающая результат вычисления по номеру его протокола.

Пусть $v_1, v_2, \dots$ – пересчет всех переменных по множествам. Сопоставим каждой переменной x сорта 1 другую переменную $\overset{\circ}{x}$ по правилу: если x есть v_{2i} , то $\overset{\circ}{x}$ есть v_{2i+1} (см. [12]).

Теперь для каждой формулы φ , у которой все переменные по множествам имеют четные номера, определим новую формулу $Q(e; f; g; \varphi)$ (число e реализует формулу φ при оценках f и g). Здесь $f: \omega \rightarrow \omega$ – оценка переменных по числам, а $g: \omega \rightarrow \Pi$ – оценка переменных по множествам.

Введем обозначение: $f_n^m(i) = n$, если $i = m$ и $f_n^m(i) = f(i)$ иначе. Точно так же, $g_x^k(i) = \overset{\circ}{x}$, если $i = k$ и $g_x^k(i) = g(i)$ иначе.

Для краткости вместо $Q(e; f_m^n; g_x^k; \varphi)$ будем всегда писать $eQ\varphi(m; x)$. Формула $eQ\varphi$ (число e реализует формулу φ) с параметрами e (сорта 0) и всеми параметрами x и $\overset{\circ}{x}$, где x – параметр формулы φ , определяется следующим образом:

- 1) если φ есть $t = s$, то $eQ\varphi$ есть $t = s$;
- 2) если φ есть $t \in x$, где t – терм сорта 0, то $eQ\varphi$ есть $\langle e; t \rangle \in \overset{\circ}{x}$;
- 3) если $\varphi \Leftarrow x \in y$, то $e.Q.\varphi$ есть $\langle e; x; \overset{\circ}{x} \rangle \in \overset{\circ}{y}$;

- 4) если $\varphi \Leftarrow x \in y$ есть $x = y$, то $e.Q.\varphi$ есть $\overset{\circ}{x} = \overset{\circ}{y}$;
- 5) если φ есть $\psi \wedge \vartheta$, то $e.Q.\varphi$ есть $j_1 e.Q.\psi. \wedge .j_2 e.Q.\vartheta$;
- 6) если φ есть $\psi \vee \vartheta$, то $e.Q.\varphi$ есть $[j_1 e = 0 \rightarrow j_2 e.Q.\psi. \wedge .\psi] \wedge [j_1 e \neq 0 \rightarrow j_2 e.Q.\vartheta. \wedge .\vartheta]$;
- 7) если φ есть $\psi \rightarrow \vartheta$, то $e.Q.\varphi$ есть $\forall p [p.Q.\psi. \wedge .\psi \rightarrow !\{e\}(p). \wedge .\{e\}(p).Q.\vartheta]$;
- 8) если φ есть $\forall d \psi$, то $e.Q.\varphi$ есть $\forall d [!\{e\}(d). \wedge .\{e\}(d).Q.\psi(d)]$;
- 9) если φ есть $\exists d \psi$, то $e.Q.\varphi$ есть $j_2 e.Q.\psi(j_1 e). \wedge .\psi(j_1 e)$;
- 10) если φ есть $\forall x \psi$, то $e.Q.\varphi$ есть $\forall x \forall \overset{\circ}{x} [e.Q.\psi(x)]$;
- 11) если φ есть $\exists x \psi$, то $e.Q.\varphi$ есть $\exists x \exists \overset{\circ}{x} [e.Q.\psi(x). \wedge .\psi(x)]$.

Чтобы закончить определение реализуемости, необходимо определить формулу $e.Q.\varphi$ для атомарных φ , содержащих сложные термы по множествам. Для этого определим сначала сложность $C(T)$ терма T сорта 1 и сложность $C(\varphi)$ формулы φ :

- (i) если φ – атомарная формула без сложных термов, то $C(\varphi) := 0$;
- (ii) $C(t = s) := \max\{C(t); C(s)\}$ для арифметических термов t и s ;
- (iii) $C(t \in T) := \max\{C(t); C(T)\}$;
- (iv) логические связки и кванторы (по переменным обоих сортов) увеличивают сложность на 1;
- (v) $C(\{T; S\}) := \max\{C(T); C(S)\} + 1$;
- (vi) $C(\cup T) := C(T) + 1$;
- (vii) $C(\mathfrak{P}(T)) := C(T) + 1$;
- (viii) $C(U_{\varphi, \psi}(T)) := \max\{C(\varphi); C(\psi); C(T)\} + 1$.

Теперь определяем терм $\overset{\circ}{T}$ индукцией по сложности терма T :

- (a) если T есть переменная x , то $\overset{\circ}{T}$ есть $\overset{\circ}{x}$;
- (b) если T есть константа ω , то $\overset{\circ}{T}$ есть $\omega \times \omega$;
- (c) если T есть константа ω_0 , то $\overset{\circ}{T}$ есть $\{\langle x; \langle x; x \rangle \rangle \mid x \in \omega_0\}$;
- (d) если T есть терм $\{X; Y\}$, то $\overset{\circ}{T}$ есть

$$\{\langle e; z; \overset{\circ}{z} \rangle \mid z \in \{X; Y\}, \overset{\circ}{z} \in \{\overset{\circ}{X}; \overset{\circ}{Y}\}, e.Q.(z = X. \vee .z = Y)\};$$

- (e) если T есть терм $\cup X$, то $\overset{\circ}{T}$ есть

$$\{\langle e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \mid \exists z \exists \overset{\circ}{z} [\langle j_1 e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{z}. \wedge .\langle j_2 e; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{X}. \wedge .y \in z. \wedge .z \in X]\};$$

- (f) если T есть терм $\mathfrak{P}(X)$, то $\overset{\circ}{T}$ есть $\{\langle e; z; \overset{\circ}{z} \rangle \mid y \subseteq X. \wedge .e.Q.(y \subseteq X)\}$;

- (g) если T есть терм $U_{\varphi, \psi}(X)$, то $\overset{\circ}{T}$ есть

$$\{\langle e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \mid \langle j_1 e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{X}. \wedge .j_2 e.Q.\psi(y)\} \cup \{\langle e; d \rangle \mid \langle j_1 e; d \rangle \in \overset{\circ}{X}. \wedge .j_2 e.Q.\varphi(d)\}.$$

Теперь одновременной индукцией по сложности формул и термов определим:

- (i) $e.Q.(t \in T) \Leftarrow \langle e; t \rangle \in T$;
- (ii) $e.Q.(S \in T) \Leftarrow \langle e; S; \overset{\circ}{S} \rangle \in \overset{\circ}{T}$;
- (iii) $e.Q.(S \in T) \Leftarrow \overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{T}$.

