Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Чиркунов, О классификации по симметриям и законам сохранения квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 122–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 10:29:32

УДК 517.944+519.46

О классификации по симметриям и законам сохранения квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Ю. А. Чиркунов

Получены: достаточное условие отсутствия касательных преобразований, допускаемых квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка и достаточное условие линейной автономности операторов группы Ли преобразований, допускаемых слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Доказана теорема о структуре законов сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Выполнена классификация по законам сохранения первого порядка линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Библиография: 2 названия.

Введение. В работе исследуются квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка с точки зрения их групповых свойств и наличия законов сохранения. Как известно [1], информация о структуре операторов, допускаемых дифференциальным уравнением, и его законах сохранения существенно облегчает как отыскание этих операторов и законов сохранения, так и отыскание решений данного уравнения. Классификация дифференциального уравнения по законам сохранения позволяет, в частности, выявить наиболее перспективные, в смысле возможностей решения конкретных задач, значения и формы экспериментально определяемых физических величин и зависимостей, получить новые физические величины, сохраняющиеся с течением времени.

1. Касательные преобразования, допускаемые квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Рассматривается квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a^{ij}u_{ij} + b = 0, \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad (1)$$

Здесь $u_{ij} = \partial_i \partial_j u$, $\partial_i = \partial / \partial x^i$, $i, j = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, матрица $A = \|a^{ij}\|$ и величина b – заданные функции переменных $\mathbf{x}(x^1, \dots, x^n)$, $u, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, где $u_i = \partial_i u$; по повторяющимся индексам, как и всюду в дальнейшем, суммирование от 1 до n , если не оговорено противное.

ТЕОРЕМА 1. Если общий ранг $(A) \geq 3$, то все касательные преобразования, допускаемые уравнением (1), являются продолженными точечными преобразованиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть общий ранг $(A) = r \geq 3$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$, а в ряду миноров $M^1, \dots, M^r$, стоящих в левом верхнем углу матрицы A , никакие два соседних не равны нулю и $M^r \neq 0$. Имеет место альтернатива:

- 1) либо $M^3 \neq 0$,
- 2) либо $M^3 = 0$, но тогда миноры M^2 и M^4 отличны от нуля.

Оператор группы касательных преобразований, допускаемых уравнением (1), ищется в виде [1]

$$\xi^i \partial_i + \eta \partial_u + \zeta_{(i)} \partial_{u_i}, \quad (2)$$

где $\xi^i = -H_{u_i}$, $\eta = H - u_j H_{u_j}$, $\zeta_{(i)} = H_i + u_i H_u$, $H_i = \partial_i H$, $i = 1, \dots, n$, а $H = H(\mathbf{x}, u, u_1)$ – производящая функция. Если производящая функция линейна относительно $u_1, \dots, u_n$, то касательные преобразования, определяемые оператором (2), являются продолженными точечными преобразованиями.

Условия инвариантности многообразия (1) относительно оператора (2) приводят к соотношениям

$$H_{u_i u_j} = a^{ij} \lambda^1 - a^{j1} \lambda^i - a^{i1} \lambda^j, \quad i, j = 2, \dots, n, \quad (3)$$

где величины $\lambda^m = H_{u_1 u_m}$, $m = 1, \dots, n$, – решения уравнений

$$(a^{ij} a^{k1} - a^{ik} a^{j1}) \lambda^1 - (a^{ik} + a^{i1} a^{k1}) \lambda^j + (a^{ij} + a^{i1} a^{j1}) \lambda^k = 0, \quad (4)$$

$$2(a^{ik} a^{mj} - a^{im} a^{jk}) \lambda^1 + (a^{kj} a^{m1} - a^{mj} a^{k1}) \lambda^i + (a^{im} a^{k1} - a^{ik} a^{m1}) \lambda^j + (a^{im} a^{j1} - a^{mj} a^{i1}) \lambda^k + (a^{kj} a^{i1} - a^{ik} a^{j1}) \lambda^m = 0, \quad (5)$$

