Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Демидов, Д. А. Платушихин, Явная формула для градиента гармонической функции по ее аналитическим данным Коши на аналитической кривой, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 141–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:18:36

Явная формула для градиента гармонической функции по ее аналитическим данным Коши на аналитической кривой

А. С. Демидов, Д. А. Платушихин

Различные аспекты задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } V_\Gamma, \quad u|_{P_s \in \Gamma} = F(s), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{P_s \in \Gamma} = G(s), \quad (1)$$

в некоторой окрестности V_Γ аналитической кривой Γ изучались в работах многих авторов (см., например, [1]–[3]). В данной заметке мы предполагаем, что аналитическая кривая Γ длины 2π является границей односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, ν – это внешняя (относительно области Ω) единичная нормаль в точке $P_s \in \Gamma$, а

$$F: s \mapsto F(s) = \operatorname{Re} \sum_{k \geq 0} f_k e^{iks} \quad \text{и} \quad G: s \mapsto G(s) = \operatorname{Re} \sum_{k \geq 0} g_k e^{iks} \quad (2)$$

– это вещественнозначные аналитические функции натурального параметра $s \in \mathbb{R}/2\pi$, соответствующего точке $P_s \in \Gamma$. Кривая Γ полностью определяется заданием 2π -периодической функции

$$Q: \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi \ni s \mapsto Q(s) = N(s) - s,$$

где $N(s)$ – угол между осью абсцисс и нормалью ν к Γ в точке $P_s \in \Gamma$. Как известно, (см., например, [4; с. 137]), коэффициенты L_k и M_k в Фурье-представлении

$$Q(s) = L_0 + \sum_{k \geq 1} (L_k \cos ks + M_k \sin ks) \quad (3)$$

аналитической функции Q допускают оценки

$$|L_k| \leq C e^{-k\tau}, \quad |M_k| \leq C e^{-k\tau}, \quad (4)$$

где константа C мажорирует в τ -окрестности кривой Γ модуль аналитической функции $\mathcal{Q}$, ограничением которой на Γ является функция Q .

Ниже выводятся формулы, задающие решение u задачи (1) и его градиент в виде степенных рядов с коэффициентами, явно зависящими от параметров f_k , g_k , L_k и M_k , фигурирующих в формулах (2), (3). Это позволяет вычислить с любой степенью точности как решение, так и градиент решения этой некорректной (по Адамару) задачи. Выведенные здесь формулы дают также возможность свести обратную задачу со свободной границей для уравнения Грэда–Шафранова (в цилиндрическом приближении) к соответствующей задаче в фиксированной области (см., например, [5]).

Отметим, прежде всего, что формула

$$V_\mathbb{T} \ni \rho e^{i\theta} \mapsto U(\rho, \theta) \stackrel{(2)}{=} \operatorname{Re} \left(f_0 + g_0 \ln \rho + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \left\{ \left(f_k + \frac{g_k}{k} \right) \rho^k + \left(f_k - \frac{g_k}{k} \right) \rho^{-k} \right\} e^{ik\theta} \right)$$

задает в некоторой (двухсторонней) окрестности $V_\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ единичной окружности $\mathbb{T}$ решение такой задачи:

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } V_\mathbb{T}, \quad U(\rho, \theta)|_{\rho=1} = F(\theta), \quad \left. \frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = G(\theta).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00500).

В нижеследующей теореме 1 доказывается существование однолистного отображения $\zeta: V_\Gamma \ni z \mapsto \zeta(z) \in V_\mathbb{T}$ некоторых окрестностей кривой Γ и окружности $\mathbb{T}$, для которого $|d\zeta/dz| \equiv 1$ на Γ , иначе говоря, отображение ζ изометрично на Γ . Тем самым, формула

$$u(x, y) = U(\rho(x, y), \theta(x, y)), \quad \text{где} \quad \rho(x, y)e^{i\theta(x, y)} = \zeta(x + iy),$$

задает решение задачи (1).

ТЕОРЕМА 1 (ср. [6], [7]). *В некоторой (двухсторонней) окрестности $V_\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ единичной окружности $\mathbb{T}$ определено однолистное отображение*

$$z: V_\mathbb{T} \ni \zeta = \rho e^{i\theta} \mapsto z(\zeta) = P_0 + \int_1^\zeta \exp(A + iB) d\zeta \in V_\Gamma = z(V_\mathbb{T}), \quad P_0 \in \Gamma. \quad (5)$$