Проверим, что все нужные термы можно построить в теории $\mathbb{ZF}\mathbb{I}2C^-$. Очевидно, проверять надо только термы из пп. (е)–(г).

(е) Пусть T есть $\cup X$. Пусть y и $\overset{\circ}{y}$ такие, что для некоторых z и $\overset{\circ}{z}$ выполняется: $\langle j_1 e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{z}$, $\langle j_2 e; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{X}$, $y \in z$ и $z \in X$. Тогда $y \in \cup X$ и $\overset{\circ}{z} \in \text{Rng Rng}(\overset{\circ}{X})$.

(ф) Пусть T есть $\mathfrak{P}(X)$. Пусть $qQ(y \subseteq X)$ и $y \subseteq X$. Тогда для любых z , $\overset{\circ}{z}$ и r : если $\langle r; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{y}$ и $z \in y$, то $\langle j_1 q(r); z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{X}$. Значит, $\overset{\circ}{z} \in \text{Rng Rng}(X)$. Таким образом, $\overset{\circ}{y} \subseteq (\omega \times \text{Rng Rng}(X)) \cup (\omega \times \omega)$.

(г) Пусть T есть $U_{\varphi, \psi}(X)$. Пусть e , y и $\overset{\circ}{y}$ такие, что $\langle j_1 e; \langle y; \overset{\circ}{y} \rangle \rangle \in \overset{\circ}{X}$ и $j_2 e Q \psi(y)$. Тогда $\langle y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \text{Rng}(\overset{\circ}{X})$. Значит, $y \in \text{Dom}(\text{Rng}(X))$ и $\overset{\circ}{y} \in \text{Rng}(\text{Rng}(\overset{\circ}{X}))$.

7. Теорема корректности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{T}^-$ это $\mathbb{ZF}\mathbb{I}2C^-$. Тогда если $\mathbb{T}^{-c} \vdash \varphi(x_1; \dots; x_n; p_1; \dots; p_m)$, где φ – это формула с параметрами $x_1, \dots, x_n$ сорта 1 и $p_1, \dots, p_m$ – сорта 0, то для любого вывода φ в теории $\mathbb{T}^{-c}$ эффективно строится такое число e , что в теории $\mathbb{T}^{-c}$ выводится следующая формула: для любых множеств $x_1, \dots, x_n$ и чисел $p_1, \dots, p_m$ число $\{e\}(p_1; \dots; p_m)$ определено и

$$\{e\}(p_1; \dots; p_m) Q[\varphi(x_1; x_2; \dots; x_n; p_1; \dots; p_m)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Реализуемость аксиом логики и $\mathbb{HA}$ проверяется точно так же, как в [3] (пункт 10 в определении реализуемости приспособлен для реализуемости правила Бернаиса). Для каждой аксиомы Цермело–Френкеля будем указывать реализующее эту аксиому число, а если эта аксиома начинается с $\exists$, то еще указываем соответствующий терм.

1) Аксиома бесконечности (Inf): $\exists x \forall d [d \in x]$. Пусть T есть ω . Тогда $\overset{\circ}{y} = \omega \times \omega$ и $\{e\}(n) = 0$.

2) Аксиомы пары (Pair): (i) $\forall x \forall y [\forall z (z \in \{x; y\} \equiv (z = x \vee z = y)) \wedge \forall a (a \notin \{x; y\})]$. Если T есть $\{x; y\}$, полагаем

$$\overset{\circ}{T} \Leftarrow \{\langle e; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \omega \times \{X; Y\} \times \{\overset{\circ}{X}; \overset{\circ}{Y}\} \mid eQ[z = X \vee z = Y]\}, \quad \{e\}(p) = p.$$

(ii) $\forall a \forall b [\forall c (c \in \{a; b\} \equiv (c = a \vee c = b)) \wedge \forall x (x \notin \{a; b\})]$. Если T есть $\{a; b\}$, полагаем: $\overset{\circ}{T} \Leftarrow \{\langle e; c \rangle \mid e \in \omega \wedge (c = a \vee c = b)\}$.

3) Аксиома суммы (Un):

$$\forall x [\forall y (y \in \cup x \equiv \exists z \in x)(y \in z) \wedge (\forall a (a \in \cup x \equiv \exists z \in x)(a \in z))].$$

Если T есть терм $\cup X$, то $\overset{\circ}{T}$ есть

$$\{\langle e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \mid \exists z \exists \overset{\circ}{z} [\langle j_1 e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{z} \wedge \langle j_2 e; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{X} \wedge y \in z \wedge z \in X]\};$$

далее, $\{e\}(p) = p$. Далее, $e = j(e_1; e_2)$, где $\{\{e_1\}(d)\}(p) = 0$ и $\{e_2\}(d) = 0$.

4) Аксиома степени (Pow): $\forall x \forall y [y \in \mathfrak{P}(x) \equiv (y \subseteq x)]$, где, как обычно,

$$z \subseteq x \Leftarrow \forall d (d \in z \rightarrow d \in x) \wedge \forall w (w \in z \rightarrow w \in x).$$

Если T есть $\mathfrak{P}(x)$, то $\overset{\circ}{T}$ есть $\{\langle e; y; \overset{\circ}{y} \rangle \mid y \subseteq x. \wedge .eQ(y \subseteq x)\}$. Положим $\{e\}(p) = p$.

5) Трансфинитная индукция (ТИ): $\forall x [(\forall y \in x) \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)] \rightarrow \forall x \varphi(x)$. Условие $e.Q.TI$ означает: для любого p , если

$$e.Q.\forall x [(\forall y \in x) \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)], \quad \forall x [(\forall y \in x) \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)],$$

то $!\{e\}(p)$ и $\{e\}(p).Q.\forall x \varphi(x)$, т.е. если

$$(i) \quad \forall x \forall \overset{\circ}{x}.p.Q.(\forall y \in x) \varphi(y) \rightarrow \varphi(x);$$

$$(ii) \quad \forall x (\forall y \in x) \varphi(y) \rightarrow \varphi(x),$$

то $!\{e\}(p)$ и $\forall x \forall \overset{\circ}{x} \{e\}(p).Q.\varphi(x)$.

Условие (i) означает: если для всех $y, \overset{\circ}{y}$ и s из $\langle s; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{x}$ и $y \in x$ следует, что $!\{q\}(s)$ и $\{q\}(s).Q.\varphi(y)$, то $!\{p\}(q)$ и $\{p\}(q).Q.\varphi(x)$.