где $i, j, k, m = 2, \dots, n$. Следствием системы (4), (5) являются уравнения

$$B(1, i, j)(\lambda^1, \lambda^i, \lambda^j)^T = 0, \quad i, j = 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (6)$$

где $B(1, i, j) = \|B^{km}(1, i, j)\|$ – матрица, присоединенная к матрице минора третьего порядка матрицы A , стоящего на пересечении строк и столбцов с номерами 1, i , j . Для первой части альтернативы из (4)–(6) следует $\lambda^j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Для второй части альтернативы из уравнений (5) вытекают уравнения $M(1, i, j, k) \lambda^1 = 0$, $i, j, k = 2, \dots, n$, $i \neq j \neq k \neq i$, где $M(1, i, j, k)$ – минор четвертого порядка матрицы A , стоящий на пересечении строк и столбцов с номерами 1, i , j , k . Отсюда следует, что $\lambda^1 = 0$. Так как $M^2 \neq 0$ и общий ранг $(A) \geq 3$, из (4) следует, что $\lambda^j = 0$, $j = 2, \dots, n$.

Таким образом, производящая функция H в силу (3) является линейной функцией переменных $u_1, \dots, u_n$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие: общий ранг $(A) \geq 3$, достаточное для отсутствия касательных преобразований для уравнения (1), вообще говоря, нельзя существенно ослабить. Например, уравнение $(tu_t - u)u_{tt} = 2\nabla u \cdot \nabla u_t + 1$, где $t \in \mathbb{R}^1$, $\nabla = \partial_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, допускает группу касательных преобразований с производящей функцией $H = \exp(u_t)$. Общий ранг матрицы A этого уравнения равен 2.

2. Точечные преобразования, допускаемые слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Рассматривается слабонелинейное уравнение

$$a^{ij}(\mathbf{x}, u)u_{ij} + b(\mathbf{x}, u, u_1) = 0. \quad (7)$$

Оператор, допускаемый уравнением (7), ищется в виде

$$\xi^i(\mathbf{x}, u)\partial_i + \eta(\mathbf{x}, u)\partial_u. \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор (8) будет называться *линейно-автономным*, если его координаты $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, η удовлетворяют уравнениям $\xi_u^1 = \xi_u^2 = \dots = \xi_u^n = 0$, $\eta_{uu} = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если общий ранг $(A) \geq 2$, то координаты $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ всех операторов (8), допускаемых слабонелинейным уравнением (7), не зависят от функции u . Если при этом $b_{u_i u_j} = 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, то все операторы (8), допускаемые уравнением (7), являются линейно-автономными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть общий ранг $(A) = r \geq 2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$, а в ряду миноров $M^1, \dots, M^r$, стоящих в левом верхнем углу матрицы A , никакие два соседних минора не равны нулю и $M^r \neq 0$.

Определяющие уравнения содержат подсистему

$$\xi_u^i = -a^{i1}\xi_u^1, \quad (a^{ij} + a^{i1}a^{j1})\xi_u^1 = 0, \quad (2a^{k1}a^{ij} - a^{kj}a^{i1} - a^{ki}a^{j1})\xi_u^1 = 0,$$

из которой следует, что $\xi_u^i = 0$, $i, j, k = 1, \dots, n$.

