Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Филатов, Существование пределов максимальных средних, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 433–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm855>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:26:45

УДК 517.928

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

О. П. Филатов

Для класса $\Pi(\mathbb{R}^m)$ непрерывных почти периодических функций $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ рассматривается задача о существовании предела

$$M_f = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma(t)) dt,$$

где точная верхняя грань берется по всем решениям в смысле Каратеодори дифференциального включения $\dot{\gamma} \in G$, $\gamma(0) = a_0$. Установлено, что если компакт $G \subset \mathbb{R}^m$ не содержится в подпространстве из $\mathbb{R}^m$ размерности $m - 1$ (т.е. является невырожденным), то предел существует равномерно по начальному вектору $a_0 \in \mathbb{R}^m$. Обратно, если предел существует для любой функции $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$ равномерно по начальному вектору $a_0 \in \mathbb{R}^m$, то компакт G будет невырожденным. Доказано также существование экстремального решения, для которого реализуется равномерный по начальным условиям предел максимального среднего.

Библиография: 5 названий.

1. Постановка задачи. Пусть непрерывная функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ является почти периодической в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Множество всех таких функций будем обозначать через $\Pi(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим задачу о существовании предела

$$M_f = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma(t)) dt, \quad (1)$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем решениям в смысле Каратеодори дифференциального включения

$$\dot{\gamma} \in G, \quad \gamma(0) = a_0. \quad (2)$$

Здесь G – компактное множество из $\mathbb{R}^m$ (мы отождествляем фазовое и касательное пространства). Множество всех решений задачи (2), определенных в промежутке $t \geq 0$, обозначаем через $\Gamma(a_0)$.

В [1] было показано, что для почти периодической функции f одной скалярной переменной ($m = 1$) предел (1) в случае, когда компакт $G \neq \{0\}$ является отрезком, существует равномерно по начальному условию $a_0 \in \mathbb{R}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00616.

Здесь ставится следующая задача: в многомерном случае $m \geq 2$ указать свойства компакта G , которые, с одной стороны, являются достаточными условиями существования пределов максимальных средних равномерно по начальным условиям $a_0 \in \mathbb{R}^m$ для любой данной функции из класса $\Pi(\mathbb{R}^m)$, а с другой стороны, являются необходимыми условиями сразу для всего класса $\Pi(\mathbb{R}^m)$ в том смысле, что если для всех $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$ предел (1) существует равномерно по начальным условиям для дифференциального включения (2), то компакт G обязан удовлетворять этим свойствам.

Кроме того, дается ответ на естественный вопрос о существовании экстремального решения дифференциального включения (2), для которого реализуется соответствующий предел (1). Последняя задача решается в более общей постановке, чем первая.

Отметим, что условие равномерности является одним из основных требований в теоремах усреднения дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными [2].

2. Основные определения. Для непрерывной функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ мы используем наиболее подходящее для рассматриваемой задачи определение почти периодичности по Г. Бору: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что любой m -мерный куб пространства $\mathbb{R}^m$ с длинами сторон равными l содержит векторный ε -почти период $T = T(\varepsilon)$ функции f , т.е. для любого $\gamma \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство $|f(\gamma + T) - f(\gamma)| < \varepsilon$.

Заметим, что почти периодическая функция является ограниченной:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)| = K < \infty.$$

Компакт $G \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *невыврожденным*, если он не принадлежит подпространству $\mathbb{R}^m$ размерности $m - 1$.

3. Основные результаты. Следующая теорема обобщает известное свойство существования среднего для почти периодической функции в одномерном случае. В приведенной выше постановке задачи это соответствует ситуации $m = 1$, при этом компакт G дифференциального включения (2) совпадает с точкой, отличной от нуля.

ТЕОРЕМА 1. Пусть компакт G является невырожденным. Тогда для любой почти периодической функции $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$ предел максимального среднего (1) существует равномерно по начальному вектору $a_0 \in \mathbb{R}^m$.