Пусть $J(p) \simeq \{e\}(p) \simeq \{p\}(r)$, где $\{r\}(s) = J(p)$. Такое число существует по теореме о рекурсии.

Теперь, если $r.Q.(\forall y \in x) \varphi(y)$, то (по выбору p) имеем: $!\{p\}(r)$ и $\{p\}(r).Q.\varphi(x)$, т.е. $I(p).Q.\varphi(x)$. Таким образом, нам надо доказать, что для любого $y \in x$ выполняется: $r.Q.(y \in x \rightarrow \varphi(y))$, т.е. для любого s если $\langle s; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{x}$ и $y \in x$, то $!\{r\}(s)$ и $\{r\}(s).Q.\varphi(y)$. Но если $y \in x$, то $rk(y) < rk(x)$, и по гипотезе индукции имеем: $I(p).Q.\varphi(y)$, а значит, $\{r\}(s).Q.\varphi(y)$. Таким образом, $r.Q.(\forall y \in x) \varphi(y)$, а значит, $!\{p\}(r)$ и $\{p\}(r).Q.\varphi(x)$, т.е. $I(p).Q.\varphi(x)$. Таким образом, $I(p).Q.\forall x \varphi(x)$.

6) Аксиома подстановки в форме Collection (Coll):

$$\begin{aligned} & \forall z [z \in w \rightarrow \exists y \psi(z; y)] \wedge \forall d [d \in w \rightarrow \exists y \varphi(d; y)] \\ & \rightarrow \exists x [(\forall z \in w)(\exists y \in x) \psi(z; y) \wedge (\forall d \in w)(\exists y \in x) \varphi(d; y)]. \end{aligned}$$

Найдем число e , реализующее схему Coll. Это означает, что если натуральное число p реализует посылку Coll, то $\{e\}(p)$ определено и реализует ее заключение.

Рассуждаем в $\mathbb{T}^{-c}$: пусть w – произвольное множество. Тогда если выполняются следующие условия:

- 1) $j_1 p Q (\forall z \in w) (\exists y) \psi(z; y);$
- 2) $j_2 p Q (\forall d \in w) (\exists y) \varphi(d; y);$
- 3) $(\forall z \in w) (\exists y) \psi(z; y);$
- 4) $(\forall d \in w) (\exists y) \varphi(d; y),$

то число $\{e\}(p)$ определено и реализует заключение схемы Coll.

Условие 1) означает: для каждого множества z и для каждого d выполняется: если $\langle d; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{w}$ и $z \in w$, то $!\{j_1 p\}(d)$ и для некоторого y имеем $!\{j_1 p\}(d)$, $\psi(z; y)$ и $\{j_1 p\}(d) Q \psi(z; y)$ для некоторого $\overset{\circ}{y}$.

Условие 2) означает: для любых двух чисел q и d имеем: $\{j_2 p\}(d)$ определено и если $\langle q; d \rangle \in \overset{\circ}{w}$ и $d \in w$, то $\{\{j_2 p\}(d)\}(q)$ определено и реализует формулу $\varphi(d; y)$ для некоторых y и $\overset{\circ}{y}$, и эта формула истинна.

Заключение eQ Coll означает: $\{e\}(p) = j(e_1; e_2)$ и для некоторых x и $\overset{\circ}{x}$ имеем:

- (i) $e_1 Q \forall z (\dots)$, т.е. для всех $z, \overset{\circ}{z}$ и для каждого d если $\langle d; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{w}$ и $z \in w$, то $!\{e_1\}(d)$, $\{e_1\}(d) = j(e_{11}; e_{12})$ и для некоторых y и $\overset{\circ}{y}$ имеем: $\langle e_{11}; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{x}$ и $e_{12} Q \psi(z; y)$, а также $y \in x$ и $\psi(z; y)$;

- (ii) для каждого числа d выполняется $!\{e_2\}(d)$ и для каждого числа q имеем: если $\langle q; d \rangle \in \overset{\circ}{w}$ и $d \in w$, то число $\{\{e_2\}(d)\}(q)$ определено, $\langle j_1\{\{e_2\}(d)\}(q); d \rangle \in \overset{\circ}{x}$ и $j_1\{\{e_2\}(d)\}(q)Q\varphi(d; y)$.

Пользуясь схемой Coll внешним образом, соберем все y и $\overset{\circ}{y}$, существующие в силу условий 1 и 2, в множества x_1 и S соответственно. Полагаем

$$\overset{\circ}{x}_1 \Leftarrow \{\langle d; y; \overset{\circ}{y} \rangle \mid y \in x, \overset{\circ}{y} \in S, (\exists z \in w)(\exists \overset{\circ}{y} \in \text{Rng Rng}(\overset{\circ}{w}))[\{j_1p\}(d)Q\psi(z; y) \wedge \psi(z; y)]\}.$$

Тогда если $\langle d; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in w$ и $z \in w$, то по условию 1) $!\{j_1p\}(d)$ и для некоторых y и $\overset{\circ}{y}$ выполняется: $\{j_1p\}(d)Q[\psi(z; y) \wedge \psi(z; y)]$. По построению тогда $\langle d; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{x}_1$. Полагаем $e_{11} := d$ и $e_{12} := \{j_1p\}(d)$, т.е. $\{e_1\}(d) := j(d; \{j_1p\}(d))$.

Далее, полагаем

$$\overset{\circ}{x}_2 \Leftarrow \{\langle d; y; \overset{\circ}{y} \rangle \mid y \in x, \overset{\circ}{y} \in S, (\exists a)[(\{\{j_2p\}(a)\}(d))Q\varphi(a; y) \wedge \varphi(a; y)]\}.$$

Тогда если $\langle d; a \rangle \in w$ и $a \in w$, то по условию 2) $!\{\{j_2p\}(a)\}(d)$ и для некоторых y и $\overset{\circ}{y}$ выполняется: $(\{\{j_2p\}(a)\}(d)Q\varphi(a; y) \wedge \varphi(a; y))$. По построению $\langle d; y; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{x}_2$. Полагаем $e_{21} := d$ и $e_{22} := \{\{j_2p\}(a)\}(d)$, т.е. $\{e_1\}(d) := j(d; \{\{j_2p\}(a)\}(d))$.

Напомним, что $\{e\}(p) = j(e_1; e_2)$. Остается положить $\overset{\circ}{x}_1 \Leftarrow \overset{\circ}{x}_1 \cup \overset{\circ}{x}_2$.

