Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Царьков, Устойчивость однозначной разрешимости квазилинейных уравнений по дополнительной информации, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 918–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:27:00

Устойчивость однозначной разрешимости квазилинейных уравнений по дополнительной информации

И. Г. Царьков

В работе изучаются квазилинейные уравнения эллиптического и параболического типа, для которых решения, имеющие ограниченные равномерные нормы или ограниченные равномерные нормы своих производных, однозначно определяются по дополнительной информации, представляющей собой значения этих решений на сетке. В случае, когда уравнения и значения на сетке заданы с погрешностью, даются оценки погрешности приближенного решения в равномерной метрике.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В работе мы будем изучать условия на эллиптические и параболические системы и уравнения, при которых можно будет однозначно определить решение по дополнительной информации о нем и (или) оценить отклонения разных решений друг от друга в случае, когда дополнительная информация определена с некоторой погрешностью. Дополнительная информация будет представлена значениями решений на некоторой сетке в области, отклонения же различных решений друг от друга будет измерено в равномерной метрике.

Для иллюстрации характера оценок, получаемых при учете значений решений на подходящих сетках, приведем несколько примеров. В работе [1] рассматривалась задача однозначной разрешимости для неоднородной задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u_i = F(x, u_i) + \varphi_i(x) & \text{на } \Omega_0, \\ u = \tau_i & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{A.i})$$

$i = 1, 2$, с учетом точных значений решений на подходящей сетке, где Ω_0 – внутренность компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ и $\varphi_i, \tau_i \in L_q(\Omega)$. В частности, для слабо линейного дифференциального оператора, определяемого следующими условиями на F :

- а) $q > \max\{1, n/2\}$, $\nu = (1/2)(\beta + n/q) < 1$; $\beta \in (0, 1)$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00442-а).

б) для всех $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ $|F'_u(x, u)| \leq k(x)$, где $k \in L_q(\Omega)$,

было получено следующее утверждение: существуют числа $\varepsilon_0, P > 0$, зависящие только от $\Omega, \beta, q, \|\tau\|_{W_q^2(\Omega)}, \|k\|_{L_q(\Omega)}$ и такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и всякой ε -сети Γ в Ω условие $u_1|_\Gamma \equiv u_2|_\Gamma$ влечет неравенство

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq P \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_q(\Omega)} \varepsilon^{\beta/\nu}.$$

Рассмотрим теперь случай квазилинейного дифференциального оператора [2], структура которого определяется следующими условиями на F :

- (а) $n \geq 2$;
- (б) $q > n/2$, $\varphi_i \in L_q(\Omega)$, $\tau_i \in L_\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$, и $\tau_1 - \tau_2 \in W_q^2(\Omega)$;
- (с) найдутся функции

$$r(x) \in L_\eta(\Omega), \quad \eta > \frac{n}{2}, \quad \lambda \in L_1(\Omega), \quad \mu_1, \mu_2 \in C(\mathbb{R}_+)$$

такие, что $|F(x, u)| \leq \lambda(x)\mu_1(|u|)$ и для любых $(x, u_1), (x, u_2) \in \Omega \times \mathbb{R}$ и $v = \max_{i=1,2} |u_i|$ выполнено неравенство

$$|F(x, u_1) - F(x, u_2)| \leq r(x)\mu_2(v)|u_1 - u_2|;$$

- (д) найдется число $k \geq 0$ такое, что для всех $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ таких, что $|u| \geq k$, выполнено неравенство

$$F(x, u) \operatorname{sign}(u) \geq -D|u| + c(x),$$

где $c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция из $L_q(\Omega)$, а D – некоторое число из полуинтервала $[0, \gamma^{-2})$ и γ – наименьшая константа в неравенстве Фридрихса.

Положим

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \tau = \tau_1 - \tau_2, \quad \theta = u_1 - u_2,$$

и пусть $\eta \geq q$, $\beta \in (0, 1]$, $\nu = (\beta + n/\eta)/2 < 1$, а u_i – обобщенные решения из класса $W_2^1(\Omega)$ задач (A.i), непрерывные на Ω . Тогда найдутся константы $\mathscr{P}, \varepsilon_0 > 0$, зависящие только от

$$\beta, \quad (1 - D\gamma^2), \quad \|c\|_{L_q(\Omega)}, \quad q, \quad \eta, \quad k, \quad \Omega, \quad \max\{\|\tau_1\|_{L_\infty(\Omega)}, \|\tau_2\|_{L_\infty(\Omega)}\}$$

и такие, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и (относительной) ε -сети Γ для Ω верна оценка

$$\|\theta - \tau\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \mathscr{P}(\|\varphi\|_{L_q(\Omega)} + \|\tau\|_{L_\infty(\Omega)})\varepsilon^\beta + 2 \max_\Gamma |\theta - \tau|.$$

Следовательно, в случае $\tau_1 = \tau_2$ получится неравенство

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \mathscr{P}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}\varepsilon^\beta + 2 \max_\Gamma |u_1 - u_2|.$$

Эта оценка фактически устанавливает устойчивость однозначной разрешимости по приближенным значениям на сетке Γ .

Приведем пример устойчивости однозначной разрешимости при учете точных значений на сетке для нелинейности вида $F(x, u, \nabla u)$ (см. [2]).

Рассмотрим для $i = 1, 2$ следующие задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u_i(x) = F(x, u_i(x), \nabla u_i(x)) + \varphi_i(x) & \text{на } \Omega_0, \\ u_i = \tau_i & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.i})$$

Будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — компактная область и $\partial\Omega$ имеет гладкость C^2 ; функции $\varphi_i, \tau_i, u_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежат соответственно классам $L_q(\Omega)$, $W_q^2(\Omega)$ и $W_q^2(\Omega)$ с $q > n$.

