Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Белев, Н. А. Тюрин, О неторических слоениях на лагранжевы торы торических многообразий Фано, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 48–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:59:40

О неторических слоениях на лагранжевы торы торических многообразий Фано

С. А. Белев, Н. А. Тюрин

Предложена конструкция расслоения торического многообразия Фано на лагранжевы торы, основанная на рассмотрении линейных подсистем систем дивизоров различных степеней, неподвижных относительно гамильтоновых действий выделенных функций-символов. Показано, что известные примеры слоений (слоение Клиффорда, пример Д. Ору) являются частными случаями этой конструкции. В качестве приложений построены неторические лагранжевы слоения на торы двумерной квадррики и проективного пространства.

Библиография: 12 названий.

Введение. Лагранжева геометрия алгебраических многообразий является на сегодняшний день важной и интересной задачей. Абстрактный интерес к вопросу о том, какие подмногообразия реализуются в качестве лагранжевых относительно подходящей элеровой формы ходжева типа на данном алгебраическом многообразии, дополняется конкретным интересом к этому же вопросу в свете возникших недавно новых подходов к Зеркальной Симметрии и Геометрическому Квантованию. Программа, предложенная Концевичем и получившая название Гомологической Зеркальной Симметрии, предполагает двойственность производных категорий когерентных пучков и лагранжевых подмногообразий на алгебраических многообразиях-партнерах (см. [1], [2]). С другой стороны, лагранжев подход к геометрическому квантованию, предложенный А. Н. Тюриним и развитый в [3], [4], также требует решения того же вопроса, будучи примененным к конкретному алгебраическому многообразию.

Наш интерес к лагранжеву подходу в геометрическом квантовании диктует ограничение только случаем ориентируемых подмногообразий, поэтому далее мы будем говорить исключительно о лагранжевых торах и их классах по модулю гамильтоновой изотопии. Этот предмет ограничивается на сегодняшний день набором наблюдений и примеров. Главным примером является случай торических многообразий Фано; для $\mathbb{CP}^2$ – это классическое слоение Клиффорда с вырождением на трех прямых, природа которого объясняется в терминах торической геометрии. Далее, в работе [5] был предложен первый неторический пример для $\mathbb{CP}^2$ с вырождением на приводимой кубике, состоящей из коники и прямой. Кроме этого есть ссылки

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00095, 08-01-00392 и 07-01-92211).

на работу Чеканова и Шленка, посвященную лагранжевым торам на $\mathbb{CP}^2$, которая, однако, до сих пор недоступна.

Пристальное изучение конструкции Ору в терминах гамильтоновых систем привело авторов к очередному наблюдению, позволяющему построить много новых примеров лагранжевых слоений проективной плоскости и могущему быть обобщенным и на старшие размерности, и дальше – на случай подходящих многообразий Фано. *Лагранжевы слоения* в этой работе понимаются в том же смысле, что и в конструкции Ору из [5]: компактное торическое многообразие X покрывается изотропными компактными торами так, что

- вне некоторого дивизора $D \subset X$, называемого *локусом вырождения*, дополнение $X - D$ расслоено на компактные лагранжевы торы;
- дивизор D как симплектическое многообразие несет лагранжево слоение;
- если все лагранжевы торы гладкие, то слоение называется *регулярным*, если имеются особые торы, то слоение называется *сингулярным*.

Особенности, рассматриваемые нами ниже, того же сорта, что и в [5].

В этой терминологии слоение Клиффорда есть регулярное лагранжево слоение, а слоение Ору – сингулярное. Заметим, что поскольку компактное симплектическое многообразие с нетривиальным каноническим классом не может быть покрыто гладкими лагранжевыми торами по топологическим причинам, любое регулярное лагранжево слоение многообразия Фано обязано иметь локус вырождения; с другой стороны, сингулярное лагранжево слоение *a priori* может иметь тривиальный локус вырождения, хотя наша конструкция не приводит к таким примерам.

Само по себе наблюдение очень простое: пусть на $\mathbb{CP}^2$ есть морсовская вещественная функция f и некоторый пучок кривых степени k такие, что гамильтоново действие X_f сохраняет каждую кривую из пучка. Тогда выбор произвольной морсовской функции на проективной прямой $\mathbb{CP}^1$, параметризующей этот пучок, задает слоение на $\mathbb{CP}^2$, общим слоем которого является лагранжев тор. В этом слоении *a priori* имеются особые торы, соответствующие или особым элементам нашего пучка, или критическим линиям уровня функции h . Обобщение на старшие размерности следует той же схеме: пусть на $\mathbb{CP}^n$ имеются $n-1$ морсовских функций $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ в инволюции и некоторая одномерная линейная подсистема (пучок) в полной линейной системе $|kH|$ дивизоров степени k такие, что гамильтоново действие каждого f_i сохраняет каждый элемент этой линейной подсистемы. Тогда выбор произвольной морсовской функции h на $\mathbb{CP}^1$, параметризующей этот пучок, индуцирует лагранжево слоение $\mathbb{CP}^n$ с локусом вырождения, составленным из элементов пучка, соответствующих фокальным критическим точкам h , общим слоем которого является лагранжев тор. Если, более того, функция h имеет только две критические точки, а объединение этих гиперплоскостей содержит все $(n-2)$ -плоскости, составляющие множество вырождения поливекторного поля $X_{f_1} \wedge \dots \wedge X_{f_{n-1}}$, то индуцируемое лагранжево слоение на $\mathbb{CP}^n$ оказывается регулярным.