Здесь $A + iB = \ln dz/d\zeta$ – аналитическая функция комплексного переменного ζ , задаваемая решением следующей задачи Коши:

$$B(\rho, \theta)|_{\rho=1} = N(\theta) - \theta, \quad A|_{\rho=1} = 0 \quad \left(\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0 \right), \quad \rho = |\zeta|, \quad \theta = \arg \zeta. \quad (6)$$

А именно,

$$A: V_\mathbb{T} \ni \zeta = \rho e^{i\theta} \mapsto A(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (\rho^k - \rho^{-k}) \{M_k \cos k\theta - L_k \sin k\theta\}, \quad (7)$$

$$B: V_\mathbb{T} \ni \zeta = \rho e^{i\theta} \mapsto B(\rho, \theta) = L_0 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (\rho^k + \rho^{-k}) \{L_k \cos k\theta + M_k \sin k\theta\}, \quad (8)$$

где L_k и M_k – коэффициенты, фигурирующие в формуле (3). При этом отображение (5) изометрично на $\mathbb{T}$, т.е.

$$\left| \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} \right| \equiv 1 \quad \text{для} \quad \zeta \in \mathbb{T}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценок (4) формулы (7), (8) задают в некоторой окрестности окружности $\mathbb{T}$ аналитическую функцию $A + iB$, а тем самым, и отображение (5).

Имеем: $B \stackrel{(5)}{=} \arg dz/d\zeta$, т.е. $B(\rho, \theta)|_{\rho=1} = N(s(\theta)) - \theta$, где $s(\theta)$ – длина дуги кривой Γ , параметризованная точкой $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Изометрия между $\mathbb{T}$ и Γ эквивалентна условию $e^A|_{\rho=1} \equiv 1$, ибо $e^A|_{\rho=1} = ds(\theta)/d\theta$. Без ограничения общности можно считать, что $s(\theta) = \theta$. Тем самым, $N(s(\theta)) = N(\theta)$ равносильно $B(\rho, \theta)|_{\rho=1} = N(\theta) - \theta$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие формулы:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) &= \left(\frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \rho} \cos N(\rho, \theta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \theta} \sin N(\rho, \theta) \right) e^{-A(\rho, \theta)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) &= \left(\frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \rho} \sin N(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \theta} \cos N(\rho, \theta) \right) e^{-A(\rho, \theta)}. \end{aligned}$$

Здесь $x(\rho, \theta) + iy(\rho, \theta) \stackrel{(5)}{=} z(\rho e^{i\theta})$, $A(\rho, \theta)$ и $B(\rho, \theta)$ представлены формулами (7) и (8), а

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{k \geq 0} \{k f_k (\rho^{k-1} - \rho^{-k-1}) + g_k (\rho^{k-1} + \rho^{-k-1})\} e^{ik\theta}, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k \geq 1} \{k f_k (\rho^k + \rho^{-k}) + g_k (\rho^k - \rho^{-k})\} e^{ik\theta}, \end{aligned}$$

где f_k и g_k – коэффициенты, фигурирующие в формулах (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \quad \frac{dz}{d\zeta} \stackrel{(5)}{=} e^{A+iB}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = e^A \cos B, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -e^A \sin B, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = e^A \sin B, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = e^A \cos B. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (11)$$

Вспоминая, что $B + \theta \stackrel{(6)}{=} N$, получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \stackrel{(10),(11)}{=} e^A \begin{pmatrix} \cos N & -\rho \sin N \\ \sin N & \rho \cos N \end{pmatrix},$$

в силу чего (вводя обозначения $\rho_x = \partial \rho / \partial x$, $\rho_y = \partial \rho / \partial y$, $\theta_x = \partial \theta / \partial x$, $\theta_y = \partial \theta / \partial y$) имеем

$$\begin{pmatrix} \rho_x & \rho_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos N & \sin N \\ -\frac{1}{\rho} \sin N & \frac{1}{\rho} \cos N \end{pmatrix} e^{-A}.$$

Остается учесть формулы $u_x = U_\rho \rho_x + U_\theta \theta_x$ и $u_y = U_\rho \rho_y + U_\theta \theta_y$.

Авторы благодарны А. М. Денисову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Мергелян, *УМН*, **11**:5 (1956), 3–26. [2] М. М. Лаврентьев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **20**:6 (1956), 819–842. [3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974. [4] В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, РХД, Ижевск, 2000. [5] A. S. Demidov, M. Moussaoui, *Inverse Problems*, **20**:1 (2004), 137–154. [6] А. С. Демидов, *Докл. РАН*, **346**:6 (1996), 732–734. [7] A. S. Demidov, V. V. Petrova, V. M. Silantiev, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **323**:4 (1996), 353–358.

А. С. Демидов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: asd@math.msu.su

Поступило

30.06.2009

Д. А. Платушихин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова