Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Буданов, О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 133–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:37:54

О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы

А. В. Буданов

Пирс в своей работе [1] поставил проблему описания элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов примарной абелевой группы в терминах их действия на группе. Проблема описания радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы в этом смысле была поставлена в [2; проблема 18]. В настоящей работе изучается радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной абелевой группы без кручения и решается упомянутая выше проблема (теорема 4, теорема 8). Все рассматриваемые группы являются абелевыми без кручения. Пусть G – группа; обозначим через $E(G)$ кольцо ее эндоморфизмов. Через $H(G)$ обозначается множество тех эндоморфизмов $\alpha \in E(G)$, для которых $\alpha x = 0$ при всех $x \in D(G)$, где $D(G)$ – делимая часть группы G , и для любого $x \in G \setminus D(G)$ из того, что $h_p(x) < \infty$ следует $h_p(\alpha x) > h_p(x)$, где через $h_p(x)$ обозначена p -высота элемента x . Через $F(G)$ обозначим множество всех эндоморфизмов группы G , образ которых имеет конечный ранг. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы G будем обозначать $J(E(G))$. Далее будем рассматривать только абелевы группы без кручения. Все обозначения и не определяемые в работе термины можно найти в [2] и [3].

Известно [2; § 22], что если G – однородная вполне разложимая группа, то $J(E(G)) = H(G) \cap F(G)$. Для однородной сепарабельной группы известны лишь включения

$$H(G) \cap F(G) \subseteq J(E(G)) \subseteq H(G).$$

Прежде всего сузим класс рассматриваемых групп. Пусть $\pi(G)$ обозначает множество таких простых чисел p , что $pG \neq G$. Напомним, что группа G называется *почти делимой*, если $1 \leq |\pi(G)| < \aleph_0$.

ЛЕММА 1. *Если однородная сепарабельная группа G не почти делима, то $H(G) = 0$, а значит, и $J(E(G)) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не почти делимость означает, что либо группа G делима, либо множество $\pi(G)$ бесконечно. В случае делимости группы G равенство $H(G) = 0$ сразу следует из определения идеала $H(G)$. Рассмотрим второй случай. Пусть $p_1, p_2, \dots$ – те простые числа, для которых группа G не p -делима. Возьмем $\alpha \in H(G)$ и предположим, что $\alpha g \neq 0$ для некоторого $g \in G$. Из выбора простых чисел $p_1, p_2, \dots$ следует, что $h_{p_k}(g) < \infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Но тогда $h_{p_k}(g) < h_{p_k}(\alpha g)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, типы элементов g и αg различны, а это противоречит однородности группы G .

Заметим, что в случае, когда G – редуцированная группа, $H(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} pE(G)$. Если же группа G почти делима, то множество $\pi(G)$ конечно и

$$H(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} pE(G) = \left(\prod_{p \in \pi(G)} p \right) E(G).$$

ЛЕММА 2. *Пусть G – группа без кручения. Тогда идеал $H(G)$ замкнут в конечной топологии кольца $E(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что замыкание $\overline{H(G)}$ идеала $H(G)$ совпадает с $H(G)$. Пусть $\alpha \in \overline{H(G)}$, а g – произвольный элемент группы G . Согласно определению замыкания и заданию конечной топологии кольца $E(G)$ найдется эндоморфизм $\beta \in H(G)$,

совпадающий с α на элементе g , т.е. $\alpha g = \beta g$. Следовательно, $\alpha g = 0$, если g – делимый элемент, а если это не так, то из того, что $h_p(g) < \infty$, будет следовать $h_p(\alpha g) > h_p(g)$. Таким образом, $\alpha \in H(G)$.

В дальнейшем нам потребуется следующий факт из [2; § 22].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G – редуцированная группа без кручения. Включение $H \subseteq J(E(G))$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие $(*)$ для идеала H :

$$\text{для любых элементов } g \in G \text{ и } \alpha \in H \text{ последовательность } \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \\ b_n = g + \alpha g + \alpha^2 g + \dots + \alpha^{n-1} g, \text{ сходится в } \mathbb{Z}\text{-адической топологии группы } G. \quad (*)$$

Условия, эквивалентные равенству $H(G) = J(E(G))$, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Для однородной сепарабельной группы без кручения G следующие условия эквивалентны:

- 1) $J(E(G)) = H(G)$;
- 2) для идеала $H(G)$ выполняется условие $(*)$;
- 3) радикал $J(E(G))$ замкнут в конечной топологии кольца $E(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 2)$ сразу следует из включения $J(E(G)) \subseteq H(G)$ и предложения 3.