Рассмотрим следующие условия на отображение

$$F = F(x, u, p): \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}:$$

(a') для всех $(x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ верно неравенство

$$|F(x, u, p)| \leq b(x, u)(1 + |p|^\alpha), \quad \text{где } \alpha = 2 - \frac{n}{q} > 1,$$

а функция $b(x, u)$ измерима по x при всех u и непрерывна по u почти при всех x ,

$$b(x) = b_M(x) = \sup_{|u| \leq M} b(x, u) \in L_q(\Omega) \quad \text{для любого } M > 0;$$

(b') найдется число $k_0 \geq 0$, для которого

$$F(x, u, p)u \geq -\mu_0 p^2 - Du^2 - \psi(x)$$

для всех (x, u, p) из $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с $|u| \geq k_0$; при этом $0 \leq \mu_0 < 1$, $\psi \in L_r(\Omega)$, $r > n(\mu_0 + 1)/2$, $D\gamma^2(1 + \mu_0) < 1$ (γ — точная константа в неравенстве Фридрихса);

(c') для любых $(x, u, p_i) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|u| \leq M$, $|p_i| \leq M$, $i = 1, 2$, верно неравенство

$$|F(x, u, p_1) - F(x, u, p_2)| \leq k_M(x)|p_1 - p_2|,$$

где $k = k_M$ — некоторая функция из $L_2(\Omega)$; для любых $(x, u_i, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|u_i| \leq M$, $|p| \leq M$, $i = 1, 2$, верно неравенство

$$|F(x, u_1, p) - F(x, u_2, p)| \leq K_M(x)|u_1 - u_2|,$$

где $K = K_M$ — некоторая функция из $L_\eta(\Omega)$, $\eta > 1$ и $\eta \geq q/2$;

(d') для любого $M > 0$ найдется число $A = A(M) > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\text{sign } t(F(x, u + t, p) - F(x, u, p)) \geq -A|t|$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ и любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ с $|u| \leq M$, $|p| \leq M$.

Пусть $s = \min\{2, \eta\}$, $\beta \in (0, 1]$, $\beta + n/s < 2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in L_s(\Omega)$, $\tau = \tau_1 - \tau_2 \in W_q^2(\Omega)$ и u_i — обобщенные решения из класса $W_q^2(\Omega)$ задач (B.i), непрерывные на Ω . Тогда найдутся константы $\mathscr{P}$, $\varepsilon_0 > 0$, зависящие только от

$$\beta, \quad (1 - (\mu_0 + 1)D\gamma^2), \quad \mu_0, \quad q, \quad \Omega, \quad \|\psi\|_{L_r(\Omega)}, \quad \eta, \quad \max_{i=1,2}\{\|\tau_i\|_{L_\infty(\Omega)}, \|\varphi_i\|_{L_q(\Omega)}\}$$

и такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и всякой (относительной) ε -сети Γ для Ω условие $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ влечет неравенство

$$\|u_1 - u_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \mathcal{P}(\|\varphi\|_{L_s(\Omega)} + \|\tau\|_{W_q^2(\Omega)})\varepsilon^\beta.$$

Отметим, что при получении этого неравенства используются априорные оценки, полученные Похожаевым в [3]. Роль априорных оценок состоит в том, чтобы показать, что равномерные нормы изучаемых решений ограничены некоторой константой, определяемой по структурным характеристикам дифференциальной задачи.

Пример в случае нелинейного параболического уравнения можно посмотреть также в работе [2].

В данной работе мы будем изучать дифференциальные задачи, для которых, вообще говоря, априорные оценки не могут быть установлены. Поэтому в условиях соответствующих утверждений мы будем предполагать, что нам известны оценки равномерных норм решений (или их градиентов) соответствующих дифференциальных задач, что также можно трактовать как дополнительную информацию о решении. Такая форма изложения утверждений оправдана тем, что в рассматриваемых задачах могут существовать ограниченные решения, для которых мы можем получить приведенные в теоремах неравенства. В случае же, когда структура дифференциального оператора позволяет получать требуемые априорные оценки, предположения об ограниченности равномерных норм решений некоторой фиксированной константой можно опускать. Отметим, что подходы к получению различных априорных оценок можно посмотреть в работе [4].

2. Вспомогательные результаты. Обозначим через (B) класс всех действительных банаховых пространств. Пусть $X_i, Y \in (B)$, $i = 1, \dots, n$. Через $\prod_{i=1}^n X_i$ обозначим декартово произведение пространств X_i с нормой $\|\cdot\| = \sum_{i=1}^n \|\cdot\|_{X_i}$. Для произвольного числа $\alpha > 0$ через α^0 обозначим наибольшее целое число строго меньшее чем α , и пусть $\beta^0 = \alpha - \alpha^0$. Для непустого подмножества $M \subset X \in (B)$ через $\mathcal{H}^\alpha(M) = \mathcal{H}^\alpha(M, Y)$ обозначим класс всех таких α^0 -дифференцируемых по Фреше в каждой точке множества M функций $f: M \rightarrow Y$, что для любого ограниченного множества $N \subset M$ найдется число $c = c(N) > 0$, для которого выполнено неравенство

$$\|f^{(\alpha^0)}(x) - f^{(\alpha^0)}(y)\| \leq c\|x - y\|^{\beta^0} \quad \text{для всех } x, y \in N.$$

Рассмотрим положительные функции $\delta(\cdot), C(\cdot), C_1(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами

$$\inf_{t \in [0, a]} \delta(t) > 0 \quad \text{для всех } a > 0$$

и $C(\cdot) \uparrow, C_1(\cdot) \uparrow$. Рассмотрим также положительную функцию $\varepsilon(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, для которой выполнены следующие условия:

$$\text{существует } \{t_j\}_{j=0}^\infty \uparrow \uparrow +\infty, \quad t_0 = 0, \quad (t_{j+1} - t_j)C(t_{j+1}) \leq \widehat{\varepsilon}_{j+1} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{t \in [t_j, t_{j+1}]} \varepsilon(t).$$

Отметим, что в случае, когда $\varepsilon \equiv +\infty$, вышеуказанное свойство выполняется для любой функции $C(\cdot)$.