Пусть $\{e_1\}(d) := j(0; \{j_1p\}(d))$. Очевидно, условие (i) выполняется. Проверим условие (ii): для любых двух чисел d и q если $\langle q; d \rangle \in \overset{\circ}{w}$ и $d \in w$, то найдется (в силу условия 2)) такое $y \in x$, что для любого числа d

$$!\{\{j_2p\}(d)\}(q), \quad \{\{j_2p\}(d)\}(q)Q\varphi(d; y), \quad \varphi(d; y).$$

Тогда $\langle 0; \overset{\circ}{y} \rangle \in \overset{\circ}{x}$. Полагаем $j_1\{\{j_2\}(d)\}(q) := 0$, $j_2\{\{j_2\}(d)\}(q) := \{\{j_2p\}(d)\}(q)$. Очевидно, (ii) при этом выполняется.

7) Аксиому выделения (Sep):

$$\forall x \exists y [\forall u (u \in y \equiv (u \in x) \wedge \varphi(u)) \wedge \forall z (z \in y \equiv (z \in x) \wedge \psi(z))]$$

мы заменяем на следующую схему, из которой легко следует Sep.

Abstr. $\forall z [z \in U_{\varphi, \psi}(V) \equiv (z \in v) \wedge \psi(z)]$ и $\forall d [d \in U_{\varphi, \psi}(V) \equiv (d \in v) \wedge \varphi(d)]$.

(Заметим, что эта схема эквивалентна Sep в присутствии схемы Coll – см. [11; с. 8]).

Найдем число e , реализующее схему Abstr. Рассуждаем в $\mathbb{T}^{-c}$: условие eQ Abstr означает, что выполняются следующие условия:

(0) $e = j(e_1; e_2)$;

(1) для любого z имеем: $e_1Q[z \in U_{\varphi, \psi}(V) \equiv (z \in v) \wedge \psi(z)]$, т.е. выполняются следующие условия:

(1.0) $e_1 = j(e_{11}; e_{12})$;

(1.1) для любого p , если $pQ(z \in U)$ и $z \in U$, то

$$!\{e_{11}\}(p), \quad \{e_{11}\}(p)Q[(z \in V) \wedge \psi(z)],$$

т.е. для любого p если $\langle d; z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{U}$ и $z \in U$, то

$$!\{e_{11}\}(p), \quad \{e_{11}\}(p)Q[(z \in V) \wedge \psi(z)];$$

полагаем: $\{e_{11}\}(p) = p$;

(1.2) для любого p если $pQ[(z \in V) \wedge \psi(z)]$, $z \in v$ и $\psi(z)$, то

$$!\{e_{12}\}(p), \quad \{e_{12}\}(p)Q(z \in U),$$

т.е. для любого p , если $pQ[(z \in V) \wedge \psi(z)]$, $z \in V$ и $\psi(z)$, то

$$!\{e_{12}\}(p), \quad \langle \{e_{12}\}(p); z; \overset{\circ}{z} \rangle \in \overset{\circ}{U};$$

полагаем $\{e_{12}\}(p) = p$.

(2) для любого натурального числа d выполняется:

$$!\{e_2\}(d), \{e_2\}(d) = j(e_{21}; e_{22}), \quad \{e_2\}(d)Q[d \in U_{\varphi, \psi}(V) \equiv (d \in V) \wedge \varphi(d)],$$

т.е.

(2.1) для любого p , если $pQ(d \in U)$ и $d \in U$, то

$$!\{e_{21}\}(p), \quad \{e_{21}\}(p)Q(d \in V) \wedge \varphi(d),$$

т.е. для любого p , если $\langle p; d \rangle \in \overset{\circ}{U}$ и $d \in U$, то

$$!\{e_{21}\}(p), \quad \{e_{21}\}(p)Q[(d \in V) \wedge \varphi(d)];$$

полагаем $\{e_{21}\}(p) = p$.

(2.2) для любого числа p , если $\{e_{22}\}(p)Q[(d \in V) \wedge \varphi(d)]$, $(d \in V)$ и $\varphi(d)$, то $\langle p; \{e_{22}\}(p) \rangle \in \overset{\circ}{U}$; полагаем $\{e_{22}\}(p) = p$.

Отметим, что все рассуждения велись в теории T^{-c} .

8. Докажем теперь сформулированные выше свойства эффе́ктивности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть T^{-} – это $\mathbb{ZF}I2C^{-}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) DP: пусть $\varphi \vee \psi$ – формула языка теории T^{-} без параметров по числам. Если $T^{-} \vdash \varphi \vee \psi$, то $T^{-} \vdash \varphi$ или $T^{-} \vdash \psi$.

2) EP: пусть $\exists a \varphi(a)$ – формула языка теории T^{-} без параметров по числам. Если $T^{-} \vdash \exists a \varphi(a)$, то (эффе́ктивно по выводу) строится такое натуральное n , что $T^{-} \vdash \varphi(n)$.

3) CR: пусть $\forall a \exists b \varphi(a; b)$ – формула языка теории T^{-} без параметров по числам. Если $T^{-} \vdash \forall a \exists b \varphi(a; b)$, то можно эффе́ктивно по выводу построить такое число e , что $T^{-} \vdash \forall a \varphi(a; \{e\}(a))$.

4) MR: пусть $\forall a \varphi(a)$ – формула языка теории T^{-} без параметров по числам. Тогда если $T^{-} \vdash \forall a (\varphi(a) \vee \neg \varphi(a))$ и $T^{-} \vdash \neg \neg \exists a \varphi(a)$, то $T^{-} \vdash \exists a \varphi(a)$, причем вывод заключения правила Маркова эффе́ктивно строится по выводам посылок.

5) UR: пусть $T^{-} \vdash \forall x \exists n \varphi(x; n)$, где $\varphi(x; n)$ не имеет числовых параметров, кроме n . Тогда $T^{-} \vdash \exists n \forall x \varphi(x; n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $T^{-} \vdash \varphi \vee \psi$, где $\varphi \vee \psi$ – формула языка теории T^{-} без параметров по числам. Тогда $T^{-c} \vdash \varphi^c \vee \psi^c$, где формула ϑ^c получается из формулы ϑ заменой всех ее параметров по множествам на свободные константы. По

теореме 1 по каждому выводу формулы $\varphi \vee \psi$ эффективно строится такое число e , что $T^c \vdash eQ(\varphi^c \vee \psi^c)$. Это означает по определению, что

$$\mathbb{T}^{-c} \vdash [j_1 e = 0 \rightarrow \varphi^c \wedge j_2 e Q \varphi^c] \wedge [\neg j_1 e = 0 \rightarrow \psi^c \wedge j_2 e Q \psi^c].$$

Если $j_1 e = 0$, то $\mathbb{T}^{-c} \vdash [\varphi^c \wedge j_2 e Q \varphi^c]$, в частности, $\mathbb{T}^{-c} \vdash \varphi^c$, а потому и $\mathbb{T}^- \vdash \varphi$. Аналогично, если $\neg j_1 e = 0$, то $\mathbb{T}^- \vdash \psi$.