Простота представленного выше наблюдения оборачивается трудной задачей отыскания морсовских функций на проективном пространстве, однако она облегчается существованием вещественных функций специального типа – символов Березина или отображениями момента. Символы это те вещественные функции, чьи гамильтоновы векторные поля сохраняют не только симплектическую структуру, но и всю

кэлерову. Символы были введены Ф. Березиным в задачах квантования кэлеровых многообразий и представляют собой аналоги квантовых наблюдаемых. В случае $\mathbb{CP}^n$ любой символ получается из некоторого самосопряженного оператора на $\mathbb{C}^{n+1}$ (см. [7]), а набор из n коммутирующих символов в точности соответствует выбору вещественного подтора в комплексном торе, действующем на $\mathbb{CP}^n$. С точки зрения торической геометрии отображения моментов являются символами, поэтому ниже можно было бы всюду слово “символ” заменить на “отображения моментов”, однако для дальнейших возможных приложений в случае неторических многообразий мы используем первый термин. Но при этом торическая геометрия необходима в наших конструкциях данной работы, поскольку на торических многообразиях оказывается нетрудно отыскать и описать подходящие инвариантные пучки.

Представленные ниже в п. 2 и 3 примеры обладают одной общей чертой – мы ищем расслоения на лагранжевы торы многообразия Фано с исключенным элементом из антиканонической системы. Такой интерес продиктован интересной гипотезой, предложенной Ору в [6]. А именно, предполагается, что если из проективной плоскости исключить любой дивизор из антиканонической системы, т.е. некоторую кубическую кривую, то оставшаяся часть может быть расслоена на лагранжевы торы, обладающие свойством специальности. Наши примеры как раз следуют в русле этой гипотезы. И хотя предлагаемый метод построения лагранжевых подмногообразий не дает возможности построения расслоения на лагранжевы торы проективной плоскости без гладкой кубической кривой (или, более обще, многообразия Фано без гладкого элемента антиканонической системы), из него получаются новые неторические примеры лагранжевых подмногообразий в торических многообразиях.

1. Общая конструкция. Рассмотрим $\mathbb{CP}^n$, снабженное стандартной метрикой Фубини–Штуди, индуцирующей стандартную кэлерову форму ω . В пространстве $C^\infty(\mathbb{CP}^n, \mathbb{R})$ имеется подпространство символов $C_q(\mathbb{CP}^n, \mathbb{R})$, определяемых следующим образом (см. [7], [4]): гладкая вещественная функция f , чье гамильтоново векторное поле сохраняет метрику,

$$\mathrm{Lie}_{X_f} g = 0.$$

Нетрудно видеть (см. [7]), что в случае $\mathbb{CP}^n$ любая такая функция f получается из некоторого самосопряженного оператора F на $\mathbb{C}^{n+1}$. При этом собственные вектора F при проективизации становятся критическими точками f , а собственные значения – критическими значениями. Отсюда видно, что для $\mathbb{CP}^n$ понятие символа и отображения моментов гамильтонова действия тора (см. [8]) очень близки: символ f является отображением моментов, если его критические значения удовлетворяют некоторым целочисленным условиям. Ниже мы рассматриваем только те отображения моментов, которые являются функциями Морса.

Торическое симплектическое многообразие обладает каноническим лагранжевым слоением, регулярным в нашей терминологии, см. [8]. Оно задается некоторым набором отображений моментов для гамильтонова действия тора, так что стандартное слоение Клиффорда на $\mathbb{CP}^n$ задается совместными множествами уровня для отображений моментов $(f_1, \dots, f_n)$. Рассмотрим теперь случай, когда для некоторого неполного набора отображений моментов $(f_1, \dots, f_{n-1})$ на $\mathbb{CP}^n$ найдется пучок дивизоров $\{D_z\} \subset |kH|$ с гладким общим элементом в полной линейной системе

дивизоров степени k так, что имеет место следующее условие согласования: каждый дивизор D_z из пучка инвариантен относительно гамильтонова действия каждой функции f_i , $i = 1, \dots, n-1$. Нетрудно видеть, что это условие означает, что каждый гладкий элемент пучка сам по себе является торическим многообразием с отображениями моментов, получающихся ограничением f_i на D_z .