Обратно, если для данного дифференциального включения (2) предел максимального среднего (1) существует равномерно по начальному вектору $a_0 \in \mathbb{R}^m$ для любой функции $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$, то компакт G является невырожденным.

В следующей теореме решается вопрос о существовании экстремального решения для предела (1), где точная верхняя граница берется по всем решениям дифференциального включения

$$\dot{\gamma} \in G(\gamma), \quad \gamma(0) = a_0, \quad (3)$$

при этом далее предполагается, что многозначное отображение G из $\mathbb{R}^m$ в совокупность множеств из пространства $\mathbb{R}^m$ таково, что любое решение дифференциального включения (3) определено при любом начальном векторе $a_0 \in \mathbb{R}^m$ для всех $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ локально интегрируемо по Лебегу на любом решении дифференциального включения (3), равномерно ограничено ($|f| \leq K < \infty$) и существует предел максимального среднего (1) равномерно по начальному вектору $a_0 \in \mathbb{R}^m$. Тогда существует решение $\gamma(t)$ задачи (3), для которого достигается предел максимального среднего

$$M_f = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt. \quad (4)$$

Таким образом, из существования предела максимального среднего следует существование экстремального решения при весьма общих требованиях на функцию f и дифференциальное включение. В частности, в условиях теоремы 1 для почти периодической функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ всегда существует такое решение.

4. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала будем считать, что компакт G является выпуклым множеством. Тогда множество G совпадает с его выпуклой оболочкой $co(G)$. Предположим, что компакт G является невырожденным. Если размерность компакта $\dim(G) = m - 1$ (это размерность его аффинной оболочки), то множество G содержится в некоторой гиперплоскости Γ_m , определяемой уравнением $\langle e_m, \xi \rangle = b$ относительно вектора скорости $\xi = \dot{\gamma} \in \mathbb{R}^m$, где e_m — единичный нормальный вектор гиперплоскости, число $b \neq 0$. Тогда по известной теореме о непустоте относительной внутренности выпуклого множества [3, теорема 1.5, с. 202] получаем, что множество G содержит пересечение гиперплоскости Γ_m с некоторым шаром пространства $\mathbb{R}^m$. В таком случае задачу (1), (2) запишем в координатах $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_m$, где первые $m - 1$ векторов образуют базис в линейном подпространстве, ассоциированном с гиперплоскостью Γ_m . Из построения следует, что компакт G содержит множество $P = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j$, где координатный вектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ скорости ξ принадлежит промежутку вида

$$P_\xi = [\omega_1^1, \omega_1^2] \times \dots \times [\omega_1^m, \omega_2^m]; \quad (5)$$

здесь ω_1^j, ω_2^j — постоянные, при этом $\omega_2^j - \omega_1^j > 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, m - 1$, $\omega_1^m = \omega_2^m$. Последнее равенство в случае $\dim(G) = m$ заменяется на строгое неравенство $\omega_1^m < \omega_2^m$, при этом выбор базиса пространства $\mathbb{R}^m$ произволен. Таким образом, в общем случае, когда компакт G является невырожденным, промежуток (5) является прямым произведением первых $m - 1$ отрезков положительной длины и отрезка, который, возможно, содержит единственную точку отличную от нуля. В любом случае существует число $\omega_m \neq 0$, $\omega_m \in [\omega_1^m, \omega_2^m]$. Дальнейшие рассуждения проводятся в указанных координатах. Для простоты мы будем считать, что исходная задача записана сразу в требуемых координатах, при этом мы полагаем $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

Пусть теперь

$$J_\Delta(\gamma_0) = \bigcup_{\gamma} I_\Delta(\gamma_0, \gamma), \quad I_\Delta(\gamma_0, \gamma) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt,$$

где объединение средних берется по всем решениям $\gamma \in \Gamma(\gamma_0)$ для некоторого начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$. Покажем, что утверждение теоремы является следствием теоремы 1 из [4] о существовании усредненного дифференциального включения. В указанной теореме достаточно проверить условие асимптотической независимости средних

$I_{\Delta}(\gamma_0, \gamma)$ от начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$ (поскольку дифференциальное включение (2) является автономным). Это условие означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \gamma_{01}, \gamma_{02} \in \mathbb{R}^m \quad \forall \gamma_1 \in \Gamma(\gamma_{01}) \quad \exists \gamma_2 \in \Gamma(\gamma_{02}) : \\ |I_{\Delta}(\gamma_{01}, \gamma_1) - I_{\Delta}(\gamma_{02}, \gamma_2)| \leq \varepsilon$$

при всех $\Delta \geq \Delta(\varepsilon)$.

Поскольку функция f непрерывна, асимптотическая независимость средних от начального вектора согласно [4, теорема 1] гарантирует существование отрезка $[m_1, m_2]$, для которого

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \alpha(J_{\Delta}(\gamma_0), [m_1, m_2]) = 0$$

равномерно по $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$, где $\alpha(\cdot, \cdot)$ – отклонение по Хаусдорфу для множеств из $\mathbb{R}$. Поскольку в этом случае предел максимального среднего (1) совпадает с числом m_2 , достаточно проверить условие асимптотической независимости средних от начального вектора $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$.

Пусть $\gamma_{01} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $\gamma_{02} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Покажем сначала, что можно выбрать число $t_1 > 0$ и числа $\omega_j \in [\omega_1^j, \omega_2^j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, так, чтобы выполнялись равенства

$$b_j + t_1 \omega_j = a_j + T_j \quad (6)$$

для некоторого векторного $\varepsilon/2$ -почти периода $T = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ функции f . Положим $c_j = a_j - b_j$. Последнее уравнение ($j = m$) системы (6) преобразуем к виду

$$t_1 = \frac{c_m + T_m}{\omega_m}. \quad (7)$$

Условия $\omega_j \in [\omega_1^j, \omega_2^j]$ при $t_1 > 0$ согласно (6) запишем в виде эквивалентной системы неравенств

$$t_1 \omega_1^j - c_j \leq T_j \leq t_1 \omega_2^j - c_j, \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (8)$$

Здесь число T_j принадлежит отрезку, длина которого равна $t_1(\omega_2^j - \omega_1^j)$. Поэтому пусть

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq m-1} \{\omega_2^j - \omega_1^j\}, \quad \rho = \max_{1 \leq j \leq m-1} \{|\omega_1^j|\}.$$

Выберем число $t_{1,\min}$ так, чтобы $t_{1,\min} \delta/2 \geq l$. Кроме того, потребуем, чтобы

$$\frac{2l\rho}{t_{1,\min}|\omega_m|} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, можно принять

$$t_{1,\min} = \max \left\{ \frac{2l}{\delta}, \frac{4l\rho}{|\omega_m|\delta} \right\}.$$

Кроме того, пусть $t_{2,\max} = t_{1,\min} + 2l/|\omega_m|$.

Рассмотрим теперь семейство m -мерных промежутков

$$P(k) = [d_1^1, d_2^1] \times \dots \times [d_1^{m-1}, d_2^{m-1}] \times [kl, (k+1)l],$$

где $d_i^j = \tau_i^j \omega_i^j - c_j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а постоянные τ_1^j, τ_2^j определяются формулами

$$\tau_1^j = \begin{cases} t_{2,\max}, & \text{если } \omega_1^j > 0, \\ t_{1,\min}, & \text{если } \omega_1^j \leq 0, \end{cases} \quad \tau_2^j = \begin{cases} t_{1,\min}, & \text{если } \omega_2^j > 0, \\ t_{2,\max}, & \text{если } \omega_2^j \leq 0. \end{cases}$$

Так как $d_2^j - d_1^j = \tau_2^j(\omega_2^j - \omega_1^j + (1 - \tau_1^j/\tau_2^j)\omega_1^j)$, то $d_2^j - d_1^j \geq t_{1,\min}(\delta - \delta/2) = l$. Следовательно, для любого целого k существует векторный $\varepsilon/2$ -почти период

$$T = T\left(k, \frac{\varepsilon}{2}\right) = (T_{1,k}, T_{2,k}, \dots, T_{m,k}) \in P(k).$$

В частности, выполняются неравенства $kl \leq T_{m,k} \leq (k+1)l$, которые в случае $\omega_m > 0$ эквивалентны соотношениям

$$d_{m,k} \leq \frac{c_m + T_{m,k}}{\omega_m} \leq d_{m,k+1},$$

где $d_{m,k} = (c_m + kl)/\omega_m$.

В один из отрезков $[d_{m,k}, d_{m,k+1}]$ попадет и число $t_{1,\min}$. Соответствующее значение k обозначим через s . В таком случае, число $t_{1,\min} \in [d_{m,s}, d_{m,s+1}]$. Положим $T_j = T_{j,s+1}$ для любого j и по формуле (7) вычислим t_1 . Так как $d_{m,s+1} \leq t_1 \leq d_{m,s+2}$, то $0 \leq t_1 - t_{1,\min} \leq d_{m,s+2} - d_{m,s} = 2l/\omega_m$.

Если $\omega_m < 0$, то аналогично получим соотношения $d_{m,s+1} \leq (c_m + T_{m,s})/\omega_m \leq d_{m,s}$, при этом в указанном отрезке находится и число $t_{1,\min}$. Поэтому принимаем $T_j = T_{j,s-1}$ для любого j и определяем t_1 по формуле (7). В этом случае

$$0 \leq t_1 - t_{1,\min} \leq d_{m,s-1} - d_{m,s+1} = -\frac{2l}{\omega_m} = \frac{2l}{|\omega_m|}.$$

Таким образом, если $\omega_m \neq 0$, то всегда $t_{1,\min} \leq t_1 \leq t_{1,\max}$. Следовательно, если теперь определить числа $\omega_j = (T_j + c_j)/t_1$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, то $\omega_j \in [\omega_1^j, \omega_2^j]$, так как $(T_j + c_j)/t_1 \geq \tau_1^j \omega_1^j/t_1 \geq \omega_1^j$, а с другой стороны, $(T_j + c_j)/t_1 \leq \tau_2^j \omega_2^j/t_1 \leq \omega_2^j$.

Таким образом, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in P_\xi$, удовлетворяется система неравенств (8), а значит и система (6), при этом имеют место соотношения

$$t_{1,\min} \leq t_1 \leq t_{1,\max}, \quad (9)$$

где постоянные $t_{1,\min}, t_{1,\max}$ не зависят от начального вектора.

Возьмем теперь произвольное решение $\gamma_1 \in \Gamma(\gamma_{01})$ и построим решение $\gamma_2 \in \Gamma(\gamma_{02})$ следующего вида:

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_{02} + t\omega, & \text{если } 0 \leq t \leq t_1, \\ \gamma_1(t - t_1) + T, & \text{если } t \geq t_1, \end{cases}$$

где $T = (T_1, T_2, \dots, T_m)$. Тогда

$$\gamma_2(0) = \gamma_{02}, \quad \gamma_2(t_1) = \gamma_{01} + T.$$

Среднее $I_{\Delta}^2 = I_{\Delta}(\gamma_{02}, \gamma_2)$ представим в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} I_{\Delta}^2 &= \frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} f(\gamma_2(t)) dt + \frac{1}{\Delta} \int_{t_1}^{\Delta} f(\gamma_2(t)) dt \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} f(\gamma_2(t)) dt + \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta-t_1} f(\gamma_1(t) + T) dt. \end{aligned}$$