2) Пусть $\mathbb{T}^{-c} \vdash \exists a \varphi(a)$, где формула $\exists a \varphi(a)$ не содержит параметров по числам. Тогда $T^c \vdash \exists a \varphi^c(a)$. По теореме 1 эффективно по его выводу строится такое натуральное число r , что $\mathbb{T}^{-c} \vdash rQ \exists a \varphi^c(a)$. По определению формулы $eQ\varphi$ из п. 8 это означает, что $\mathbb{T}^{-c} \vdash j_2 r Q \varphi^c(j_1 r) \wedge \varphi^c(j_1 r)$. Отсюда следует, что $\mathbb{T}^{-c} \vdash \varphi^c(j_1(r))$, а тогда и $\mathbb{T}^- \vdash \varphi(j_1(r))$.

3) Пусть $\mathbb{T}^- \vdash \forall a \exists b \varphi(a; b)$, где формула $\forall a \exists b \varphi(a; b)$ не содержит параметров по числам. Тогда $\mathbb{T}^{-c} \vdash \forall a \exists b \varphi^c(a; b)$. По теореме 1 тогда найдется (эффективно по выводу) такое число r , что $\mathbb{T}^{-c} \vdash rQ \forall a \exists b \varphi^c(a; b)$. По определению это означает, что

$$\mathbb{T}^{-c} \vdash \forall d [! \{r\}(d) \wedge j_2(\{r\}(d)) Q \varphi^c(d; j_1(\{r\}(d))) \wedge \varphi^c(d; j_1(\{r\}(d)))].$$

В частности, имеем: $\mathbb{T}^{-c} \vdash \forall d [! \{r\}(d) \wedge \varphi^c(d; j_1(\{r\}(d)))]$. Пусть $\{e\}(d) \Leftarrow j_1(\{r\}(d))$. Тогда $\mathbb{T}^{-c} \vdash \forall a \varphi^c(a; \{e\}(a))$, а значит, $\mathbb{T}^- \vdash \forall a \varphi(a; \{e\}(a))$.

4) Пусть $\mathbb{T}^- \vdash \forall a (\varphi \vee \neg \varphi)$ и $\mathbb{T}^- \vdash \neg \neg \exists a \varphi(a)$. Тогда

$$\mathbb{T}^{-c} \vdash \forall a (\varphi^c(a) \vee \neg \varphi^c(a)), \quad \mathbb{T}^{-c} \vdash \neg \neg \exists a \varphi^c(a).$$

Полагаем $\psi(a; b) \Leftarrow \varphi^c(a) \wedge (b = 0) \vee \neg \varphi^c(a) \wedge (b = 1)$.

В силу первого условия имеем: $\mathbb{T}^{-c} \vdash \forall a \exists b \psi(a; b)$. По CR найдется (эффективно по выводу формулы $\forall a \exists b \psi(a; b)$) такое m , что $\mathbb{T}^{-c} \vdash \forall a \psi(a; \{m\}(a))$. Очевидно, что

$$\mathbb{T}^{-c} \vdash \varphi^c(a) \equiv (\{m\}(a) = 0), \quad \mathbb{T}^{-c} \vdash \neg \varphi^c(a) \equiv (\{m\}(a) = 1).$$

Отсюда (в силу второго условия) имеем: $\mathbb{T}^- \vdash \neg \neg \exists a (\{m\}(a) = 0)$, откуда

$$\mathbb{T}^- \vdash \neg \neg \exists a (\{m\}(a) = 0).$$

По слабому правилу Маркова (для $\mathbb{T}^{-c}$) получаем: $\mathbb{T}^- \vdash \exists a (\{m\}(a) = 0)$, т.е. $\mathbb{T}^- \vdash \exists a \varphi(a)$.

5) Пусть $\mathbb{T}^- \vdash \forall x \exists d \varphi(x; d)$, где $\varphi(x; d)$ не имеет числовых параметров, кроме d . Тогда $\mathbb{T}^- \vdash \exists d \varphi(x; d)$, откуда по п. 2 существует (эффективно по выводу) такое натуральное число d , что $\mathbb{T}^- \vdash \varphi(x; d)$, откуда и $\mathbb{T}^- \vdash \forall x \varphi(x; d)$.

9. Замечание о формальном тезисе Чёрча. Рассмотрим теперь следующую схему СТ (формальный тезис Чёрча): $\forall n \exists m \varphi(n; m) \rightarrow \exists e \forall n \varphi(\{e\}(n); n)$. Проверим, что тезис Чёрча реализуем в $\mathbb{T}^-$.

Условие eQ СТ означает: для любого p , если выполняются условия: для любого d $! \{p\}(d)$, $\{p\}(d) = j(d_1; d_2)$, $d_2 Q \varphi(d; d_1)$ и $\varphi(d; d_1)$, т.е. $j_2(\{p\}(d)) Q \varphi(d; j_1(\{p\}(d)))$ и $\varphi(d; j_1(\{p\}(d)))$, то $! \{e\}(p)$, $\{e\}(p) = j(p_1; p_2)$ и для любого числа d выполняется: $! \{p_2\}(d)$, $\{p_2\}(d) = j(d_1; d_2)$, $d_2 Q [(\{p_1\}(d) = d_1) \wedge \varphi(d; d_1)]$, $\{p_1\}(d) = d_1$ и $\varphi(d; d_1)$, т.е. $d_2 = j(d_{21}; d_{22})$, $d_{21} Q [\{p_1\}(d) = d_1]$ и $d_{22} Q \varphi(d; d_1)$. Пусть $d_{22} := j_1(\{p\}(d)) = d_1$.

Далее, условие $d_{21}Q[\{p_1\}(d) = d_1]$ означает: $d_{21}Q \exists f [T_1(p_1; d; f) \wedge (U(f) = d_1)]$, т.е., что выполняется $d_{21} = j(d_{211}; d_{212})$, $d_{212} = j(d_{2121}; d_{2122})$, $d_{2121}QT_1(p_1; d; d_{211})$ и $d_{2122}Q(U(d_{211}) = d_1)$.

Полагаем $d_{212} := j(0; 0)$, $d_{211} := \min\{q | U(q) = d_1\}$.