Сформулируем теперь наше основное наблюдение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть набор коммутирующих отображений моментов $f_1, \dots, f_{n-1}$ сохраняет элементы одномерной линейной подсистемы $\mathbb{CP}_B^1$ без базисных компонент с базисным множеством B в полной линейной системе дивизоров степени k на $\mathbb{CP}^n$. Предположим, что общий элемент этого пучка гладкий. Тогда любая морсовская функция h на $\mathbb{CP}_B^1$ индуцирует (возможно сингулярное) лагранжеево слоение на $\mathbb{CP}^n$, общим слоем которого является гладкий лагранжесов тор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО произведем в два шага. Сначала покажем, что набор данных $(f_1, \dots, f_{n-1}, h)$ задает слоение на $\mathbb{CP}^n$ с компактными слоями, а затем покажем, что эти слои лагранжевы или изотропны, а в общем случае – гладкие.

Пусть $\Delta_{n-1} \subset \mathbb{CP}^n$ – “симплекс вырождения” набора $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$, определяемый условием

$$\Delta_{n-1} = \{X_{f_1} \wedge \dots \wedge X_{f_{n-1}} = 0\}$$

и состоящий из $(n+1)n/2$ проективных $(n-2)$ -пространств, натянутых на все возможные поднаборы из $n+1$ общей критической точки f_i . Тогда из инвариантности элементов пучка следует, что базисное множество B пучка содержится в Δ_{n-1} . Более того, если пучок включает в себя особые элементы (т.е. приводимые дивизоры или дивизоры с особенностями), то все особенности слоев также должны содержаться в Δ_{n-1} . В самом деле, пусть некоторый элемент D_z , $z \in \mathbb{CP}_B^1$, приводим, т.е.

$$D_z = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = N \neq \emptyset.$$

Тогда каждая f_i сохраняет N , поскольку она сохраняет и D_1 и D_2 , откуда ограничения $f_1|_N, \dots, f_{n-1}|_N$ индуцируют набор функций в инволюции на симплектическом $(n-2)$ -мерном многообразии, что влечет их алгебраическую зависимость, откуда видно, что N должно содержаться в Δ_{n-1} . Если некоторый элемент D_z , $z \in \mathbb{CP}_B^1$, неприводим, но имеет особенности, составляющие подмножество $\text{Sing}_{D_z} \subset D_z$, то в каждой точке $p \in \text{Sing}_{D_z}$ касательный к D_z конус должен порождаться гамильтоновыми векторными полями X_{f_i} , откуда снова эти поля должны быть линейно зависимы в точке p . Базисное множество B обязано содержаться в Δ_{n-1} по той же причине: оно представляется пересечением двух гладких дивизоров. Обозначим как $\text{Sing} \subset \mathbb{CP}^n - B$ объединение всех особенностей всех особых слоев нашего пучка. С другой стороны, гамильтоново действие f_i -х не перемешивает точки B и Sing , т.е. каждая из этих компонент Δ_{n-1} инвариантна относительно этого действия.

Для произвольной морсовской функции h на $\mathbb{CP}_B^1$ рассмотрим подъем ψ^*h на $\mathbb{CP}^n - B$, где отображение

$$\psi: \mathbb{CP}^n - B \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

определяется нашим пучком. Эта функция гладка вне Sing и непрерывна на $\mathbb{CP}^n - B$. Мы утверждаем, что набор функций $(f_1, \dots, f_{n-1}, \psi^*h)$ задает слоение на $\mathbb{CP}^n - B$

с компактными (возможно особыми) слоями. В самом деле, рассмотрим отображение действия (action map)

$$F_{n-1}: \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad (*)$$

задаваемое значениями $(f_1, \dots, f_{n-1})$. Это проекция полного отображения действия

$$F_n: \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (**)$$

определяемого полным набором $(f_1, \dots, f_n)$, чей образ есть выпуклый многогранник $P_n \subset \mathbb{R}^n$ (см. [8]). Поэтому образом F_{n-1} будет выпуклый многогранник $P_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, получающийся при проекции P_n . Образ симплекса вырождения

$$F_{n-1}(\Delta_{n-1}) = \delta_{n-1}$$

есть подмножество P_{n-1} , состоящее из границы ∂P_{n-1} плюс некоторый набор “диагональных” компонент коразмерности 1 (или большей). В самом деле, каждая компонента Δ_{n-1} отображается $(**)$ в некоторую грань размерности $n-2$ в P_n , а затем эта грань проецируется вдоль последней координаты x_n в $\mathbb{R}^n$ в линейное подмногообразие в $\mathbb{R}^{n-1}$, чья размерность не превосходит $n-2$. Если набор значений $(c_1, \dots, c_{n-1})$ не принадлежит δ_{n-2} , то совместное множество уровня

$$S_{(c_1, \dots, c_{n-1})} = \{f_i = c_i\}$$

есть гладкое компактное (вещественное) подмногообразие $\mathbb{CP}^n$, и поскольку оно не соприкасается с Δ_{n-1} , функция ψ^*h корректно определена на $S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}$ и является гладкой. Отсюда видно, что множества уровней $\psi^*h|_{S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}}$ являются компактными подмногообразиями в $S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}$, поэтому такое ограничение задает слоение на $S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}$ с компактными слоями. Эти слои имеют разные размерности – n или $n-1$, так как функция $\psi^*h|_{S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}}$ имеет неизоллированные критические точки. В самом деле, критические множества $\psi^*h|_{S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}}$ составлены из слоев над критическими точками h , и размерности критических слоев подъема и ограничения функции зависит от типа соответствующих критических точек h : над фокальными критическими точками (минимумами и максимумами) критические множества уровня имеют размерность $n-1$, а седловые критические точки дают критические множества уровня размерности n .

Рассмотрим теперь случай, когда набор данных $(c_1, n, \dots, c_{n-1})$ принадлежит образу $F_{n-1}(\text{Sing}) \subset \delta_{n-2}$. Тогда совместное множество уровня $S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}$ является компактным подмногообразием в $\mathbb{CP}^n - B$ с особенностью, моделируемой стягиванием гомологически нетривиальной петли на n -торе (как это видно из стандартной торической картинки). Функция ψ^*h непрерывна на $S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}$, поэтому ее множество уровней снова определяет слоение с компактными слоями. Заметим, что базисное множество B также расслоено функциями f_i , будучи инвариантной частью Δ_{n-2} . Отсюда видно, что выбор h определяет слоение с компактными слоями всего $\mathbb{CP}^n$. Это слоение составлено из совместных множеств уровня

$$T_{(c_1, \dots, c_n)} = \{f_i = c_i, i = 1, \dots, n-1, \psi^*h = c_n\}$$

на $\mathbb{CP}^n - B$ и клиффордова слоения на B . При этом B включается в качестве особенности в локус вырождения получаемого слоения. В самом деле, если $p_1, \dots, p_l -$

фокальные критические точки h , то пополнение соответствующих слоев

$$D_i = \overline{\psi^{-1}(p_i)}$$

составляют локус вырождения

$$D = \bigcup_{i=1}^l D_i$$

нашего слоения, а поскольку все эти дивизоры содержат B , то базисное множество есть сингулярность D (в более сложных случаях, когда D_i сами по себе особые, базисное множество есть часть множества особенностей локуса вырождения), и клиффордово слоение на B продолжается до соответствующего слоения на локусе вырождения.

Изучим теперь касательные пространства к полученным выше слоям. Они натянуты на гамильтоновы векторные поля X_{f_i} и X_{ψ^*h} на $\mathbb{CP}^n - B$. Последнее поле не определено в точках Sing , однако во всех остальных точках имеет место следующее равенство:

$$\omega(X_{f_i}, X_{\psi^*h}) = 0.$$

По условию X_{f_i} касаются слоев, а ядро дифференциала $d\psi^*h$ содержит подпространство, касательное к слою, откуда следует представленное тождество, эквивалентное тому, что f_i и ψ^*h коммутируют на $\mathbb{CP}^n - \Delta_{n-1}$. Заметим, что для каждого $T_{(c_1, \dots, c_n)}$ касательное пространство порождается или полным набором векторных полей X_{f_i} и X_{ψ^*h} (для гладких точек), или некоторым поднабором (для негладких точек). Это означает, что каждое гладкое $T_{(c_1, \dots, c_n)}$ является лагранжевым тором, а негладкие множества уровней делятся на две категории: изотропные торы, лежащие над фокальными критическими точками h , и особые лагранжевы торы. Последняя категория также делится на две части: особенности приходят или из пересечений с Sing , или из особенностей соответствующих линий уровня h . Например, если выбираемая нами h имеет только две критические точки, минимум и максимум, то особые торы последнего типа не возникают. С другой стороны, в этом простейшем случае локус вырождения состоит всего из двух компонент.

Изучение типов возникающих особенностей выходит за рамки настоящей работы, и нам остается сегодня показать, что случай гладкого лагранжева тора является общим среди слоев.