Если координаты $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ каждого оператора (8), допускаемого уравнением (7), не зависят от функции u , то

$$2\eta_{uu} = b_{u_1 u_1}(\eta_u - 2a^{i1}\xi_u^1) - 2b_{u_1 u_i}\xi_u^1 + \xi_u^1 b_{1 u_1 u_i} + \xi^i b_{i u_1 u_1} + \eta b_{u u_1 u_1} + b_{u_1 u_1 u_1}[\eta_1 + u_1(\eta_u - \xi_u^1) - u_i \xi_u^1] + b_{u_i u_1 u_1}(\eta_i + u_i \eta_u - u_1 \xi_u^1 - u_m \xi_u^m).$$

Из этого уравнения и следует второе утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие, что общий ранг $(A) \geq 2$, достаточное для независимости от функции u координат $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ всех операторов (8), допускаемых уравнением (7), вообще говоря, нельзя существенно ослабить. Например, уравнение $u_{tt} = t|\nabla u|^2 - u_t^2$ допускает оператор $(\exp(u))\partial_t$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для того чтобы все операторы (8), допускаемые уравнением (7), в котором $a^{11} \neq 0$, были линейно-автономными, достаточно потребовать выполнение более слабого, чем в формулировке теоремы 2, условия, а именно: общий ранг $(A) \geq 2$ и $b_{u_1 u_i} = 0$, $i = 1, \dots, n$. Это условие, вообще говоря, нельзя существенно ослабить. Например, уравнение $u_{tt} = \Delta u + u_t^2 - |\nabla u|^2$ допускает оператор $(\exp(u))\partial_u$.

3. Законы сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Законом сохранения первого порядка для уравнения (7) называется [1] вектор $B = (B^1, \dots, B^n)$, компоненты которого являются функциями переменных $\mathbf{x}$, u , u_1 и удовлетворяют соотношению $(D_i B^i)|_{(7)} = 0$, где D_i – оператор полного дифференцирования по x^i .

ТЕОРЕМА 3. Если общий ранг $(A) \geq 3$, то компоненты $B^1, \dots, B^n$ каждого закона сохранения первого порядка для уравнения (7) являются многочленами не выше второй степени относительно $u_1, \dots, u_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть общий ранг $(A) \geq r$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$, а в ряду миноров $M^1, \dots, M^r$ никакие два соседних минора не равны нулю.

Система определяющих уравнений имеет вид

$$B_{u_j}^i + B_{u_i}^j + 2a^{ij}B_{u_1}^1 = 0, \quad B_i^i + u_i B_u^i + bB_{u_1}^1 = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Ее условия совместности состоят из уравнений

$$B_{u_i u_j}^k = a^{ij}B_{u_1 u_k}^1 - a^{ik}B_{u_1 u_j}^1 - a^{jk}B_{u_1 u_i}^1$$

и уравнений (4), (5), в которых надо положить $\lambda^k = B_{u_1 u_1 u_k}^1$, $i, j = 2, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$. Поэтому $B_{u_1 u_1 u_k}^1 = 0$ при всех $k = 1, \dots, n$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

4. Законы сохранения первого порядка для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассматривается уравнение

$$L[u] = a^{ij}(\mathbf{x})u_{ij} + b^i(\mathbf{x})u_i + c(\mathbf{x})u = 0. \quad (9)$$

Из операторной формулы Грина

$$vL[u] - uL^*[v] = D_i[a^{ij}vu_j + (b^i v - (va^{ij})_j)u]$$

следует, что уравнение (9) имеет закон сохранения:

$$B^i = a^{ij}vu_j + (b^i v - (va^{ij})_j)u, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где $v = v(\mathbf{x})$ – решение сопряженного уравнения $L^*[v] = 0$.

Закон сохранения $\mathbf{B} = (B^1, \dots, B^n)$ называется [1] *тривиальным законом сохранения* для уравнения (9), если его компоненты удовлетворяют соотношению $D_i(B^i|_{(9)}) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Закон сохранения для уравнения (9), являющийся линейной комбинацией тривиальных законов сохранения и законов сохранения (10), будет называться *очевидным законом сохранения*, в противном случае – *неочевидным законом сохранения*.

Теорема 3 дает “оценку сверху” для неочевидных законов сохранения первого порядка для уравнения (9). “Оценка снизу” дается следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 4. Всякий закон сохранения, компоненты которого линейно выражаются через $u, u_1, \dots, u_n$, является очевидным законом сохранения для уравнения (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$. Пусть закон сохранения имеет вид

$$B^i = f^{ij}(\mathbf{x})u_j + h^i(\mathbf{x})u, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из соотношения $(D_i B^i)|_{(9)} = 0$ следует, что

$$f^{ij} = -a^{ij}v + g^{ij}(\mathbf{x}), \quad g^{ij} + g^{ji} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $L^*[v] = 0$. Из этих равенств в силу антисимметричности матрицы $\|g^{ij}\|$ вытекает утверждение теоремы.

5. Классификация гиперболических линейных дифференциальных уравнений второго порядка по законам сохранения. Решается задача классификации уравнения

$$u_{12} + au_1 + bu_2 + cu = 0 \quad (11)$$

относительно коэффициентов a, b, c , являющихся заданными функциями переменных x^1, x^2 по законам сохранения первого порядка, т.е. по векторам $B = (B^1, B^2)$, компоненты которых зависят от x^1, x^2, u, u_1, u_2 и удовлетворяют соотношению

$$(D_1 B^1 + D_2 B^2)|_{(11)} = 0. \quad (12)$$

Классификация проводится относительно сохраняющих дифференциальную структуру уравнения (11) следующих преобразований эквивалентности: $x'^1 = f^1(x^1)$, $x'^2 = f^2(x^2)$, $u = g(x^1, x^2)u'$, где $f^1(x^1), f^2(x^2)$ – обратимые функции, а $g(x^1, x^2) \neq 0$.

Система определяющих уравнений приводится к виду

$$B_{u_1}^1 = B_{u_2}^2 = 0, \quad B_1^1 + u_1 B_u^1 + B_2^2 + u_2 B_u^2 - (au_1 + bu_2 + cu)(B_{u_2}^1 + B_{u_1}^2) = 0. \quad (13)$$

Ядро законов сохранения для уравнения (11) состоит из тривиальных законов сохранения.

Классификация осуществляется по неочевидным законам сохранения. Второе продолжение системы (13) содержит классифицирующие уравнения $hB_{u_1 u_2 u_2}^1 = 0$, $kB_{u_1 u_1 u_1}^2 = 0$, где $h = a_1 + ab - c$, $k = b_2 + ab - c$ – инварианты Лапласа.

5.1. Случай $h \cdot k \neq 0$. Из второго продолжения системы (13) следует, что B^1, B^2 имеют вид

$$\begin{aligned} B^1 &= \theta^1 u_2^2 + \psi u u_2 - \left(\frac{1}{2} \psi_2 - a\psi - \theta^2 c \right) u^2, \\ B^2 &= \theta^2 u_1^2 + \psi u u_1 - \left(\frac{1}{2} \psi_1 - b\psi - \theta^1 c \right) u^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\psi = \theta^1 a + \theta^2 b$, $\theta^1 = \varphi^1/h$, $\theta^2 = \varphi^2/k$, а функции $\varphi^1 = \varphi^1(x^1, x^2)$, $\varphi^2 = \varphi^2(x^1, x^2)$, являются решением переопределенной пассивной системы

$$\begin{aligned} \varphi_1^1 &= (p_1 + 2b)\varphi^1, & \varphi_2^2 &= (q_2 + 2a)\varphi^2, & \varphi_2^1 + \varphi_1^2 &= (a\varphi^1 + b\varphi^2), \\ \varphi_{22}^1 &= (q_2 + 4a)\varphi_2^1 + 2[a_2 - a(q_2 + 2a)]\varphi^1 - (h - K)\varphi^2, \\ \varphi_{11}^2 &= (p_1 + 4b)\varphi_1^2 + 2[b_1 - b(p_1 + 2b)]\varphi^2 - (k - H)\varphi^1, \\ 2(K - H)\varphi_2^1 &- [H_2 - q_2 H + 4a(K - H)]\varphi^1 &= (K_1 = p_1 K)\varphi^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $p = \ln h$, $q = \ln k$, $H = 2h - k - p_{12}$ – инвариант Лапласа x^1 -преобразования Лапласа уравнения (11), $K = 2k - h - q_{12}$ – инвариант Лапласа x^2 -преобразования Лапласа уравнения (11). Решение системы (15) обладает наибольшим произволом в том случае, когда последнее уравнение этой системы является тождеством. Если