Таким образом, тезис Чёрча реализуем в $\mathbb{T}^-$, а потому к теории $\mathbb{T}^-$ можно добавить тезис Чёрча СТ, при этом утверждения 1–3 и 5 теоремы 2 из п. 8 сохраняются.

10. Замечание о принципе Маркова. Рассмотрим теперь следующий *принцип Маркова* (М): $\forall n(\varphi(n) \vee \neg\varphi(n)) \wedge \neg\neg\exists n \varphi(n) \rightarrow \exists n \varphi(n)$. Проверим, что принцип Маркова реализуем в $\mathbb{T}^- + \text{М}$. Условие $e\text{QM}$ означает: для любого числа p , если p реализует посылку принципа М, то $\{e\}(p)$ определено и реализует заключение. Это значит, что для любого числа p , если выполняются следующие условия:

- (0) $p = j(p_1; p_2)$;
- (1) $p_1Q \forall n(\varphi(n) \vee \neg\varphi(n))$, т.е. для любого числа d выполняются условия: $!\{p_1\}(d)$, $\{p_1\}(d) = j(p_{11}; p_{12})$, $p_{11} = 0 \rightarrow j_1p_{12}Q\varphi(d) \wedge \varphi(d)$ и $p_{11} \neq 0 \rightarrow j_2p_{12}Q\neg\varphi(d) \wedge \neg\varphi(d)$.
- (2) $p_2Q\neg\neg\exists n \varphi(n)$, т.е. если $\neg\neg\exists n \varphi(n)$, то $\{e\}(p)$ определено и $\{e\}(p)Q \exists n \varphi(n)$, т.е. $\{e\}(p) = j(p_1; p_2)$, $p_2Q\varphi(p_1)$ и $\exists n \varphi(n)$.

Из (1) и условия $\forall n(\varphi(n) \vee \neg\varphi(n))$ легко следует, что $j_1(\{p_1\}(d)) = 0 \rightarrow \varphi(d)$ и $j_1(\{p_1\}(d)) \neq 0 \rightarrow \neg\varphi(d)$. Поэтому, если $\forall d [j_1(\{p_1\}(d)) \neq 0]$, то $\forall d \neg\varphi(d)$, вопреки условию $\neg\neg\exists n \varphi(n)$. По принципу M^- отсюда следует, что $\exists d [j_1(\{p_1\}(d)) = 0]$. Ясно, что

$$\exists n [j_1(\{p_1\}(n)) = 0] \rightarrow \exists n [j_1(\{p_1\}(n)) = 0] \wedge (\forall m < n) \neg j_1(\{p_1\}(m)) = 0]$$

– Π_2^0 -формула, выводимая классически, а значит (см. [3]) и интуиционистски. Значит, в $\mathbb{HA}$ выводимо

$$\exists n [j_1(\{p_1\}(n)) = 0] \wedge (\forall m < n) \neg j_1(\{p_1\}(d)) = 0].$$

Полагаем $\{e\}(p) := j_1j_2(\min\{d | j_1(p_1(d)) = 0\})$.

Таким образом, принцип Маркова реализуем в $\mathbb{T}^- + \text{М}^-$, а потому к теории $\mathbb{T}^-$ можно добавить М, при этом утверждения 1–3 и 5 теоремы 2 сохраняются.

11. Замечание о принципе (UP) $\forall x \exists a \varphi(x; a) \rightarrow \exists a \forall x \varphi(x; a)$. Рассуждаем в теории $\mathbb{T}^-$. Условие $e\text{QUP}$ означает: для любого натурального p , если выполнено $pQ \forall x \exists a \varphi(x; a)$, то $!\{e\}(p)$ и $\{e\}(p)Q \exists a \forall x \varphi(x; a)$.

Условие $pQ \forall x \exists a \varphi(x; a)$ означает: для любого x имеем: $j_2pQ\varphi(x; j_1p)$ и $\varphi(x; j_1p)$.

Условие $\{e\}(p)Q \exists a \forall x \varphi(x; a)$ означает: $j_2\{e\}(p)Q\varphi(x; j_1\{e\}(p))$ и $\varphi(x; j_1\{e\}(p))$ для любого x . Пусть $\{e\}(p) = p$. Таким образом, принцип UP реализуем в $\mathbb{T}$.

12. Замечание о принципе IP и правиле IPR. Рассмотрим *принцип IP*:

$$(\neg\vartheta \rightarrow \exists x \psi(x)) \rightarrow \exists x [\neg\vartheta \rightarrow \psi(x)].$$

Условие $e\text{QIP}$ означает: для любого p , если $pQ(\neg\vartheta \rightarrow \exists x \psi(x))$ и $(\neg\vartheta \rightarrow \exists x \psi(x))$, то $!\{e\}(p)$ и $\{e\}(p)Q \exists x [\neg\vartheta \rightarrow \psi(x)]$.

Условие, что число p реализует посылку, означает: для любого q если $\neg[(qQ\vartheta) \wedge \vartheta]$ и $\neg\vartheta$, то $!\{p\}(q)$ и для некоторого x выполняется: $\{p\}(q)Q\psi(x)$.

Условие, что $\{e\}(p)$ реализует заключение, означает: для некоторого x выполняется:

$$\{e\}(p)Q(\neg\vartheta \rightarrow \psi(x))(\neg\vartheta \rightarrow \exists x \psi(x)),$$

т.е. для любого числа q , если $\neg[(qQ\vartheta) \wedge \vartheta]$ и $\neg\vartheta$, то $!\{\{e\}\{p\}\}(q)$, $\{\{e\}\{p\}\}(q)Q\psi(x)$ и $(\neg\vartheta \rightarrow \psi(x))$. Полагаем $\{e\}(p) := p$.

Таким образом, принцип IP реализуем в $\mathbb{T}^-$. Отсюда следует, что следующее правило допустимо в теории $\mathbb{T}^-$: если $\mathbb{T}^- \vdash (\neg\vartheta \rightarrow \exists a \psi(a))$, то $\mathbb{T}^- \vdash \exists a [\neg\vartheta \rightarrow \psi(a)]$ (правило IPR).

13. Перенесем все утверждения теоремы 2 на экстенциональную теорию.

Все дальнейшие рассуждения основаны на следующем предложении. Пусть $\mathbb{T}$ — это $\mathbb{ZFI2C}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существует интерпретация $\mathbb{T}$ в $\mathbb{T}^-$, имеющая следующие свойства:*

- (a) Если $\mathbb{T} \vdash \varphi$, то $\mathbb{T}^- \vdash \varphi^*$;
- (b) $\mathbb{T} \vdash \varphi \equiv \varphi^*$;
- (c) перевод $\varphi \rightarrow \varphi^*$ коммутирует со всеми логическими связками.