Здесь использовалось правило построения решения $\gamma_2(t)$. С другой стороны, среднее

$$I_{\Delta}^1 = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta-t_1}^{\Delta} f(\gamma_1(t)) dt + \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta-t_1} f(\gamma_1(t)) dt.$$

Сравнивая с предыдущим равенством и учитывая (9), получим оценку

$$|I_{\Delta}^1 - I_{\Delta}^2| \leq \frac{2t_1 K}{\Delta} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{2K t_{1,\max}}{\Delta} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, в определении асимптотической независимости средних от начальных условий можно положить $\Delta(\varepsilon) = 4K t_{1,\max}/\varepsilon$, что в условиях теоремы и доказывает существование предела максимального среднего.

Таким образом, для выпуклого невырожденного компакта $G \subset \mathbb{R}^m$ всегда существует предел максимального среднего для любой функции $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$.

Если множество G не является выпуклым, то воспользуемся известной связью между решениями задачи (2) и решениями дифференциального включения $\dot{\gamma} \in \text{co}(G)$ с теми же начальными условиями. Именно, на любом конечном отрезке любое решение последнего дифференциального включения можно аппроксимировать в равномерной метрике с наперед заданной точностью некоторым решением задачи (2) (см., например, [5, теорема 10, с. 219]).

Следовательно, асимптотическая независимость средних от начального вектора $a_0 \in \mathbb{R}^m$ имеет место и для невыпуклого невырожденного компакта $G \subset \mathbb{R}^m$.

Заметим, что формально теорема 1 из [4], на основании которой было доказано существование максимального среднего для выпуклого компакта G , сформулирована для дифференциальных включений с выпуклозначными правыми частями. Однако в доказательстве самой теоремы использовались только свойства непрерывности функции f (в [4, теорема 1] это многозначное отображение) и асимптотической независимости средних от начальных данных при условии, что все решения дифференциального включения определены в бесконечном промежутке $t \geq t_0$ при любых начальных условиях $t_0 \geq 0$, $a_0 \in \mathbb{R}^m$. Поскольку в нашем случае эти требования выполняются, ссылка на указанную теорему корректна, что и завершает доказательство первой части теоремы.

Допустим теперь, что в классе функций $\Pi(\mathbb{R}^m)$ предел максимального среднего (1) существует равномерно по начальным условиям задачи (2), и предположим, что компакт G является вырожденным. Следовательно, множество G содержится в гиперплоскости Γ_m , проходящей через нуль пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда если ввести координаты γ точно так же, как и при доказательстве достаточности, то для функции $f(\gamma) = \sin \gamma_m$, заданной в этих координатах, предел максимального среднего (1) равен $\sin \gamma_m(0)$ (так как $\dot{\gamma}_m = 0$) и поэтому зависит от начального условия. Теорема 1 доказана.

Отметим, что для любого компакта $G \subset \mathbb{R}^m$ всегда можно указать функцию $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$ такую, что предел максимального среднего (1) для нее существует равномерно по начальному вектору $a_0 \in \mathbb{R}^m$; при этом если компакт $G \neq \{0\}$, то такая функция f отлична от постоянной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из существования предела максимального среднего (1) равномерно по начальным условиям следует, что для любого начального условия $(t_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ и любого числа $\varepsilon_k = 1/k$ существует $\Delta_k > 0$, не зависящее от выбора начального условия, такое, что на любом отрезке $[t_0, t_0 + \Delta_k]$ найдется решение $\gamma_k(t)$ дифференциального включения (3), $\gamma(t_0) = \gamma_0$, для которого выполняется соотношение

$$\frac{1}{\Delta_k} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta_k} f(\gamma_k(t)) dt = M_f + \varphi_k, \quad (10)$$

где $|\varphi_k| < \varepsilon_k$. При этом можно считать, что последовательность $\{\Delta_k\}$ является неубывающей.

Решение $\gamma(t)$ строится последовательно на отрезках длины Δ_k с использованием решений вида (10) для соответствующих начальных условий, при этом отрезок длины Δ_k откладывается вправо n_k раз, где целые n_k образуют также неубывающую последовательность и выбираются так, чтобы при $k \geq 2$ выполнялись неравенства

$$\frac{n_{k-1}}{n_k} < 2^{-k}, \quad \frac{\Delta_{k+1} K_1}{n_1 + n_2 \Delta_2 + \dots + n_k \Delta_k} < \varepsilon_{k+1}, \quad (11)$$

где постоянная $K_1 = \max\{1, K\}$.

На первом из отрезков $[0, \Delta_1]$ функция $\gamma(t)$ совпадает с решением $\gamma_1(t)$, $\gamma_1(0) = a_0$, для которого выполняется соотношение (10). В общем случае на k -й серии последовательных отрезков (их число равно n_k) каждое последующее решение непрерывно продолжает предыдущее и удовлетворяет равенству вида (10). В результате решение $\gamma(t)$ оказывается построенным на всей полуоси $[0, \infty)$.

Положим теперь $\Delta_{k-1,j} = n_1 \Delta_1 + n_2 \Delta_2 + \dots + n_{k-1} \Delta_{k-1} + j \Delta_k$, где $0 \leq j \leq n_k$, $k \geq 2$. На отрезке $[0, \Delta_{k-1,j}]$ среднее представим в виде

$$\frac{1}{\Delta_{k-1,j}} \int_0^{\Delta_{k-1,j}} f(\gamma(t)) dt = \frac{1}{\Delta_{k-1,j}} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{n_i} \Delta_i (M_f + \varphi_{i,s}) + \sum_{s=1}^j \Delta_k (M_f + \varphi_{k,s}) \right),$$

где каждая из функций $\varphi_{i,s}$ допускает оценку $|\varphi_{i,s}| < \varepsilon_i$, как это следует из правила построения решения $\gamma(t)$. Отсюда

$$\frac{1}{\Delta_{k-1,j}} \int_0^{\Delta_{k-1,j}} f(\gamma(t)) dt = M_f + \eta_{k-1,j}, \quad (12)$$

где для функции $\eta_{k-1,j}$ получим оценку

$$|\eta_{k-1,j}| \leq \frac{j \Delta_k \varepsilon_k}{\Delta_{k-1,j}} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_i \Delta_i \varepsilon_i}{\Delta_{k-1,j}}.$$

Согласно (11) правая часть последнего неравенства не превосходит величины $1/k + (k-2)/2^{k-1} + 1/(k-1)$, поэтому заведомо выполняется соотношение

$$|\eta_{k-1,j}| < \frac{k-2}{2^{k-1}} + \frac{2}{k-1}. \quad (13)$$

Если теперь $\Delta_{k-1,j} \leq \Delta \leq \Delta_{k-1,j} + \Delta_k$, то среднее представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt &= \frac{1}{\Delta_{k-1,j}} \int_0^{\Delta_{k-1,j}} f(\gamma(t)) dt + \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_{k-1,j}} \right) \int_0^{\Delta_{k-1,j}} f(\gamma(t)) dt \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta_{k-1,j}}^\Delta f(\gamma(t)) dt. \end{aligned}$$

Отсюда на основании (12), (13) следует

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt = M_f + \sigma(\Delta),$$

где

$$|\sigma(\Delta)| \leq |\eta_{k-1,j}| + 2\varepsilon_k \leq \frac{k-2}{2^{k-1}} + \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sigma(\Delta) = 0.$$

Это и означает, что для построенного решения $\gamma(t)$ выполняется соотношение (4), что и требовалось.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №5. С. 759–767.
- [2] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998.
- [3] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
- [4] Филатов О.П. О существовании усредненного дифференциального включения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2118–2127.
- [5] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.

Самарский государственный университет
E-mail: filt@ssu.samara.ru

Поступило
30.07.1997
Исправленный вариант
29.01.1999