Слои нашего слоения могут быть параметризованы пространством значений f_i и множеством линий уровня h . Рассмотрим прямое произведение $P_{n-1} \times G$, где G – плоский граф, чьи вершины представлены критическими значениями h , а ребра соответствуют связным компонентам некритических линий уровня h . Заметим, что граф множеств уровня $\psi^*h|_{S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}}$ является подграфом в G , и поэтому можно определить отображение

$$(f_1, \dots, f_{n-1}, \psi^*h): \mathbb{CP}^n - B \rightarrow P_{n-1} \times G,$$

образ которого W есть пространство, параметризующее слою нашего слоения. Подпространство W_0 , отвечающее (регулярным и сингулярным) лагранжевым торам, получается удалением концевых вершин из графа G , т.е. точек, соответствующих фокальным критическим точкам h . Равным образом W_0 определяется как образ

$\mathbb{CP}^n - D$ при том же отображении, где D – locus вырождения. Таким образом, $\mathbb{CP}^n - D$ расслоено на (возможно сингулярные) лагранжевы торы над W_0 . В общем W_0 не может быть дополнено до гладкого компактного вещественного многообразия; оно называется *аффинным многообразием* в [6]. Для общей точки $w = (c_1, \dots, c_n)$ пространства W_0

- $(c_1, \dots, c_{n-1})$ не принадлежит δ_{n-2} ,
- c_n не является критическим значением h ,

и, следовательно, совместное множество уровня $T_{(c_1, \dots, c_n)}$, определяемое этими значениями, несет n линейно независимых в каждой точке гамильтоновых векторных поля, попарно симплектически ортогональных, и поэтому оно является гладким лагранжевым тором.

С другой стороны, locus вырождения D также несет лагранжево слоение. В самом деле, каждая его компонента D_i расслоена коммутирующими отображениями моментов $f_1|_{D_i}, \dots, f_{k-1}|_{D_i}$. Этим завершается доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Стандартное слоение Клиффорда получается этой же конструкцией, если в качестве функции h на $\mathbb{CP}^n$ взять такую, которая имеет в точности две критические точки, и особые слои лежат в точности над этими двумя точками.

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 1 остается справедливым для любого торического многообразия. Как будет показано в следующих пунктах, эта конструкция позволяет строить неторические лагранжевы слоения торических многообразий Фано.

В наиболее общем виде наблюдение формулируется в свете фундаментального результата Дональдсона о пучках Лефшеца на симплектических многообразиях с целочисленной симплектической формой, (см. [9]). А именно,

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, ω) – односвязное симплектическое многообразие вещественной размерности $2n$ с целочисленной симплектической формой, $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Пусть сечения $s_1, s_2 \in \Gamma(X, L^k)$ индуцируют пучок Лефшеца, как в [9]. Тогда любой набор первых интегралов $f_1, \dots, f_{n-1}$, сохраняющих сечения s_1, s_2 в комбинации со связностью предквантования ∇ , используемой в [9] так, что

$$\nabla_{X_{f_i}} s_j = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, 2,$$

и любая морсовская функция на прямой $\mathbb{CP}^1$, параметризующей пучок, индуцируют изотропное слоение X , общим слоем которого является гладкий лагранжев тор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в точности следует схеме доказательства теоремы 1. Ключевыми являются следующие моменты. Справедливым остается тот факт, что базисное множество пучка Лефшеца

$$B = (s_1)_0 \cap (s_2)_0$$

также содержится в “симплексе вырождения”

$$\Delta_{n-1} = \{X_{f_1} \wedge \dots \wedge X_{f_{n-1}} = 0\}.$$

Отображение $(*)$ корректно определено и переводит Δ_{n-1} в объединение границы области $P_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и некоторых “диагональных” компонент коразмерности

большей или равной 1, где P_{n-1} есть образ всего X . Для общего набора значений $(c_1, \dots, c_{n-1})$ из внутренней части P_{n-1} вне диагональных стенок совместное множество уровня $S_{(c_1, \dots, c_{n-1})}$ является гладким компактным многообразием. В самом деле, все множества уровней $\{f_i = c_i\}$ гладки (критические значения функций попадают в ∂P_{n-1}) и пересекаются трансверсально (гамильтоновы векторные поля X_{f_i} линейно независимы в каждой точке пересечения). Таким образом, аргументы доказательства теоремы 1 переносятся и на этот случай.

2. Примеры в размерности 2. В своей бакалаврской дипломной работе [10] первый автор заметил интересную особенность: если невырожденный символ f на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ сохраняет неприводимую гладкую конику $Q \subset \mathbb{CP}^2$, то этот же символ сохраняет и целый пучок коник, включающих в себя исходную. В свете этого конструкция Ору неторического лагранжева слоения $\mathbb{CP}^2$ с вырождением в объединении коники и прямой (см. [5]) может быть представлена следующим образом.

Рассмотрим на $\mathbb{CP}^2$ символ f с критическими значениями $(1, -1, 0)$. Зафиксируем собственный базис соответствующего самосопряженного оператора в $\mathbb{C}^3$ и рассмотрим соответствующие однородные координаты в $\mathbb{CP}^2$. Тогда пучок коник $\alpha_0 z_0 z_1 = \alpha_1 z_2^2$ будет неподвижной линейной подсистемой в полной линейной системе $|2H|$ на $\mathbb{CP}^2$. Коэффициенты α_0, α_1 есть однородные координаты на параметризующий пучок прямой $\mathbb{CP}^1$. Выберем следующую морсовскую функцию на $\mathbb{CP}^1$:

$$h = \frac{|\alpha_0|^2}{|\alpha_0|^2 + |a\alpha_1 - \alpha_0|^2}, \quad (1)$$

где a – некоторая фиксированная вещественная положительная константа (ср. [5]). Две ее критические точки $p_{\max}, p_{\min}$ с критическими значениями 1 и 0 соответствуют невырожденной конике $Q = \{z_2^2 = a z_0 z_1\}$ и двойной прямой $\{z_2^2 = 0\}$. Кроме того, базисное множество пучка $\mathbb{CP}^1$ не совпадает с множеством критических точек f , поэтому имеется один особый тор $T_{(0,1/2)}$, моделируемый стягиванием одного цикла на гладком торе в точку.

Таким образом, неторический пример Ору представляется “почти интегрируемой” гамильтоновой системой на $\mathbb{CP}^2$, получаемой конструкцией п. 1.

Этот пример имеет простое обобщение на старшие степени. Как показал первый автор в [11], символ не может сохранять гладкую неприводимую кривую степени, больше или равной 3 в $\mathbb{CP}^2$. Но возможно рассмотреть пучок каспидальных кривых вида

$$\alpha_0 z_0^k + \alpha_1 z_1^{k-1} z_2 = 0,$$

инвариантных относительно невырожденного символа с критическими значениями $(k-1, k, 0)$. Базисное множество этого семейства есть сумма точек $[0 : 1 : 0]$ и $[0 : 0 : 1]$ с кратностями. Выбор произвольной функции высоты на прямой $\mathbb{CP}^1$, параметризующей этот пучок, позволяет построить различные расслоения на торы $\mathbb{CP}^2$. Если взять морсовскую функцию h такую же, как и в рассмотрении примера Ору выше, то получится лагранжево слоение $\mathbb{CP}^2$ без приводимой кривой степени $k+1$, состоящей из прямой и неприводимой каспидальной кривой степени k . Среди слоев снова

будет один особый, соответствующий значениям

$$f = k - 1, \quad h = \frac{1}{2}.$$

Этот особый тор разделяет множество слоев на два типа – слои типа Клиффорда и слои типа Чеканова, как и в примере Ору из [5].

Перейдем теперь к рассмотрению случая невырожденной квадрики Q в $\mathbb{CP}^3$.

Простой пример неторического лагранжева слоения Q был построен в [12] из бирационального отображения $Q \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и примера Ору. Ниже этот пример обобщается посредством применения конструкции п. 1.

Рассмотрим для $\mathbb{CP}^3$ с фиксированными однородными координатами $[z_0 : \dots : z_3]$ вырожденный символ f с собственными значениями $(1, -1, 0, 0)$ и невырожденную квадрику

$$Q = \{z_0 z_1 + z_2 z_3 = 0\}.$$

Нетрудно видеть, что квадрика Q инвариантна относительно символа f . Поэтому ограничение

$$f_Q = f|_Q$$

будет символом на Q , уже невырожденным (с изолированными особыми точками). В полном линейном ряду дивизоров бистепени $(1, 1)$ на Q имеется пучок плоских сечений $\{q_{\alpha_0, \alpha_1} \subset Q\}$, получаемых пересечениями

$$q_{\alpha_0, \alpha_1} = Q \cap \pi_{\alpha_0, \alpha_1},$$

где плоскость π_{α_0, α_1} задается уравнением $\alpha_0 z_2 + \alpha_1 z_3 = 0$. Каждая коника q_{α_0, α_1} инвариантна относительно f_Q , потому что каждая плоскость π_{α_0, α_1} инвариантна относительно символа f . Поэтому выбор произвольной функции высоты h на $\mathbb{CP}^1$, параметризующей пучок $\{q_{\alpha_0, \alpha_1}\}$, индуцирует лагранжево слоение коники Q .

Если взять h вида

$$h = \frac{|\alpha_0|^2}{|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2}, \quad (2)$$

то получится стандартное торическое слоение с вырождениями на четырех прямых. Если взять h вида (1) (как в примере Ору), то получится неторическое слоение из [12] с вырождением на паре прямых и конике и имеющее один изолированный особый тор. Наконец, если взять функцию вида

$$h = \frac{|\alpha_0 + \alpha_1|^2}{|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2}, \quad (3)$$

то мы получим неторическое расслоение на лагранжевы торы дополнения $Q - (q_{1,1} \cup q_{1,-1})$ с двумя изолированными особыми торами.