Пусть формула φ^* получается из формулы φ заменой всюду символа “ $\in^1$ ” на “ $\in^*$ ”, определенным следующим образом: $x \in^* y \Leftrightarrow (\exists z \in y)[x \sim z]$, где

$$x \sim y \Leftrightarrow (\forall u \in x)(\exists v \in y)[u \sim v] \wedge (\forall u \in y)(\exists v \in x)[u \sim v].$$

Отношение $x \sim y$, заданное выше по индукции, можно задать в теории $\mathbb{T}^-$ явно формулой, так что для любого транзитивного множества x ограничение $\sim_x \Leftrightarrow |x$ отношения $\sim$ на множестве x является множеством. А именно, $\sim_x$ — это пересечение всех бинарных отношений на множестве x , удовлетворяющих индуктивным условиям из определения отношения $\sim$. Нам нужна схема Collection, чтобы доказать, что всякое множество x имеет транзитивное замыкание $TC(x)$. Тогда определяем

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall z \in \mathfrak{P}(TC(\{x; y\})^2)[I(z; TC(\{x; y\})) \rightarrow \langle x; y \rangle \in z] \wedge \forall a (a \in x \equiv a \in y),$$

где формула $I(z; w)$ говорит, что отношение z удовлетворяет индуктивным условиям на транзитивном множестве w .

ЛЕММА 1. *В теории $\mathbb{T}^-$ доказуемо*

- (1) $x \sim x$;
- (2) $x \sim y \rightarrow y \sim x$;
- (3) $(x \sim y) \wedge (x \sim y) \rightarrow x \sim z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По ϵ -индукции.

ЛЕММА 2. *Имеем $\mathbb{T}^- \vdash \forall x \forall y (x \in y \rightarrow x \in^* y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 имеем $x \sim x$.

ЛЕММА 3. *Имеем $\mathbb{T}^- \vdash (u \sim v) \equiv \forall x (x \in^* u \equiv x \in^* v) \wedge \forall a (a \in u \equiv a \in v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$. Пусть $u \sim v$, и пусть еще $x \in^* u$. Фиксируем $y \in u$ такое, что $x \sim y$. Так как еще $u \sim v$, найдется такое $z \in v$, что $y \sim z$. Но тогда $x \sim z$ по лемме 1, (ii). Таким образом, $x \in^* v$: по симметрии получаем $\forall x (x \in^* u \equiv x \in^* v)$.

$\Leftarrow$. Пусть $\forall x (x \in^* u \equiv x \in^* v)$ и $\forall a (a \in u \equiv a \in v)$. Если $x \in u$, то $x \in^* u$ по лемме 2, откуда $x \in^* v$, т.е. $x \sim y$ для некоторого $y \in v$. Таким образом, $(\forall x \in u) (\exists y \in v) [x \sim y]$ и по симметрии получаем $x \sim y$.

ЗАМЕЧАНИЕ. $\mathbb{T}^- \vdash (u \sim v) \equiv (\forall x \in u)(x \in^* v) \wedge (\forall y \in v)(y \in^* u)$.

Для доказательства используем леммы 2 и 3.

ЛЕММА 4. Имеем (Ext):

$$\mathbb{T}^- \vdash \forall x \forall y \forall z [\forall u (u \in^* x \equiv u \in^* y) \wedge \forall a (a \in x \equiv a \in y) \wedge (x \in^* z) \rightarrow y \in^* z].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 достаточно доказать, что

$$\forall x \forall y \forall z [(x \sim y) \wedge (x \in^* z) \rightarrow (y \in^* z)].$$

Пусть $x \sim y$ и $x \in^* z$, т.е. $x \sim u$ для некоторого $u \in z$. Тогда $y \sim u$ по лемме 1, (ii), (iii) и $u \in z$, т.е. $y \in^* z$.

ЛЕММА 5. Имеем $\mathbb{T}^- \vdash (x \sim y) \rightarrow (\varphi^*(u \mid x) \equiv \varphi^*(u \mid x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению формулы φ . Если формула φ имеет вид $x \in z$, используем лемму 4. Если формула φ имеет вид $z \in x$, используем лемму 3.

ЛЕММА 6. Имеем (Inf): $\mathbb{T}^- \vdash \exists x \forall a (a \in x)$.

Для доказательства используем аксиому Inf теории $\mathbb{T}^-$.

ЛЕММА 7. Имеем (Pair): $\mathbb{T}^- \vdash \forall x \forall y \forall a \forall b \exists z [(x \in^* z) \wedge (y \in^* z) \wedge (a \in z) \wedge (b \in z)]$.

Для доказательства используем аксиому Pair и лемму 2.

ЛЕММА 8. Имеем (Un):

$$\mathbb{T}^- \vdash \forall x \exists y \forall z [\forall a (a \in z \wedge .z \in^* x \rightarrow a \in y) \wedge \forall w (w \in^* z \wedge .z \in^* x \rightarrow w \in^* y)].$$

Для доказательства используем аксиому Un и леммы 3 и 4.

ЛЕММА 9. Имеем (Pow):

$$\mathbb{T}^- \vdash \forall x \exists y \forall z [\forall u (u \in^* z \rightarrow u \in^* x) \wedge \forall a (a \in z \rightarrow a \in x) \rightarrow z \in y].$$

Для доказательства используем аксиому Pow и лемму 2.

ЛЕММА 10. Имеем (TI): $\mathbb{T}^- \vdash \forall x [(\forall y \in^* x) \varphi^*(y) \rightarrow \varphi^*(x)] \rightarrow \forall x \varphi^*(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим посылку, т.е. $\forall x [(\forall y \in^* x) \varphi^*(y) \rightarrow \varphi^*(x)]$. Введем обозначение $\psi(u) \Leftarrow \forall z [z \sim u \rightarrow \varphi^*(z)]$ и докажем, что $\forall x [(\forall y \in x) \psi(y) \rightarrow \psi(x)]$, откуда по схеме TI получаем $\forall x \psi(x)$, а значит, и $\forall x \varphi^*(x)$.

ЛЕММА 11. *Имеем (Coll):*

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^- \vdash \forall z [z \in w \rightarrow \exists y \psi(z; y)] \wedge \forall d [d \in w \rightarrow \exists y \varphi(d; y)] \\ \rightarrow \exists x [(\forall z \in w)(\exists y \in x) \psi(z; y) \wedge (\forall d \in w)(\exists y \in x) \varphi(d; y)]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используем схему Collection, леммы 2 и 5.

ЛЕММА 12. *Имеем (Sep):*

$$\mathbb{T}^- \vdash \forall u \exists x [\forall y (y \in^* x \equiv (y \in^* u) \wedge \psi^*(u)) \wedge \forall a (a \in x \equiv (a \in u) \wedge \varphi^*(a))].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используем схему Separation и лемму 5.

тобы завершить доказательство утверждения 1 заметим, что п. (с) выполняется по построению, а значит, перевод сохраняет выводы. Таким образом, получаем пункт (а): если $\mathbb{T} \vdash \varphi$, то $\mathbb{T}^- \vdash \varphi^*$.

Остается проверить пункт (b): $\mathbb{T} \vdash \varphi \equiv \varphi^*$.

ЛЕММА 13. *Имеем:*

- (a) $\mathbb{T}^- \vdash \forall x \forall y (x \in^* y \equiv x \in y)$;
- (b) $\mathbb{T}^- \vdash \forall x \forall y (x \sim y \equiv \forall z [(z \in x \equiv z \in y) \wedge \forall a (a \in x \equiv a \in y)])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывается одновременной ϵ -индукцией.

ЛЕММА 14. *Для любой формулы φ $\mathbb{T} \vdash \varphi \equiv \varphi^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по построению формулы φ .

Из утверждения 1 легко получается следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА 3 (Свойства эффективности экстенциональной теории множеств).

1) DP. Пусть $\varphi \vee \psi$ – формула языка теории $\mathbb{T}$ без параметров по числам. Если $\mathbb{T} \vdash \varphi \vee \psi$, то $\mathbb{T} \vdash \varphi$ или $\mathbb{T} \vdash \psi$.

2) EP. Пусть $\exists a \varphi(a)$ – формула языка теории $\mathbb{T}$ без параметров по числам. Если $\mathbb{T} \vdash \exists a \varphi(a)$, то (эффективно по выводу) строится такое натуральное n , что $\mathbb{T} \vdash \varphi(n)$.

3) CR. Пусть $\forall a \exists b \varphi(a; b)$ – формула языка теории $\mathbb{T}$ без параметров по числам. Если $\mathbb{T} \vdash \forall a \exists b \varphi(a; b)$, то можно эффективно по выводу построить такое число e , что $\mathbb{T} \vdash \forall a \varphi(a; \{e\}(a))$.

4) MR. Пусть $\forall a \varphi(a)$ – формула языка теории $\mathbb{T}$ с любым набором параметров. Тогда если $\mathbb{T} \vdash \forall a (\varphi(a) \vee \neg \varphi(a))$ и $\mathbb{T} \vdash \neg \neg \exists a \varphi(a)$, то $\mathbb{T} \vdash \exists a \varphi(a)$, причем вывод заключения правила Маркова эффективно строится по выводам посылок.

5) UR. Пусть $\mathbb{T} \vdash \forall x \exists n \varphi(x; n)$, где $\varphi(x; n)$ не имеет числовых параметров, кроме n . Тогда $\mathbb{T} \vdash \exists n \forall x \varphi(x; n)$.

Автор благодарен проф. В. Х. Хаханяну за постоянное внимание и ценные советы. Автор благодарен также проф. В. А. Любецкому и А. В. Селиверстову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Friedman, “The consistency of classical set theory relative to a set theory with intuitionistic logic”, *J. Symbolic Logic*, **38**:2 (1973), 315–319.
- [2] W. C. Powell, “Extending Gödel’s negative interpretation to ZF”, *The Journal of Symbolic Logic*, **40**:2 (June 1975), 221–229.
- [3] H. Friedman, “Classically and intuitionistically provably recursive functions”, *Higher Set Theory*, Lecture Notes in Math., **669**, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 21–27.
- [4] R. J. Grayson, “Heyting-valued models for intuitionistic set theory”, *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Math., **753**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 402–414.
- [5] J. Myhill, “Some properties of intuitionistic Zermelo–Fraenkel set theory”, *Cambridge Summer School in Mathematical Logic*, Lecture Notes in Math., **337**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 206–231.
- [6] H. M. Friedman, A. Ščedrov, “The lack of definable witnesses and provably recursive functions in intuitionistic set theories”, *Adv. in Math.*, **57**:1 (1985), 1–13.
- [7] В. Х. Хаханян, “Правило Маркова допустимо в интуиционистской теории множеств”, *Логические исследования*, **3**, Наука, М., 1995, 174–177.
- [8] H. Friedman, “Some applications of Kleene’s method for intuitionistic systems”, *Cambridge Summer School in Mathematical Logic*, Lecture Notes in Math., **337**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 113–170.
- [9] В. Х. Хаханян, “Теория множеств и тезис Чёрча”, *Исследования по теории множеств и неклассическим логикам*, Наука, М., 1979, 198–208.
- [10] Дж. Барвайс, *Справочная книга по математической логике. Ч. 4. Теория доказательств и конструктивная математика*, Наука, М., 1982.
- [11] M. J. Beeson, “Principles of continuous choice and continuity of functions in formal systems for constructive mathematics”, *Ann. Math. Logic*, **12**:3 (1977), 249–332.
- [12] M. Beeson, “Continuity in intuitionistic set theories”, *Logic Colloquium 78*, Stud. Logic Foundations Math., **97**, North-Holland, Amsterdam, 1979, 1–52.
- [13] В. Х. Хаханян, “Независимость принципа двойного дополнения от схемы собирания в теории множеств с интуиционистской логикой”, *Логические исследования*, **5**, Наука, М., 1998, 160–162.
- [14] В. Х. Хаханян, “Независимость аксиомы «collection» от принципа «DC» в интуиционистской теории множеств”, *Изв. вузов. Матем.*, 1993, № 2, 81–83.
- [15] В. А. Любецкий, “Теоремы переноса и алгебра модальных операторов”, *Алгебра и логика*, **36**:3 (1997), 282–303.
- [16] В. Х. Хаханян, “Независимость частного случая аксиомы выбора в интуиционистской теории множеств”, *УМН*, **52**:4 (1997), 219–220.
- [17] А. Г. Владимиров, “Правило Чёрча в интуиционистской теории множеств”, *Сб. научн. трудов Математического факультета Московского городского педагогического университета*, МГПУ, М., 2006, 176–190.
- [18] A. G. Drăgalin, *Mathematical Intuitionism. Introduction to the Proof Theory*, Transl. Math. Monogr., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

А. Г. Владимиров

Государственная классическая академия им. Маймонида,
г. Москва
E-mail: a.g.vladimirov@mail.ru

Поступило

22.08.2009

Исправленный вариант

07.11.2009