последнее уравнение системы (15) выполнено тождественно, то из оставшихся уравнений этой системы следует, что все коэффициенты разложений φ^1 и φ^2 в ряды Тэйлора выражаются не более чем через три произвольные постоянные. Следовательно, при $k \cdot h \neq 0$ уравнение (11) имеет не более трех неочевидных законов сохранения первого порядка.

Наибольшее число неочевидных законов сохранения первого порядка могут иметь только такие уравнения (11), коэффициенты a, b, c которых удовлетворяют системе уравнений

$$K = H, \quad H_1 = p_1 H, \quad H_2 = q_2 H, \quad (16)$$

условие совместности которой имеет вид $(k - h)H = 0$. Это уравнение является классифицирующим.

Пусть $k = h$. Из уравнений (16) следует, что h является решением уравнения Лиувилля $(\ln h)_{12} = \gamma h$ ($\gamma = \text{const}$). Тогда уравнение (11) эквивалентно [1] либо уравнению Эйлера–Пуассона ($\gamma \neq 0$)

$$u_{12} - \frac{2}{\gamma(x^1 + x^2)}(u_1 + u_2) + \frac{4u}{\gamma^2(x^1 + x^2)^2} = 0, \quad (17)$$

либо уравнению ($\gamma = 0$)

$$u_{12} + x^1 u_1 + x^2 u_2 + x^1 x^2 u = 0. \quad (18)$$

Решение системы (15) показывает, что уравнения (17), (18) имеют по три неочевидных закона сохранения первого порядка, определяемых по формулам (14), в которых величины θ^1, θ^2 соответственно таковы:

$$\theta^1 = \frac{c^1 + c^2 x^2 + c^3 (x^2)^2}{(x^1 + x^2)^{4/\gamma}}, \quad \theta^2 = \frac{-c^1 + c^2 x^1 - c^3 (x^1)^2}{(x^1 + x^2)^{4/\gamma}}; \quad (19)$$

$$\theta^1 = (c^1 + c^2 x^2) \exp(2x^1 x^2), \quad \theta^2 = (c^3 - c^2 x^1) \exp(2x^1 x^2). \quad (20)$$

Пусть $k \neq h$. Тогда $H = K = 0$. Такое уравнение (11) имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка, задаваемых формулами (14), в которых

$$\theta^1 = y(x^2) \exp(2\beta), \quad \theta^2 = z(x^1) \exp(2\alpha), \quad (21)$$

где $\alpha_2 = a, \beta_1 = b$. Функция $y(x^2)$ – решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения третьего порядка, а $z(x^1)$ выражаются через $y(x^2)$ и коэффициенты уравнения (11).

Результаты выполненной классификации при $k \cdot h \neq 0$ формулируются в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. При $h \cdot k \neq 0$ уравнение (11) имеет не более трех неочевидных законов сохранения первого порядка и их компоненты квадратичны относительно u, u_1, u_2 .

Если $h = k$, то уравнение (11) имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка тогда и только тогда, когда оно эквивалентно либо уравнению Эйлера–Пуассона (17), либо уравнению (18), неочевидные законы сохранения первого порядка для которых определяются формулами (14), (19), (20).

Если $h \neq k$, то уравнение (11) имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка тогда и только тогда, когда $H = K = 0$. В этом случае неочевидные законы сохранения первого порядка определяются по формулам (14), (21).