3. Примеры для $\mathbb{CP}^3$. С помощью конструкции п. 1 нетрудно построить неторические лагранжевы слоения проективного пространства $\mathbb{CP}^3$. Ниже мы приводим два примера. Первый представляет лагранжево слоение проективного пространства без двух гладких квадрик, причем это слоение не имеет особых слоев (т.е. является расслоением). Второй пример – вырожденный, получающийся исключением из $\mathbb{CP}^3$ плоскости и невырожденной кубики. Вырожденные торы при этом составляют

большое множество, не являясь изолированными. Однако этот пример оказывается полезен тем, что он включает в себе деформации стандартного клиффордова слоения проективной плоскости.

Зафиксируем однородные координаты $[z_0 : \dots : z_3]$ и рассмотрим невырожденный символ f с критическими значениями λ_i в точках $z_i \neq 0$, $z_i = 0$. В полном линейном ряду квадратик рассмотрим пучок $\alpha_0 z_0 z_1 + \alpha_1 z_2 z_3 = 0$. Символ f сохраняет элементы пучка, если и только если выполнено равенство

$$\lambda_0 + \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3.$$

Нетрудно видеть, что существуют два линейно независимых невырожденных символа, удовлетворяющих этому условию. Например,

$$f_1 \mapsto (1, -1, 2, -2), \quad f_2 \mapsto (2, -2, -1, 1).$$

Если теперь на прямой $\mathbb{CP}^1$, параметризующей этот пучок, выбрать функцию h вида (2), то мы получим стандартное клиффордово слоение $\mathbb{CP}^3$ с вырождением на четырех гиперплоскостях. Рассмотрим другую функцию h вида (3). Тогда ее критические точки $p_{\max}$, $p_{\min}$ соответствуют невырожденным квадратикам

$$Q_+ = \{z_0 z_1 + z_2 z_3 = 0\}, \quad Q_- = \{z_0 z_1 - z_2 z_3 = 0\}.$$

Заметим, что симплекс вырождения символов f_1 , f_2 принадлежит объединению

$$\Delta_{n-1} = \Delta_1 \subset Q_+ \cup Q_-.$$

В самом деле, симплекс вырождения составлен из шести прямых, две из которых составляют носитель базисного множества пучка, а оставшиеся четыре разбиты на пары, каждая из которых лежит на $Q_{\pm}$. Отсюда следует, что f_1 , f_2 и h (3) задают гладкое расслоение на торы дополнения к двум гладким квадратикам в $\mathbb{CP}^3$.

Следующий пример: рассмотрим пучок кубических поверхностей

$$\mathbb{CP}^1 = \{\alpha_0 z_0^3 + \alpha_1 z_1 z_2 z_3 = 0\}$$

в тех же однородных координатах. Рассмотрим пару символов: f_1 с критическими значениями $(0, 1, 2, -3)$ и вырожденный символ f_2 с критическими значениями $(0, 1, 0, -1)$. Нетрудно видеть, что оба символа оставляют элементы пучка неподвижными, поэтому выбор морсовской функции на $\mathbb{CP}^1$ индуцирует слоение $\mathbb{CP}^3$ без двух гиперплоскостей $h^{-1}(p_{\max})$, $h^{-1}(p_{\min})$. Функция h вида (2) будет задавать классическое слоение Клиффорда, в то время как функция h вида (1) индуцирует неторическое лагранжево слоение на $\mathbb{CP}^3$ без плоскости $\pi_0 = \{z_0 = 0\}$ и кубики $C = \{z_0^3 + z_1 z_2 z_3 = 0\}$ (положим вещественный параметр a в (1) равным единице для краткости записи). На этот раз симплекс вырождения D_{n-1} не содержится в объединении $\pi_0 \cup C$, поэтому индуцируемое лагранжево слоение $\mathbb{CP}^3 - (\pi_0 \cup C)$ содержит особые неизоллированные слои. Для описания вырождений удобно прибегнуть к дополнительному построению. Рассмотрим пучок проективных плоскостей π_{β_0, β_1} , проходящих через прямую $l = \{z_0 z_2 = 0\}$ так, что

$$\pi_0 = \pi_{0,1} \in \mathbb{CP}^1.$$

Нетрудно видеть, что каждая плоскость из пучка инвариантна относительно вырожденного символа f_2 , поэтому ограничение

$$f_2|_{\pi_{\beta_0, \beta_1}} = f_{\beta_0, \beta_1}$$

является символом на плоскости π_{β_0, β_1} . Пересечение

$$C \cap \pi_{\beta_0, \beta_1} = l \cup Q_{\beta_0, \beta_1}$$

представляет собой объединение прямой l и гладкой коники $Q_{\beta_0, \beta_1} \subset \pi_{\beta_0, \beta_1}$ за исключением крайних случаев, когда $\beta_i = 0$. При $\beta_0 = 0$ коника Q_{β_0, β_1} вырождается в пару прямых, а при $\beta_1 = 0$ коника вырождается в двойную прямую l .

Нетрудно видеть, что набор данных f_{β_0, β_1} , Q_{β_0, β_1} , l индуцирует лагранжево слоение типа Ору для плоскости π_{β_0, β_1} , если оба числа $\beta_i \neq 0$. В самом деле, кубика C и плоскость π_{β_0, β_1} инвариантны относительно символа f_2 , откуда следует, что их пересечение инвариантно относительно ограничения f_2 на плоскость π_{β_0, β_1} . Это слоение получается пересечением соответствующих лагранжевых торов слоения $\mathbb{CP}^3 - (\pi_0 \cup C)$ с плоскостью π_{β_0, β_1} . При этом 3-мерные торы могут быть восстановлены из двумерных торов: гамильтоново векторное поле невырожденного символа f_1 задает циклическое движение точек невырожденного 2-мерного тора, объединение орбит которых дает искомый 3-мерный тор. Особые слои получаются, если берется особый 2-тор с особенностью в точке пересечения прямой $z_1 z_3 = 0$ и плоскости π_{β_0, β_1} . При этом плоскость $\pi_{0,1}$ расслоена по Клиффорду, а $\pi_{1,0}$ несет на себе вырожденное слоение на *лагранжевы цилиндры* проективной плоскости без одной проективной прямой. Таким образом, данный пример иллюстрирует деформации слоения Ору в стандартное клиффордово и в цилиндрическое слоения. При этом цилиндрические лагранжевы слоения могут оказаться вполне полезными в свете гипотезы Ору. В самом деле, Ору предполагает склеивать пару многообразий Фано X_1, X_2 вдоль антиканонических дивизоров, чтобы получить затем деформацией многообразие Калаби–Яу Y , и при этом специальные лагранжевы слоения на каждом из X_i будут индуцировать специальное лагранжево слоение Y . Однако лагранжевы торы на Y можно получить и склейкой пар лагранжевых цилиндров, так что и последний пример может оказаться полезным в дальнейшем.

Большая часть работы над этой статьей была проделана благодаря поддержке Математического института Макса Планка в Бонне, всем сотрудникам которого хочется выразить сердечную признательность. Мы благодарим Д. Ору за внимание к нашей работе и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Kontsevich, “Homological algebra of mirror symmetry”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 120–139.
- [2] K. Hori, C. Vafa, *Mirror Symmetry*, [arXiv: hep-th/0002222v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/0002222v3).
- [3] А. Л. Городенцев, А. Н. Тюрин, “Абелева лагранжева алгебраическая геометрия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 15–50.
- [4] N. A. Tyurin, “Geometric quantization and algebraic Lagrangian geometry”, *Surveys in Geometry and Number Theory. Reports on Contemporary Russian Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **338**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 279–318.

- [5] D. Auroux, *Mirror Symmetry and T-Duality in the Complement of an Anticanonical Divisor*, [arXiv: math.SG/0706.3207v2](#).
- [6] D. Auroux, *Special Lagrangian Fibrations, Mirror Symmetry and Calabi–Yau Double Covers*, [arXiv: math.SG/0803.2734v1](#).
- [7] A. Ashtekar, T. A. Schilling, *Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, [arXiv: gr-qc/9706069v1](#).
- [8] *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progr. Math., **117**, eds. M. Audin, J. Lafontaine, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [9] S. K. Donaldson, “Lefschetz pencils on symplectic manifolds”, *J. Differential Geom.*, **53**:2 (1999), 205–236.
- [10] С. А. Белев, *Собственные нелинейные квантовые подсистемы стандартных квантовых систем*, Диплом бакалавра, ЛТФ ОИЯИ, Дубна, 2007.
- [11] С. А. Белев, *Геометрические аспекты квантовой теории поля*, Диплом магистра, ЛТФ ОИЯИ, Дубна, 2008.
- [12] Н. А. Тюрин, “Бирациональные отображения и специальные лагранжевы слоения”, *Многомерная алгебраическая геометрия*, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Василия Алексеевича Исковских, Тр. МИАН, **264**, МАИК, М., 2009, 209–211.

С. А. Белев

Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Поступило

18.11.2008

Исправленный вариант

26.06.2009

Н. А. Тюрин

Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,
Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)

E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru