Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Рютин, О равномерно непрерывных операторах почти наилучшего обобщенного рационального приближения, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 147–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:24:30

О равномерно непрерывных операторах почти наилучшего обобщенного рационального приближения

К. С. Рютин

Пусть X – нормированное пространство, $M \subset X$, $\varepsilon \geq 0$. Отображение $\Phi: X \rightarrow M$ называется *мультипликативной ε -выборкой из X на M* , если для всех $x \in X$ выполнено

$$\|\Phi(x) - x\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x, M), \quad \text{где } \rho(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|.$$

Выборка называется *непрерывной (равномерно непрерывной)*, если Φ непрерывно (равномерно непрерывно). Отметим, что при $\varepsilon = 0$ получается определение выборки из метрической проекции.

Пусть K – связный метрический компакт, $X = C(K)$ и задана пара подпространств (V, W) в X такая, что $\dim V = m$, $\dim W = n$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Всюду ниже

$$W^+ = \{w \in W : w(\tau) \geq 0 \text{ для любого } \tau \in [0; 1]\},$$

B – единичный шар в X , а $\|\cdot\|$ означает норму в X . Предположим, что существует функция $w_0 \in W$ такая, что $w_0 > 0$ на K и что $A(w) = \{\tau \in K : w(\tau) \neq 0\}$ – открытое всюду плотное подмножество компакта K для произвольной функции $w \in W \setminus \{0\}$. Рассмотрим множество обобщенных дробей

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{V,W} = \text{Cl} \left\{ r = \frac{v}{w} : v \in V, w \in W, w > 0 \text{ на } K \right\},$$

где Cl означает замыкание в X . Алгебраические рациональные функции $\mathcal{R}_{m,n}$ и конечномерные подпространства являются примерами множеств обобщенных дробей.

Известно [1], [2], что оператор метрической проекции на множество $\mathcal{R}_{m,n}$, $n \geq 1$, в $C[0; 1]$ не является непрерывным, а оператор метрической проекции на множество алгебраических полиномов $\mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, в $C[0; 1]$ не является равномерно непрерывным на шаре пространства. Из результатов [3] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε -выборка из $C(K)$ на множество $\mathcal{R}_{V,W}$, но при некоторых условиях на V, W (например, в случае $\mathcal{R}_{0,n}$, $n \geq 1$) при $\varepsilon < 2$ не может быть равномерно непрерывной на шаре мультипликативной ε -выборки на $\mathcal{R}_{V,W}$ (см. [5]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{R}_{V,W} \cap B$ компактно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует равномерно непрерывная мультипликативная ε -выборка $\Phi: B \rightarrow \mathcal{R}_{V,W}$.

Заметим, что множество W^+ является непустым замкнутым выпуклым конусом в W и $W^+ \neq W$. Для любой точки $w \in \partial W^+$ найдется $\tau \in K: w(\tau) = 0$, а для любой точки $w \in \text{int } W^+$ справедливо неравенство $w(\tau) > 0$ на K .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество $\mathcal{R}$ можно определить и другим (равносильным) способом, а именно $\mathcal{R} = \{v/w : v \in V, w \in W^+ \setminus \{0\}\}$. Тем самым, для любых $v \in V, w \in W^+ \setminus \{0\}$ дробь $r = v/w$ корректно определена, т.е. имеется функция $r \in X$ такая, что $r(\tau) \equiv v(\tau)/w(\tau)$ на $A(w)$. Тем самым, можно доопределить отношение функций $v(\tau), w(\tau)$ на всем K следующим образом: $v(\tau)/w(\tau) = r(\tau)$. В дальнейшем отношение v/w мы будем понимать именно в таком смысле.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00208) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3233.2008.1).

В пространстве W можно выбрать аффинную гиперплоскость Γ такую, что она будет пересекать каждый луч с началом в нуле, лежащий в W^+ , ровно в одной точке и при этом для любой точки $w \in \Gamma \cap W^+$ выполнено неравенство $\|w\| \geq 1$. Докажем это. Можно выбрать точки $\tau_j \in K$, $1 \leq j \leq n$, и базис $\{\omega_j\}$, $1 \leq j \leq n$, в W такие, что $\omega_i(\tau_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Пусть $w = \sum_{j=1}^n c_j \omega_j \in W^+$, где $c_j \in \mathbb{R}$; тогда $w(\tau_j) \geq 0$ для любого индекса $1 \leq j \leq n$. Следовательно, $c_j \geq 0$ для любого $1 \leq j \leq n$. В качестве Γ можно взять следующую аффинную гиперплоскость: $\{\sum_{j=1}^n c_j \omega_j : \sum_{j=1}^n c_j = H\}$, где $H > 0$ достаточно велико. Положим

$$Q = \Gamma \cap W^+, \quad \Lambda = \{(v, w) : v \in V, w \in Q\}$$

и определим отображение $T: \Lambda \rightarrow \mathcal{R}$ следующим образом: $T(v, w) = v/w$. Отметим, что множество Q выпуклое и компактное. Следовательно, существует число $a_0 > 0$ такое, что $\|w\| \leq a_0$ при $w \in Q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любого числа $\alpha > 0$ найдется число $q = q(\alpha) > 0$ такое, что для всех $w_1, w \in Q$ найдется точка $w_0 \in Q$ такая, что $\|w - w_0\| \leq \alpha$ и на K выполнено неравенство $w_1(\tau) \leq q w_0(\tau)$.

Рассмотрим функционал $g_\alpha(w) = \max_{z \in Q: \|z - w\| \leq \alpha} \min_{\tau \in K} z(\tau)$. Заметим, что для любого $w \in Q$ выполнено неравенство $g_\alpha(w) > 0$. В самом деле, найдется функция $\hat{w} \in Q$, $\hat{w} \neq w$, такая, что $\hat{w} > 0$ на K . Взяв z из отрезка $[w; \hat{w}]$, получим неравенство $g_\alpha(w) > 0$. Из компактности Q следует, что найдется $q_1(\alpha) = \min_{w \in Q} g_\alpha(w) > 0$. Положив $q(\alpha) = a_0/q_1(\alpha)$, установим справедливость замечания.

Проверим непрерывность отображения T . Пусть (от противного) имеется последовательность $y_j = (v_j, w_j) \rightarrow y_0 = (v_0, w_0)$, $j \in \mathbb{N}$, и при этом для всякого $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|T(y_j) - T(y_0)\| \geq h > 0$ (разумеется, $y_j \in \Lambda$, $j \in \mathbb{Z}^+$). Возможны два случая:

- 1) последовательность $\|T(y_j)\|$ ограничена и, следовательно, можно выделить подпоследовательность $y_j \rightarrow y_0$ такую, что $T(y_j) \rightarrow r \in \mathcal{R}$;
- 2) можно выделить подпоследовательность y_j такую, что $\|T(y_j)\| \rightarrow \infty$.

Покажем, что случай 2) невозможен. Можно подобрать последовательность чисел $c_j > 0$, $c_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, для которой при любом $j \in \mathbb{N}$ выполнено $\|c_j T(y_j)\| = 1$. Считаем, что $c_j T(y_j) \rightarrow \tilde{r} \in \mathcal{R}$ при $j \rightarrow \infty$. Заметим, что $\tilde{r} \equiv 0$ на множестве $A(w_0)$ и, следовательно, $\tilde{r} \equiv 0$. Последнее противоречит тому, что $\|\tilde{r}\| = 1$. Аналогичным образом в 1-ом случае можно показать, что $r \equiv v_0/w_0$.

Пусть $D = \{y \in \Lambda : \|T(y)\| \leq 10\}$. Заметим, что D – компактное подмножество Λ . В самом деле, ограниченность D очевидна, а замкнутость легко следует из компактности Q и замечания 1. Всюду далее $\rho(x) = \rho(x, \mathcal{R})$, $\rho_j = \rho(x_j, \mathcal{R})$, $j = 1, 2$.

ЛЕММА 1. Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$, а

$$Z(x) := \{z \in \Lambda : \|T(z) - x\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x)\},$$

где $x \in B$. Тогда $Z(x)$ – ограниченное выпуклое замкнутое подмножество Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $x \in B$ справедливо включение $Z(x) \subset D$. Отсюда следует, что $Z(x)$ – компактное подмножество Λ . Проверим выпуклость $Z(x)$.

Следующая конструкция была фактически использована Конягиным в работе [3]. Пусть $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in Z(x)$; докажем, что точка $(v_\lambda, w_\lambda) \in Z(x)$, где

$$v_\lambda = \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2, \quad w_\lambda = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2, \quad \text{для любого } \lambda \in [0; 1].$$

Для любой точки $\tau \in A(w_1) \cap A(w_2)$ имеем $|v_j(\tau) - x(\tau)w_j(\tau)| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x)w_j(\tau)$, $j = 1, 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} |v_\lambda(\tau) - x(\tau)w_\lambda(\tau)| &\leq \lambda|v_1(\tau) - x(\tau)w_1(\tau)| + (1 - \lambda)|v_2(\tau) - x(\tau)w_2(\tau)| \\ &\leq \lambda(1 + \varepsilon)\rho(x)w_1(\tau) + (1 - \lambda)(1 + \varepsilon)\rho(x)w_2(\tau) = (1 + \varepsilon)\rho(x)w_\lambda(\tau) \end{aligned}$$

для любой точки $\tau \in A(w_1) \cap A(w_2)$. Тем самым, оценка $|T(v_\lambda, w_\lambda) - x| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x)$ выполнена на всюду плотном подмножестве $A(w_1) \cap A(w_2) \subset K$, а значит, и на всем K . Лемма доказана.

В $V \times W$ имеется норма $|(v, w)| := \max\{\|v\|, \|w\|\}$, индуцирующая метрику на $V \times \Gamma$. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(V \times \Gamma)$ – множество всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств в $V \times \Gamma$. Заметим, что $\mathcal{V}$ – полное метрическое пространство относительно хаусдорфовой метрики

$$h(A_1, A_2) = \max\left\{\sup_{a \in A_1} \inf_{b \in A_2} |a - b|, \sup_{b \in A_2} \inf_{a \in A_1} |a - b|\right\},$$

где $A_1, A_2 \in \mathcal{V}$. Из результатов [4] следует, что определено отображение $St: \mathcal{V} \rightarrow V \times \Gamma$ (множеству A сопоставляется его точка Штейнера) такое, что при некотором $C > 0$ для любых $A, B \in \mathcal{V}$ выполнены условия:

- 1) $St(A) \in A$,
- 2) $|St(A) - St(B)| \leq Ch(A, B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1) Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0; 1)$. Требуемую в теореме выборку зададим так: $\Phi := T \circ St \circ Z$; многозначное отображение $Z: B \rightarrow \mathcal{V}(V \times \Gamma)$ определено в лемме 1. Необходимо проверить, что отображение Φ будет равномерно непрерывным на шаре B . Заметим, что для любого $x \in B$ справедливо включение $Z(x) \subset D$, а ограничение T на D является равномерно непрерывным.

Основная сложность – проверка равномерной непрерывности Z . Для $x \in B$, $\nu \geq 0$ положим

$$Z(x, \nu) := \{z \in \Lambda : \|T(z) - x\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x) + \nu\}.$$

Заметим, что $Z(x, 0) = Z(x)$. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Для любых $\xi, b > 0$ найдется число $\nu > 0$ такое, что для любой точки $x \in B$: $\rho(x) \geq b$, выполнено неравенство $h(Z(x), Z(x, \nu)) < \xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $b > 0$ и $\xi \in (0; d)$, $d = \text{diam } D$. Пусть $y_1 = (v_1, w_1) \in Z(x, \nu)$. Покажем, что если $\nu > 0$ достаточно мало, то найдется точка $y_2 \in Z(x)$ такая, что $|y_1 - y_2| \leq \xi$. Заметим, что существует точка $y_0 \in Z(x)$, для которой $\|T(y_0) - x\| \leq (1 + \varepsilon/2)\rho(x)$, и для любого $\tau \in K$ выполнено неравенство

$$w_1(\tau) \leq qw_0(\tau), \quad \text{где } q = q(\varepsilon, b) > 0.$$

В самом деле, найдется точка $\tilde{y} \in Z(x)$: $\|T(\tilde{y}) - x\| \leq (1 + \varepsilon/10)\rho(x)$. Из равномерной непрерывности отображения T следует, что при $|z - \tilde{y}| \leq \omega(b)$, $z \in \Lambda$, выполнено неравенство $\|T(z) - T(\tilde{y})\| \leq b\varepsilon/10 \leq \varepsilon\rho(x)/10$, где $\omega(b) > 0$. Воспользовавшись замечанием 2 при $\alpha = \omega(b)$, построим требуемую точку y_0 . Покажем, что в качестве точки y_2 можно взять $y_2 = (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1$, где $\lambda = 1 - \xi/2d \in (1/2; 1]$.

Во-первых,

$$|y_1 - y_2| = (1 - \lambda)|y_1 - y_0| \leq (1 - \lambda) \text{diam } Z(x, \nu).$$

Но при $\nu < 1$ выполнено включение $Z(x, \nu) \subset D$. Следовательно, справедливо неравенство $|y_1 - y_2| \leq (1 - \lambda)d = \xi/2$.

Во-вторых, покажем, что $y_2 \in Z(x)$. Для любой точки $\tau \in K$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |x(\tau)w_2(\tau) - v_2(\tau)| &\leq (1 - \lambda)|x(\tau)w_0(\tau) - v_0(\tau)| + \lambda|x(\tau)w_1(\tau) - v_1(\tau)| \\ &\leq (1 - \lambda)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\rho(x)w_0(\tau) + \lambda[(1 + \varepsilon)\rho(x) + \nu]w_1(\tau) \\ &= (1 + \varepsilon)\rho(x)[(1 - \lambda)w_0(\tau) + \lambda w_1(\tau)] - \frac{\varepsilon}{2}(1 - \lambda)\rho(x)w_0(\tau) + \lambda\nu w_1(\tau). \end{aligned}$$

Из нашего выбора w_0 следует, что

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda)\rho(x)w_0(\tau) + \lambda\nu w_1(\tau) &\leq -\frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda)\rho(x)w_0(\tau) + \lambda\nu q w_0(\tau) \\ &\leq w_0(\tau) \left[-\frac{\varepsilon\xi b}{4d} + \left(1 - \frac{\xi}{2d}\right)q(\varepsilon, b)\nu \right] \leq 0; \end{aligned}$$

последнее неравенство справедливо при достаточно малом $\nu > 0$. Итак, при малом $\nu > 0$ в произвольной точке $\tau \in K$ выполнено $|x(\tau)w_2(\tau) - v_2(\tau)| \leq (1+\varepsilon)\rho(x)w_2(\tau)$. Тем самым, $y_2 \in Z(x)$. Лемма доказана.

Надо показать, что для любого числа $a > 0$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что для любых точек $x_1, x_2 \in B$: $\|x_1 - x_2\| \leq \delta$ выполнено неравенство $\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leq a$. Зафиксируем малое число $a > 0$. Пусть $x_1, x_2 \in B$; $y_1 \in Z(x_1)$, $y_2 \in Z(x_2)$; тогда

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq (1+\varepsilon)(\rho_1 + \rho_2) + \|x_1 - x_2\|.$$

Следовательно, можно рассматривать только такие точки $x_1, x_2 \in B$, что $\rho_1 + \rho_2 \geq k\|x_1 - x_2\|$, где k – большая константа. Кроме того, всегда выполнено $|\rho_1 - \rho_2| \leq \|x_1 - x_2\|$. Из наших рассуждений следует, что достаточно разобрать случай $\rho(x_j) \geq a/10$ при $j = 1, 2$.

Надо показать, что для любого $\xi > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in B$ таких, что $\|x_1 - x_2\| \leq \delta$ и $\rho(x_j) \geq a/10$, $j = 1, 2$, выполнено неравенство $h(Z(x_1), Z(x_2)) \leq \xi$. Пусть $y_2 \in Z(x_2)$; тогда

$$\|T(y_2) - x_1\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|T(y_2) - x_2\| \leq \delta(2+\varepsilon) + (1+\varepsilon)\rho(x_1).$$

Следовательно, $y_2 \in Z(x_1, \delta(2+\varepsilon))$. Применив лемму 2 при $b = a/10$, получим (при достаточно малом δ) точку $y_1 \in Z(x_1)$, для которой $|y_1 - y_2| \leq \xi$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться равномерной непрерывностью T и липшицевостью St . Теорема доказана.

Имеется целая серия примеров множеств $\mathcal{R}_{V,W}$, к которым применима теорема 1. Точнее, для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ найдется пара подпространств $V, W \subset C[0; 1]$ таких, что $\dim V = m$, $\dim W = n$ и множество $\mathcal{R}_{V,W} \cap B$ непусто и компактно, где B – единичный шар в $C[0; 1]$.

Рассмотрим полиномы $e_j(\tau) = \prod_{k \neq j} (\tau - \tau_k)^2$, точки $\tau_k = k/n \in [0; 1]$, $1 \leq j, k \leq n$, и положим $W = \langle \{e_j\}_{1 \leq j \leq n} \rangle$. Если $f(\tau) = \sum_{j=1}^n c_j e_j(\tau) \geq 0$ на $[0; 1]$, то $f(\tau_j) \geq 0$ для любого $1 \leq j \leq n$ и, следовательно, $c_j \geq 0$ для любого $1 \leq j \leq n$. Заметим, что функция $f \in W^+ \setminus \{0\}$ может обращаться в нуль только в точках из множества $\{\tau_j\}$. Более того, $f(\tau_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $c_j = 0$. Подберем V (например, состоящим из полиномов) таким образом, чтобы у любой функции $v \in V$ порядок нуля в точках τ_j был не меньше 3. Тогда для любых $v \in V$, $w \in W^+ \setminus \{0\}$ будет функция $v(\tau)/w(\tau)$ определена на всем отрезке $[0; 1]$ и множество $\mathcal{R}_{V,W} \cap B$ будет компактно.

Автор благодарит С. В. Конягина за многочисленные полезные обсуждения и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Н. Maehly, Ch. Witzgall, *Numer. Math.*, **2:5** (1960), 293–307. [2] Н. Werner, *Math. Z.*, **86:4** (1964), 317–326. [3] С. В. Конягин, *Матем. заметки*, **44:3** (1988), 404. [4] Е. Д. Посицельский, *Оптимизация*, 1971, № 4 (21), 83–89. [5] К. С. Рютин, *Матем. заметки*, **71:2** (2002), 261–270.

К. С. Рютин

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ksrutin@mail.ru

Поступило
16.01.2009