5.2. *Случай $h \cdot k = 0$.* Случай $h = k = 0$ тривиален. Если один из инвариантов h , k отличен от нуля, то, не ограничивая общности, можно считать, что $h \neq 0$. Второе продолжение системы (13) содержит классифицирующее уравнение

$$[(\ln h)_{12} - 2h]B_{u_2 u_2}^1 = 0.$$

Если $(\ln h)_{12} \neq 2h$, то неочевидные законы сохранения первого порядка для уравнения (11) имеют вид $B^1 = 0$, $B^2 = f(x^1, v)$, где $v = (u_1 + bu) \exp(\alpha)$, $\alpha_2 = a$, f – произвольная функция, $f_v \neq 0$. Если $(\ln h)_{12} = 2h$, то уравнение (11) эквивалентно [1] уравнению Эйлера–Пуассона: $u_{12} - (1/(x^1 + x^2))u_1 = 0$, для которого добавляется еще один неочевидный закон сохранения:

$$B^1 = u_2^2 - \frac{uu_2}{x^1 + x^2} + \frac{u^2}{2(x^1 + x^2)^2}, \quad B^2 = -\frac{uu_1}{x^1 + x^2} - \frac{u^2}{2(x^1 + x^2)^2}.$$

5.3. *Инвариантная характеристика случаев максимального расширения множества законов сохранения.* Выше было установлено, что при $h \cdot k \neq 0$ уравнение (11) имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа h , k удовлетворяют альтернативным условиям:

$$p_{12} = 2 \exp(p) - \exp(q), \quad q_{12} = 2 \exp(q) - \exp(p), \quad p \neq q; \quad (22)$$

$$p_{12} = \gamma \exp(p), \quad \gamma = \text{const}, \quad 5p = q. \quad (23)$$

При $k = 0$, $h \neq 0$ расширение множества неочевидных законов сохранения первого порядка для уравнения (11) в нетривиальном случае происходит, только если его инварианты Лапласа удовлетворяют условию

$$p_{12} = 2 \exp(p), \quad k = 0, \quad h \neq 0. \quad (24)$$

Решение системы определяющих уравнений показывает, что основные группы уравнений (22), (23) и (24) совпадают с группой преобразований эквивалентности уравнения (11). По известному алгоритму [1] находится базис дифференциальных инвариантов второго порядка этой группы. Он состоит из шести функций, которые могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned} I^1 &= \frac{k}{h}, & I^2 &= \frac{1}{h}(\ln h)_{12}, & I^3 &= \frac{1}{k}(\ln k)_{12}, \\ I^4 &= \frac{1}{I_1^1} \left(\ln \frac{I_1^1}{h} \right), & I^5 &= \frac{1}{I_2^1} \left(\ln \frac{I_2^1}{h} \right), & I^6 &= \frac{1}{h} I_1^1 I_2^1. \end{aligned}$$

Инварианты I^1 , I^2 , I^3 впервые были обнаружены Овсянниковым [2]. С помощью этих инвариантов уравнения (22)–(24) записываются соответственно в виде

$$I^2 + I^1 = 2, \quad I^3 + \frac{1}{I^1} = 2, \quad I^1 \neq 0, 1; \quad (25)$$

$$I^1 = 1, \quad I^2 = \gamma = \text{const}; \quad (26)$$

$$I^1 = 0, \quad I^2 = 2. \quad (27)$$

Таким образом, все случаи нетривиального максимального расширения множества законов сохранения первого порядка для уравнения (11) при $h \neq 0$ имеют следующую инвариантную характеристику.

ТЕОРЕМА 6. *Нетривиальное максимальное расширение множества законов сохранения первого порядка для уравнения (11) при $h \neq 0$ имеет место тогда и только тогда, когда его инварианты Овсянникова I^1, I^2, I^3 удовлетворяют альтернативным соотношениям (25)–(27).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] Л. В. Овсянников, “Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина”, *ПМТФ*, 1960, № 3, 126–145.

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный университет экономики и
управления

E-mail: chr01@rambler.ru

Поступило

07.06.2008

Исправленный вариант

02.06.2009