Докажем эквивалентность $1) \Leftrightarrow 3)$. Лемма 2 влечет импликацию $1) \Rightarrow 3)$ и остается проверить, что из 3) следует 2). Пусть радикал замкнут в конечной топологии кольца $E(G)$. Это означает, что $J(E(G)) = \overline{J(E(G))}$. Поэтому достаточно показать, что $H(G) \subseteq \overline{J(E(G))}$ (включение $J(E(G)) \subseteq H(G)$ уже отмечалось ранее). Пусть $\alpha \in H(G)$ и $U(\alpha, X) = \{\beta \in E(G) \mid \beta x = \alpha x \text{ для всех } x \in X\}$ – любая окрестность эндоморфизма α , порожденная конечным подмножеством X группы G . Так как группа G сепарабельна, существует такая вполне разложимая подгруппа конечного ранга A группы G , что $X \subset A$, $\alpha X \subset A$ и $G = A \oplus B$. Пусть π обозначает проекцию G на A . Тогда, очевидно, $\pi\alpha \in H(G) \cap F(G)$, а значит, $\pi\alpha \in J(E(G))$. По построению подгруппы A , $\pi\alpha \in U(\alpha, X)$. Таким образом, в произвольной окрестности $\alpha \in H(G)$ найден эндоморфизм, принадлежащий радикалу. Следовательно, $H(G) \subseteq \overline{J(E(G))}$.

Однако, следующее предложение показывает, что класс групп, не попадающих под условия только что доказанной теоремы, весьма широк.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть G – однородная почти делимая сепарабельная группа. Если существует бесконечное прямое разложение $G = \bigoplus_{i \in I} B_i$, то $J(E(G)) \neq H(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известному результату Фукса [3; § 87] прямые слагаемые сепарабельных групп сепарабельны. Поэтому в разложении группы $G = \bigoplus_{i \in I} B_i$ у каждой подгруппы B_i есть вполне разложимое прямое слагаемое A_i . То есть можно записать $G = \bigoplus_{i \in I} (A_i \oplus C_i)$. Теперь понятно, что условие предложения гарантирует существование разложения $G = A \oplus B$, в котором A – однородная вполне разложимая группа бесконечного ранга. Учитывая это разложение, кольцо $E(G)$ можно отождествить [2; теорема 3.11] с кольцом обобщенных матриц вида

$$\begin{pmatrix} E(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & E(B) \end{pmatrix}.$$

Пусть π_A и π_B обозначают проекции группы G на подгруппы A и B соответственно. Тогда согласно результатам работы [4] радикал кольца $E(G)$ равен множеству матриц

вида

$$\begin{pmatrix} \pi_A J(E(G)) \pi_A & \pi_A J(E(G)) \pi_B \\ \pi_B J(E(G)) \pi_A & \pi_B J(E(G)) \pi_B \end{pmatrix},$$

причем $J(E(A)) = \pi_A J(E(G)) \pi_A$. Предположим теперь, что $J(E(G)) = H(G)$. Ранее было замечено, что для почти делимой группы G имеет место равенство $H(G) = nE(G)$, где через n обозначено произведение всех тех простых чисел, по которым группа G не p -делима. Тогда

$$J(E(G)) = H(G) = nE(G) = \begin{pmatrix} nE(A) & n\text{Hom}(B, A) \\ n\text{Hom}(A, B) & nE(B) \end{pmatrix}.$$

Отсюда $J(E(A)) = nE(A)$. Однако, для однородной вполне разложимой группы A доказано, что $J(E(A)) = H(A) \cap F(A)$ [2; следствие 22.10]. Ввиду бесконечности ранга группы A получим противоречие с предыдущим равенством. То есть предположение $J(E(G)) = H(G)$ неверно.

ЛЕММА 6. Пусть G – однородная сепарабельная группа, A_i , $i \in \mathbb{N}$, – группы ранга 1 и типа $t(G)$. Тогда для любой последовательности $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов группы G существует гомоморфизм $\varphi: \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i \rightarrow G$ такой, что последовательность $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ содержится в $\text{Im } \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать существование вполне разложимой подгруппы $B = \bigoplus_{i \in J} B_i$, $|J| \leq \aleph_0$, группы G , содержащей последовательность $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда ввиду того, что группы ранга один одного типа изоморфны, можно считать, что группа B изоморфна некоторому прямому слагаемому группы A , а значит, может быть построен эпиморфизм группы A на подгруппу B группы G , который и будет искомым гомоморфизмом. Для построения такой подгруппы воспользуемся следующим характеристическим свойством однородных сепарабельных групп [3; § 87]: однородная группа сепарабельна тогда и только тогда, когда каждая ее чистая подгруппа конечного ранга выделяется прямым слагаемым. Положим $B_1 = \langle g_1 \rangle_*$. Пусть уже построены подгруппы $B_1, B_2, \dots, B_k$ группы G такие, что их сумма является прямой и выделяется прямым слагаемым в группе G , причем $\{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subset B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k$. Пусть l – наименьшее натуральное число со свойством $g_{k+l} \notin B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k$ (если такого числа не существует, считаем, что построение закончено на k -м шаге). По предположению индукции $G = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k \oplus G_k$. Значит, можно записать $g_{k+l} = b_k + c_k$, где $b_k \in B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k$, а $c_k \in G_k$. Возьмем $B_{k+1} = \langle c_k \rangle_*$. Очевидно, что сумма подгрупп $B_1, B_2, \dots, B_{k+1}$ прямая, выделяется прямым слагаемым в группе G и $\{g_1, g_2, \dots, g_{k+1}\} \subset B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_{k+1}$. Получаем последовательность (возможно конечную) подгрупп $B_1, B_2, \dots$. Из построения следует, что их сумма (обозначим ее через B) будет прямой, и $g_n \in B$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, искомая подгруппа найдена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть G – однородная сепарабельная группа и $\alpha \in J(E(G))$. Тогда каково бы ни было разложение $G = \bigoplus_{i \in I} B_i$, образ эндоморфизма α содержится в конечном числе прямых слагаемых группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, доказательство требуется только если множество I бесконечно. Допустим, что утверждение неверно. Тогда найдется бесконечное множество таких прямых слагаемых $B_1, B_2, \dots$ группы G и такой эндоморфизм $\alpha \in J(E(G))$, что $\text{Im } \alpha \cap B_i \neq 0$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Пусть $0 \neq a_i \in \text{Im } \alpha \cap B_i$, $i \in \mathbb{N}$. Так как прямые слагаемые сепарабельных групп сепарабельны и однородная группа сепарабельна тогда и только тогда, когда каждая ее чистая подгруппа конечного ранга выделяется прямым слагаемым [3; § 87], существуют разложения $B_i = A_i \oplus C_i$, где $A_i = \langle a_i \rangle_*$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть A обозначает прямую сумму всех только что построенных групп A_i . Тогда можно записать

$G = A \oplus B$. Пусть b_i – прообразы элементов a_i при эндоморфизме α . Тогда предыдущая лемма гарантирует существование гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow G$ такого, что $b_i \in \text{Im } \varphi$ при всех $i \in I$. В этом случае очевидно, что $\alpha\varphi\pi_A \in J(E(G))$. Тогда, также как и в предложении 5, $\pi_A\alpha\varphi\pi_A \in J(E(A))$. С другой стороны, несложно убедиться, что ранг образа последнего эндоморфизма бесконечен, что противоречит равенству $J(E(A)) = H(A) \cap F(A)$.

Докажем один из основных результатов данной работы.

ТЕОРЕМА 8. *Для однородной сепарабельной группы без кручения G следующие условия эквивалентны:*

- 1) $J(E(G)) = H(G) \cap F(G)$;
- 2) для любого $\alpha \in J(E(G))$ существует такое разложение группы G , $G = A \oplus B$, где A – вполне разложимая группа такая, что $\text{Im } \alpha \subseteq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $J(E(G)) = H(G) \cap F(G)$, то для любого $\alpha \in J(E(G))$ ранг подгруппы $\text{Im } \alpha$ конечен. Вкладывая какую-нибудь максимальную линейно независимую систему элементов из $\text{Im } \alpha$ во вполне разложимое прямое слагаемое A группы G , и учитывая, что прямые слагаемые являются чистыми подгруппами, получим, что $\text{Im } \alpha \subseteq A$, а следовательно, условие 2) выполнено.

Пусть выполняется 2). Допустим, что нашелся эндоморфизм $\alpha \in J(E(G))$, ранг образа которого бесконечен. Тогда в разложении, получаемом из условия 2), группа A имеет бесконечный ранг (а значит в ее разложении $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ в прямую сумму групп ранга 1 множество I бесконечно) и образ α не содержится ни в каком конечном наборе прямых слагаемых ранга 1 группы A . То есть нашлось такое прямое разложение группы G , что образ эндоморфизма $\alpha \in J(E(G))$ не содержится ни в каком конечном наборе прямых слагаемых этого разложения. Получили противоречие с предложением 7.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. S. Pierce, *Topics in Abelian Groups* (New Mexico State Univ., 1962), Scott, Foresman and Co., Chicago, Ill., 1963, 215–310. [2] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов*, Томск. ГУ, Томск, 2002. [3] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977. [4] Е. Ю. Каравдина, *Международная конференция по математике и механике. Избранные доклады*, Томск. ГУ, Томск, 2003, 19–27.

А. В. Буданов

Томский государственный университет

E-mail: alexandrbud@mail.ru

Поступило

20.08.2007

Исправленный вариант

22.06.2009