Пусть $X, Y, Z \in (B)$, $M \subset X$ – звездное относительно некоторой точки $x_0 \in M$ множество и $F: X \times Y \rightarrow Z$ – некоторое отображение множества $M \times Y$ в пространство Z . Будем полагать, что $F(x_0, y_0) = 0$, где $(x_0, y_0) \in M \times Y$. Определим следующие множества в $X \times Y$:

$$\Sigma = \{(x, y) \in M \times Y \mid F(x, y) = 0\},$$

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times Y \mid \|F(x, y)\| \leq \varepsilon(\|x - x_0\|)\}.$$

Для произвольных $X \in (B)$, $x \in X$, $r \geq 0$ через $B(x, r)$ обозначим шар с центром x радиуса r , т.е. множество $\{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}$; через B_X обозначим единичный шар $B(0, 1) \subset X$.

Будем говорить, что частная производная F'_y является δ -регулярным линейным оператором на множестве $M \times Y$, если для единичных шаров B_Y и B_Z и для произвольной точки $(x, y) \in M \times Y$ верно включение

$$F'_y(x, y)[B_Y] \supset \delta(\|x - x_0\|)B_Z.$$

Далее, для некоторого непустого множества $A \subset X \times Y$ через $CH^1(A) = CH^1(A, Z)$ обозначим класс всех отображений $f: A \rightarrow Z$, удовлетворяющих для всех $(x_i, y_i) \in A$, $i = 1, 2$, неравенству

$$\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\| \leq C \left(\max_{i=1,2} \|x_i - x_0\| \right) \{ \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| \}.$$

Так же, как и в работе [5], мы рассмотрим уравнение

$$r(s) = r(s, x, y) = y + \int_0^s \Phi(x, r(t), z) dt, \quad \text{где } z = F(x, y),$$

и отображение $\Phi(x, y, z) = [F'_y(x, y)]^{-1}(-z)$; здесь в качестве отображения R (см. [5]) мы рассматриваем операцию обращения линейных обратимых операторов из Y в Z . Аналогично теореме 1 (см. [5; с. 81]) доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\alpha > 0$, $X, Y, Z \in (B)$, M – непустое подмножество X , $(x_0, y_0) \in M \times Y$; отображение $F: M \times Y \rightarrow Z$ таково, что $F(x_0, y_0) = 0$ и $F, F'_y \in CH^1(\Sigma_\varepsilon) \cap \mathcal{H}^\alpha(\Sigma_\varepsilon)$, а $F'_y: Y \rightarrow Z$ – ограниченный обратимый оператор, являющийся δ -регулярным на Σ_ε и такой, что

$$\|F'_y(x, y)\| \leq C_1(\|x - x_0\|) \quad \text{для всех } (x, y) \in \Sigma_\varepsilon.$$

Тогда существует нелинейный проектор $\mathcal{P}_\Sigma: \Sigma_\varepsilon \rightarrow \Sigma$, задаваемый формулой $\mathcal{P}_\Sigma(x, y) = (x, r(1))$ и такой, что $\mathcal{P}_\Sigma \in \mathcal{H}^\alpha(\Sigma_\varepsilon)$.

СЛЕДСТВИЕ А. Пусть выполнены условия теоремы А и $\alpha = 1$, а M – звездное множество относительно точки x_0 . Тогда для любой точки $y_0 \in Y$ такой, что $F((x_0, y_0)) = 0$ найдется отображение $\varphi \in \mathcal{H}^1(M \times Y)$ такое, что

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, будем считать, что $x_0 = 0$. Положим $r_0 = (t_1 - t_0)/8$. Так как $F \in CH^1(\Sigma_\varepsilon)$, то для всех $x \in B(0, r_0) \cap M$ верны неравенства

$$\|F(0, y_0) - F(x, y_0)\| \leq C(\|x\|)\|x\| < \frac{1}{4}(t_1 - t_0)C(t_1) \leq \frac{1}{4}\widehat{\varepsilon}_1.$$

Проведем индукционное построение функции φ .

База индукции. Пусть отображение $\pi: X \times Y \rightarrow Y$ задается формулой $\pi(x, y) = y$. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} \pi \circ \mathcal{P}_\Sigma(x, y_0), & \text{если } x \in B(0, r_0) \cap M, \\ 0, & \text{если } x \notin B(0, r_0) \cap M. \end{cases}$$

Тогда $f_1 \in \mathcal{H}^1(B(0, r_0) \cap M)$ и $f_1(0) = y_0$.

Шаг индукции. Предположим, что на j -м шагу построено отображение $f_j \in \mathcal{H}^1(B(0, r_{j-1}) \cap M)$ такое, что $f_j \equiv 0$ вне $B(0, r_{j-1}) \cap M$ и $F(x, f_j(x)) = 0$ для всех $x \in B(0, r_{j-1}) \cap M$. Пусть $\mu_j > 1$ – такое число, что

$$\|f_j(x_1) - f_j(x_2)\| \leq \mu_j \|x_1 - x_2\| \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in B(0, r_{j-1}) \cap M.$$

Положим

$$\begin{aligned} \delta_j &= \frac{1}{2} \min \left\{ t_1, \frac{t_{j+1} - t_j}{4\mu_j} \right\}, \quad r_j = r_{j-1} + \frac{1}{8}(t_{j+1} - t_j), \\ A_j &= (B(0, r_j) \setminus B(0, r_{j-1} - \delta_j)) \cap M, \\ \varphi_{j+1}(x) &= \begin{cases} f_j\left(\frac{r_{j-1}x}{\|x\|}\right), & \text{если } x \in A_j, \\ 0, & \text{если } x \notin A_j. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда $\varphi_{j+1} \in \mathcal{H}^1(A_j)$. Пусть $\tau_j \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ – такая функция, что

$$\begin{aligned} \tau_j &\equiv 0 \quad \text{на } (-\infty, r_{j-1} - \delta_j), \\ \tau_j &\equiv 1 \quad \text{на } \left(r_{j-1} - \frac{\delta_j}{2}, +\infty\right), \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$\psi_{j+1}(x) = (1 - \tau_j(\|x\|))f_j(x) + \tau_j(\|x\|)\varphi_{j+1}(x)$$

принадлежит классу $\mathcal{H}^1(A_j)$. Для характеристической функции $\kappa(t)$ отрезка $[r_{j-1} - \delta_j, r_{j-1} - \delta_j/2]$ и каждой точки $x \in A_j$ верны оценки

$$\begin{aligned} \|F(x, \psi_{j+1}(x))\| &= \left\| F(x, \psi_{j+1}(x)) - F\left(\frac{r_{j-1}x}{\|x\|}, f_j\left(\frac{r_{j-1}x}{\|x\|}\right)\right) \right\| \\ &\leq C(t_{j+1}) \left(\left\| x - \frac{r_{j-1}x}{\|x\|} \right\| + \left\| \psi_{j+1}(x) - f_j\left(\frac{r_{j-1}x}{\|x\|}\right) \right\| \right) \\ &\leq C(t_{j+1}) \left(|\|x\| - r_{j-1}| + \tau_j(\|x\|) \left\| \varphi_{j+1}(x) - f_j\left(\frac{r_{j-1}x}{\|x\|}\right) \right\| \right. \\ &\quad \left. + \kappa(\|x\|)(1 - \tau_j(\|x\|)) \left\| f_j(x) - f_j\left(\frac{r_{j-1}x}{\|x\|}\right) \right\| \right). \end{aligned}$$

Отметим, что предпоследнее слагаемое равно нулю, а последнее слагаемое равно нулю в случае $\|x\| \geq r_{j-1} - \delta_j/2$. В случае же, когда $r_{j-1} - \delta_j \leq \|x\| \leq r_{j-1} - \delta_j/2$, последнее слагаемое оценивается сверху величиной

$$\mu_j \left\| x - \frac{r_{j-1}x}{\|x\|} \right\| \leq \delta_j \mu_j \leq \frac{1}{8}(t_{j+1} - t_j).$$

Поэтому

$$\|F(x, \psi_{j+1}(x))\| \leq C(t_{j+1}) \frac{1}{4}(t_{j+1} - t_j) \leq \frac{1}{4} \hat{\varepsilon}_{j+1}.$$

Положим

$$f_{j+1}(x) = \begin{cases} \pi \circ \mathcal{P}_\Sigma(x, \psi_{j+1}(x)), & \text{если } x \in B(0, r_j) \cap M, \\ 0, & \text{если } x \notin B(0, r_j) \cap M. \end{cases}$$

Тогда $f_{j+1} \in \mathcal{H}^1(B(0, r_j) \cap M)$ и $F(x, f_{j+1}(x)) \equiv 0$ для всех $x \in B(0, r_j) \cap M$. Кроме того, по построению f_{j+1} совпадает с f_j на $B(0, r_{j-1} - \delta_j) \cap M$; в частности, $f_{j+1}(0) = f_j(0) = y_0$. Положим

$$\varphi(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f_j(x).$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{H}^1(M, Y)$, $\varphi(x_0) = y_0$ и $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$ на M .

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда пространство Y изоморфно некоторому пространству $C(K)$ или $L_\infty(K)$ (например, в случае, когда $Y = W_\infty^\alpha(\Omega)$), в качестве множества M можно рассмотреть произвольное метрическое пространство (изометрично вложенное в некоторое банахово пространство X), при этом требование звездности этого множества можно отбросить.

Далее мы изучим различные приложения следствия А.

3. Случай эллиптических систем и уравнений. Пусть $q > 1$ и $q' = q/(q-1)$, W – произвольное банахово пространство, а $V = V_q$ – банахово пространство с таким безусловным не более чем счетным базисом $\{e_\alpha\}$, что норма в пространстве V эквивалентна величине $(\sum_\alpha |v_\alpha|^q)^{1/q}$ (здесь $v = \sum_\alpha v_\alpha e_\alpha \in V$). В дальнейшем без потери общности будем считать, что эта величина и задает норму на V . Отметим, что если $\dim V < \infty$, то эта норма эквивалентна норме $(\sum_\alpha |v_\alpha|^2)^{1/2}$.

Для произвольного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ (множество $\mathcal{K}$ будет или областью, или ее границей, или частью границы) и вектор-функции $\mathbf{f}: \mathcal{K} \rightarrow V$ рассмотрим ее представление в виде

$$\mathbf{f}(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) e_\alpha, \quad \text{где } f_\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Через $\mathbf{L}_q(\mathcal{K})$, $\mathbf{W}_q^\beta(\mathcal{K})$ и $\mathring{\mathbf{W}}_q^\beta(\mathcal{K})$ (β – или число, или мультииндекс) обозначим соответственно классы вектор функций $\mathbf{f}(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) e_\alpha$, для которых все их координатные функции f_α принадлежат соответственно классам $L_q(\mathcal{K})$, $W_q^\beta(\mathcal{K})$ и $\mathring{W}_q^\beta(\mathcal{K})$ и величины

$$\left(\sum_\alpha \|f_\alpha\|_{L_q(\mathcal{K})}^q \right)^{1/q} \quad \text{и} \quad \left(\sum_\alpha \|f_\alpha\|_{W_q^\beta(\mathcal{K})}^q \right)^{1/q}$$

определяют нормы соответственно в пространствах $\mathbf{L}_q(\mathcal{K})$ и $\mathbf{W}_q^\beta(\mathcal{K})$ ($\mathring{\mathbf{W}}_q^\beta(\mathcal{K})$). Пространство $\mathbf{C}(\mathcal{K}) = \mathbf{C}(\mathcal{K}, V)$ определяется как пространство непрерывных вектор-функций $\mathbf{f}(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x)e_\alpha$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(\mathcal{K})} = \left(\sum_\alpha |f_\alpha(x)|^q \right)_{\mathbf{C}(\mathcal{K})}^{1/q} = \max_{x \in \mathcal{K}} \left(\sum_\alpha |f_\alpha(x)|^q \right)^{1/q}.$$

Аналогично определяется $\mathbf{L}_\infty(\mathcal{K}) = \mathbf{L}_\infty(\mathcal{K}, V)$. Пространство $\mathbf{H}_\infty^\beta(\mathcal{K}, V)$, $\beta \in (0, 1]$, определяется как пространство непрерывных вектор-функций $\mathbf{f}(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x)e_\alpha$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\mathcal{K})} = \sup_{\substack{x, y \in \mathcal{K} \\ x \neq y}} \frac{(\sum_\alpha |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|^q)^{1/q}}{|x - y|^\beta}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\mathcal{K})} &= \sup_{\substack{x, y \in \mathcal{K} \\ x \neq y}} \left(\sum_\alpha \left\{ \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x - y|^\beta} \right\}^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_\alpha \left\{ \sup_{\substack{x, y \in \mathcal{K} \\ x \neq y}} \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x - y|^\beta} \right\}^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_\alpha \|f_\alpha\|_{H_\infty^\beta(\mathcal{K})}^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Рассмотрим банаховы пространства

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_q^n(\Omega) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{L}_q(\Omega))^n, \quad \mathcal{G} = \mathbf{L}_q(\Omega), \quad \Phi = \mathbf{W}_q^2(\Omega), \\ X_0 &= W \times \mathbf{L}_q(\Omega) \times \mathbf{L}_q^n(\Omega), \quad X = X_0 \times \Phi \times \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathcal{A} = \{A^{ij} : \Omega \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}\}_{i,j=1}^{n,n}$$

– матричное отображение, и $E, B^i : \Omega \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $E \leq 0$. Сформулируем ограничения на эти отображения. Для этого рассмотрим звездное относительно точки (w_0, u_0) множество $\mathfrak{M} \subset W \times \mathring{\mathbf{W}}_q^1(\Omega)$ и звездное относительно точки $(w_0, u_0, \nabla u_0)$ множество $\mathfrak{N} \subset X_0$.

Итак, будем предполагать, что для любого ограниченного множества $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}$ найдутся положительные числа

$$\lambda = \lambda(\mathcal{M}) > 0, \quad \mu = \mu(\mathcal{M}) > 0, \quad d = d(\mathcal{M}) > 0,$$

для которых выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \lambda |\xi|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^n A^{ij}(x, w, u, \nabla u) \xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2, \\ |E(x, w, u, \nabla u)|, \quad |B^i(x, w, u, \nabla u)| &\leq d, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

для произвольных $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $(x, w, u) \in \Omega \times \mathcal{M}$.

Далее, для любого ограниченного множества $N \subset \mathfrak{N}$ найдется число $c = c(N) > 0$, для которого выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|E(\cdot, s_1) - E(\cdot, s_2)\|_{L_{q'}(\Omega)} &\leq c\|s_1 - s_2\|_{X_0}, \\ \|B^i(\cdot, s_1) - B^i(\cdot, s_2)\|_{L_{q'}(\Omega)} &\leq c\|s_1 - s_2\|_{X_0}, \\ \|A^{ij}(\cdot, s_1) - A^{ij}(\cdot, s_2)\|_{L_{q'}(\Omega)} &\leq c\|s_1 - s_2\|_{X_0} \end{aligned}$$

для всех индексов i, j и $s_k = (w_k, u_k, p_k) \in N$, $k = 1, 2$.

Кроме того, будем предполагать, что модули непрерывности функций A^{ij} равномерно по множеству N стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0+$, т.е.

$$\theta_N^{ij}(\delta) = \sup\{|a^{ij}(x_1, s) - a^{ij}(x_2, s)| : (x_k, s) \in \Omega \times N, |x_1 - x_2| \leq \delta\} \rightarrow 0,$$

где $a^{ij}(\cdot) = a^{ij}(\cdot, s) := A^{ij}(\cdot, s(\cdot))$ и $s(\cdot) = (w, u(\cdot), p(\cdot))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда Ω – двумерная ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, последние условия можно отбросить. Это будет вытекать из [6; теорема 9.15 и лемма 9.17]).

Определим звездное относительно точки $(w_0, u_0, \nabla u_0)$ множество

$$\mathfrak{B} = \{(w, u, \nabla u) \in \mathfrak{N} \mid (w, u) \in \mathfrak{M}\}$$

и отображение $F: \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G} \times Y \rightarrow Z$, где $Y = \mathring{\mathbf{W}}_q^2(\Omega)$ и $Z = \mathbf{L}_q(\Omega)$, положив для произвольных точек $(s, \varphi, g, u) \in \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G} \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \chi$, где $s = (w, v, \nabla v)$,

$$F(s, \varphi, g, u) = \sum_{i,j} A^{ij}(x, s)(u + \varphi)_{x_i x_j} + \sum_i B^i(x, s)(u + \varphi)_{x_i} + E(x, s)(u + \varphi) + g(x).$$

Нетрудно видеть, что $F \in \mathcal{H}^1(\chi)$.

Рассмотрим отображение

$$\mathcal{F}: \Omega \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbf{L}_q(\Omega)$$

такое, что для любого ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B}$ найдется константа $J = J(N) > 0$, для которой выполняется неравенство

$$\|\mathcal{F}(\cdot, s_1) - \mathcal{F}(\cdot, s_2)\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \leq J\|s_1 - s_2\|_{X_0} = J(\|w_1 - w_2\|_W + \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{W}_q^1(\Omega)}),$$

для всех точек $s_i = (w_i, u_i, \nabla u_i) \in \mathfrak{B}$, $i = 1, 2$.

Введем оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(w, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} A^{ij}(x, w, v, \nabla v) v_{x_i x_j} \\ &\quad + \sum_i B^i(x, w, v, \nabla v) v_{x_i} + E(x, w, v, \nabla v) v + \mathcal{F}(x, w, v, \nabla v). \end{aligned}$$

Как обычно, мы будем писать, что функции, заданные на области, совпадают на ее границе, если совпадают значения на этих функциях оператора сужения (на эту границу).

ТЕОРЕМА 1. Для произвольного ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G}$ найдется константа $\mathcal{P} = \mathcal{P}(N) > 0$ такая, что для произвольных функций w_k, φ_k, ψ_k и произвольных решений $v_k \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ задачи

$$\begin{cases} L(w_k, v_k) = \psi_k & \text{на } \Omega, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

таких, что $(w_k, v_k, \nabla v_k, \varphi_k, \psi_k) \in N, k = 1, 2$, верно неравенство

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} \leq \mathcal{P}(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{L_q(\Omega)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_q(\Omega)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторых (φ_0, g_0, a_0) (на самом деле, такая тройка элементов всегда найдется) верно равенство

$$F(s_0, \varphi_0, g_0, a_0) = 0, \quad \text{где } s_0 = (w_0, u_0, \nabla u_0),$$

и рассмотрим уравнение

$$F(s, \varphi, g, u) = 0, \quad \text{где } s = (w, v, \nabla v).$$

Поскольку для произвольного ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B}$ функции $a^{ij}(x) = A^{ij}(x, s(x)): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывны и их модули непрерывности оцениваются функциями $\theta_N^{ij}(\cdot)$, а функции $b^i(x) = B^i(x, s)$ и $e(x) = E(x, s)$ равномерно ограничены константой $d(N)$, то линейный (по η) оператор

$$F'_u(s, \varphi, g, u)[\eta] = \sum_{i,j} A^{ij}(x, s) \eta_{x_i x_j} + \sum_i B^i(x, s) \eta_{x_i} + E(x, s) \eta \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(s)[\eta]$$

равномерно ограничен на множестве N . Это вытекает из равномерной ограниченности операторов

$$\mathcal{L}_s[y] = \sum_{i,j} A^{ij}(x, s) y_{x_i x_j} + \sum_i B^i(x, s) y_{x_i} + E(x, s) y,$$

определенных на пространстве действительных функций $\mathring{W}_q^2(\Omega)$, с образами в пространстве $L_q(\Omega)$, т.е. найдется константа $P > 0$, зависящая только от множества N , функций $\theta_N^{ij}(\cdot)$ и чисел $\lambda(N), \mu(N), d(N)$, такая, что

$$\|\mathcal{L}_s[y]\|_{L_q(\Omega)} \leq P \|y\|_{W_q^2(\Omega)}$$

для всех действительных функций $y \in L_q(\Omega)$ (см. [6]). Действительно, пусть

$$\eta(x) = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(x) e_{\alpha},$$

тогда

$$\|\mathcal{L}_s[\eta_{\alpha}]\|_{L_q(\Omega)} \leq P \|\eta_{\alpha}\|_{W_q^2(\Omega)}$$

для всех α . Учитывая, что

$$F'_u(s, \varphi, g, u)[\eta] = \sum_{\alpha} \mathcal{L}_s[\eta_{\alpha}] e_{\alpha},$$

мы получим требуемую оценку:

$$\|F'_u[\eta]\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha} \|\mathcal{L}_s[\eta_{\alpha}]\|_{L_q(\Omega)}^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{\alpha} P^q \|\eta_{\alpha}\|_{W_q^2(\Omega)}^q \right)^{1/q} = P \|\eta\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)}.$$

Кроме того, в силу условия $E \leq 0$ выполняется неравенство

$$\|y\|_{W_q^2(\Omega)} \leq K \|\mathcal{L}_s[y]\|_{L_q(\Omega)}$$

для произвольной функции $y \in \mathring{W}_q^2(\Omega)$, где константа $K > 0$ зависит только от множества N , функций $\theta_N^{ij}(\cdot)$ и чисел $\lambda(N)$, $\mu(N)$, $d(N)$ (см. [6; лемма 9.17]). При этом оператор $\mathcal{L}_s$ обратим, и, следовательно, для любой функции $f \in L_q(\Omega)$ такой, что $\|f\|_{L_q(\Omega)} \leq 1$, существует функция $\mathcal{L}_s^{-1}f$, норма которой не превосходит числа K . Покажем, что отсюда вытекает оценка

$$\|\eta\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} \leq K \|F'_u[\eta]\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}$$

для произвольной функции $\eta \in \mathring{W}_q^2(\Omega)$ и $(1/K)$ -регулярность оператора F'_u . Действительно,

$$\|\eta\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{W_q^2(\Omega)}^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{\alpha} K^q \|\mathcal{L}_s[\eta_{\alpha}]\|_{L_q(\Omega)}^q \right)^{1/q} = K \|F'_u[\eta]\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}.$$

Для каждой вектор-функции

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) e_{\alpha} \in \mathbf{L}_q(\Omega) \quad \text{такой, что} \quad \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \leq 1,$$

рассмотрим вектор-функцию

$$\eta(x) = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(x) e_{\alpha} \in \mathring{W}_q^2(\Omega),$$

где $\eta_{\alpha} = \mathcal{L}_s^{-1}f_{\alpha}$. Тогда $F'_u[\eta] = \mathbf{f}$ и $\|\eta\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} \leq K$, т.е. оператор F'_u является $(1/K)$ -регулярным линейным изоморфизмом между $\mathring{W}_q^2(\Omega)$ и $\mathbf{L}_q(\Omega)$.

В силу следствия А найдется отображение $G: \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G} \rightarrow Y$ такое, что $G \in \mathcal{H}^1(\mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G})$ и

$$F(s, \varphi, g, G(s, \varphi, g)) \equiv 0 \quad \text{на} \quad \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G}.$$

При этом, учитывая, что для каждой точки (s, φ, g) оператор $F'_u(s, \varphi, g, u)[\cdot]$ является линейным непрерывным изоморфизмом, а также то, что условие $F(s, \varphi, g, u) = 0$ эквивалентно $\mathfrak{L}(s)[u] = -g - \mathfrak{L}(s)[\varphi]$, мы получим, что вектор-функция u однозначно определяется тройкой (s, φ, g) . Тем самым, для каждой точки (s, φ, g) условие $F(s, \varphi, g, u) = 0$ эквивалентно равенству $u = G(s, \varphi, g)$, т.е. глобальное решение уравнения $F(s, \varphi, g, u) = 0$ единственно.

Как мы уже отмечали, v_k является решением задачи

$$\begin{cases} \mathbf{L}(w, v_k) = \psi_k & \text{на } \Omega, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

в том и только том случае, когда

$$u_k = v_k - \varphi_k = G(w_k, v_k, \nabla v_k, \mathcal{F}(\cdot, w_k, v_k, \nabla v_k) - \psi_k), \quad k = 1, 2.$$

Поскольку $G \in \mathcal{H}^1(\mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G})$, то найдется константа $c = c(N) > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} & \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} \\ & \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} \\ & \quad + c(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_{\mathbf{L}_q^n(\Omega)} \\ & \quad + \|\mathcal{F}(\cdot, w_1, v_1, \nabla v_1) - \mathcal{F}(\cdot, w_2, v_2, \nabla v_2)\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}) \\ & \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + (c + cJ)(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^1(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}). \end{aligned}$$

В силу теоремы вложения (см. [8]) найдется константа $P_1 > 0$, зависящая от Ω , q , $c_1 = 1 + c + cJ$, такая, что

$$\|u\|_{W_q^1(\Omega)} \leq (4c_1)^{-1} \|u\|_{W_q^2(\Omega)} + P_1 \|u\|_{L_q(\Omega)} \quad \text{для всех } u \in W_q^2(\Omega).$$

Поэтому для любой функции

$$v(x) = \sum_{\alpha} v_{\alpha}(x) e_{\alpha} \in \mathring{\mathbf{W}}_q^2(\Omega)$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{W}_q^1(\Omega)}^q &= \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{W_q^1(\Omega)}^q \leq \sum_{\alpha} ((4c_1)^{-1} \|v_{\alpha}\|_{W_q^2(\Omega)} + P_1 \|v_{\alpha}\|_{L_q(\Omega)})^q \\ &\leq \sum_{\alpha} 2^q ((4c_1)^{-q} \|v_{\alpha}\|_{W_q^2(\Omega)}^q + P_1^q \|v_{\alpha}\|_{L_q(\Omega)}^q) \\ &\leq (2c_1)^{-q} \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{W_q^2(\Omega)}^q + (2P_1)^q \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{L_q(\Omega)}^q \\ &= (2c_1)^{-q} \|v\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)}^q + (2P_1)^q \|v\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}^q \leq ((2c_1)^{-1} \|v\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + 2P_1 \|v\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^q. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} \\ & \leq \mathcal{P}(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{P} = 2c_1(1 + 2P_1)$.

ЛЕММА 1. Пусть $q > 1$ и $r > 0$, $\beta \in (0, 1]$. Тогда существует константа $P > 0$ такая, что для любой функции $\mathbf{v} = \sum_{\alpha} v_{\alpha}(x) e_{\alpha} \in \mathbf{W}_q^r(\Omega)$ верно неравенство

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{\infty}^{\beta}(\Omega)} \leq P(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}^{\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}^{1-\nu}),$$

где $\nu := r^{-1}(\beta + n/q) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют числа $h_0, c > 0$, зависящие только от ν, q, r и Ω , такие, что

$$\|v_{\alpha}\|_{H_{\infty}^{\beta}(\Omega)} \leq ch^{1-\nu} \|v_{\alpha}\|_{W_q^r(\Omega)} + ch^{-\nu} \|v_{\alpha}\|_{L_q(\Omega)}$$

для всех $h \in (0, h_0]$ и для всех α . Отсюда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)}^q &\leq \sum_{\alpha} \|v_\alpha\|_{H_\infty^\beta(\Omega)}^q \leq \sum_{\alpha} (ch^{1-\nu} \|v_\alpha\|_{W_q^r(\Omega)} + ch^{-\nu} \|v_\alpha\|_{L_q(\Omega)})^q \\ &\leq 2^q \sum_{\alpha} (c^q h^{q(1-\nu)} \|v_\alpha\|_{W_q^r(\Omega)}^q + c^q h^{-q\nu} \|v_\alpha\|_{L_q(\Omega)}^q) \\ &= (2c)^q h^{q(1-\nu)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}^q + (2c)^q h^{-q\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}^q \\ &\leq (2ch^{1-\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)} + 2ch^{-\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^q. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} \leq 2ch^{1-\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)} + 2ch^{-\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}.$$

Пусть $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)} \neq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда

$$h = \frac{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}} < h_0.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} &\leq 2c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)} \left(\frac{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}} \right)^{1-\nu} + 2c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \left(\frac{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}} \right)^{-\nu} \\ &= 4c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}^\nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}^{1-\nu}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$h = \frac{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}} \geq h_0.$$

Имеем $h_0 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}$ и

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} \leq 2ch_0^{1-\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)} + 2ch_0^{-\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \leq 4ch_0^{-\nu} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} \leq P(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}^\nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}^{1-\nu}),$$

где $P = 4c(1 + h_0^{-\nu})$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях леммы 1 выполняется неравенство

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} \leq P(\text{mes}^{1/q} \Omega + \text{mes}^{(1-\nu)/q} \Omega)(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^r(\Omega)}^\nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)}^{1-\nu}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}^q &= \sum_{\alpha} \|v_\alpha\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}^q = \int_{\Omega} \sum_{\alpha} |v_\alpha(x)|^q dx \\ &\leq \int_{\Omega} \sup_{\Omega} \sum_{\alpha} |v_\alpha(x)|^q dx \leq \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)}^q \text{mes } \Omega, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|v\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} \text{mes}^{1/q} \Omega.$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает утверждение следствия.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$0 < \beta \leq \min \left\{ 1, 2 - \frac{n}{q} \right\}, \quad \nu := \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{n}{q} \right) < 1.$$

Тогда для произвольного ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G}$ найдутся числа $c, \varepsilon_0 > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любой ε -сети Γ в множестве Ω , произвольных функций w_k, φ_k, ψ_k и произвольных решений $v_k \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ задачи

$$\begin{cases} \mathbf{L}(w_k, v_k) = \psi_k & \text{на } \Omega, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

таких, что $(w_k, v_k, \nabla v_k, \varphi_k, \psi_k) \in N$, $k = 1, 2$, верна оценка

$$\begin{aligned} & \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega})} \\ & \leq c(\|w_1 - w_2\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})\varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|(v_1 - v_2)|_\Gamma\|_\infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1 для всех $\mathbf{v}(x) \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} \leq P(\text{mes}^{1/q} \Omega + \text{mes}^{(1-\nu)/q} \Omega)(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_q^\nu(\Omega)}^\nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)}^{1-\nu}).$$

Положим

$$v = v_1 - v_2, \quad w = w_1 - w_2, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \psi = \psi_1 - \psi_2,$$

тогда в силу теоремы 1 для

$$P_1 = P(\text{mes}^{1/q} \Omega + \text{mes}^{(1-\nu)/q} \Omega)$$

имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} & \leq P_1(\|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + \mathcal{P}^\nu(\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^\nu \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)}^{1-\nu}) \\ & \leq P_2(\|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^\nu \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)}^{1-\nu}), \end{aligned}$$

где

$$P_2 = P_1(1 + \mathcal{P}^\nu(1 + \text{mes}^{1/q} \Omega)^\nu).$$

Пусть $\varepsilon_0 = (8P_2)^{-1/\beta}$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и ε -сеть Γ в множестве Ω . Пусть $x_0 \in \overline{\Omega}$, $x \in \Gamma$ – такие точки, что

$$\|v(x_0)\|_V = \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega})} \quad \text{и} \quad |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\|v(x_0) - v(x)\|_V \leq \|v\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} \varepsilon^\beta.$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\|v|_\Gamma\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega})}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} &\leq \|v(x_0)\|_V - \|v(x)\|_V \leq \|v(x_0) - v(x)\|_V \leq \|v\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\Omega)} \varepsilon^\beta \\ &\leq P_2 \varepsilon^\beta \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})}^{1-\nu} \\ &\leq \frac{1}{8} \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})}^{1-\nu}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{3}{8} \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})}^\nu \leq P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^\nu$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{4} \|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})}^\nu \leq P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^\nu.$$

Отсюда

$$\|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})}^\nu \leq (4P_2)^{1/\nu} \varepsilon^{\beta/\nu} (\|w\|_W + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}).$$

Тем самым, в общем случае мы получим оценку

$$\|v\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} \leq c(\|w\|_W + \|\varphi\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}) \varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|v\|_{\Gamma} \infty, \quad \text{где } c = (4P_2)^{1/\nu}.$$

Применим предыдущую теорему к эллиптическим системам для вектор-функций $u = (u^1, \dots, u^N): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Предположим, что Ω – ограниченная область $\mathbb{R}^n$, граница которой принадлежит классу C^2 . Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L}_w u = \sum_{i,j} a_{ij}(x, w, u) u_{x_i x_j} + \sum_i b_i(x, w, u, \nabla u) u_{x_i} + b(x, w, u, \nabla u).$$

Здесь $b: \bar{\Omega} \times W \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^N$, а $a_{ij}: \bar{\Omega} \times W \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $b_i: \bar{\Omega} \times W \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}$. Будем предполагать выполненными следующие условия: для любых чисел $M, M_0, M_1 > 0$ найдутся константы $\nu(M, M_0)$, $\mu(M, M_0)$, $\varepsilon(M, M_0)$, $\eta(M, M_0, M_1) > 0$ и функция $P_{M, M_0}(p)$, стремящаяся к нулю при $|p| \rightarrow +\infty$, такие, что для всех $(x, \xi, w, u, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times W \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ таких, что $|w| \leq M_0$, $|u| \leq M$, выполнено

- 1) $\nu(M, M_0) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x, w, u) \xi_i \xi_j \leq \mu(M, M_0) |\xi|^2$;
- 2) $|b_i(x, w, u, p)| \leq \mu(M, M_0)(1 + |p|)$;
- 3) $|b(x, w, u, p)| \leq (\varepsilon(M, M_0) + P_{M, M_0}(p))(1 + |p|^2)$ и $(2M + 1)\varepsilon(M, M_0) \leq \nu(M, M_0)$;
- 4) имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x, w, u) \right|, \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l}(x, w, u) \right| \leq \mu(M, M_0);$$

- 5) величины

$$\begin{aligned} &\|b(\cdot, w_1, u_1, p_1) - b(\cdot, w_2, u_2, p_2)\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}, \\ &\|b_i(\cdot, w_1, u_1, p_1) - b_i(\cdot, w_2, u_2, p_2)\|_{L_{q'}(\Omega)}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

оцениваются сверху величиной

$$\eta(M, M_0, M_1)(\|w_1 - w_2\|_W + \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + \|p_1 - p_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}),$$

где $\|w_i\|_W \leq M_0$ и $|u_i(x)| \leq M$, $|p_i(x)| \leq M_1$ для всех $x \in \Omega$, $i = 1, 2$.

К примеру, эти условия выполняются для следующего векторного дифференциального оператора:

$$\sum_{j=1}^n (w^2 |u|^2 + 1) \frac{\partial^2 u^l}{\partial x_j^2} + \sum_{m=1}^N \sum_{i,j=1}^n b_{lmij}(x, w) g_{lmij}(u, w) \frac{\partial u^l}{\partial x_i} \frac{\partial u^m}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n c_{li}(x, w) q_{li}(u, w) \frac{\partial u^l}{\partial x_i} + f_l(x, u, w),$$

где $w \in \mathbb{R}$; $c_{li}(x, w)$, $b_{lmij}(x, w)$ – непрерывные функции на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, равномерно липшицевые по второй переменной на каждом ограниченном множестве, а $g_{lmij}(u, w)$, $q_{li}(u, w)$, $f_l(x, u, w)$ – непрерывные и равномерно липшицевые по переменным (u, w) на каждом ограниченном множестве функции.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M, M_0 > 0$, $0 < \beta \leq \min\{1, 2 - n/q\}$, $\nu := 1/2(\beta + n/q) < 1$. Тогда найдутся числа $c, \varepsilon_0 > 0$, зависящие только от M, M_0, N , области Ω и такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любой ε -сети Γ в множестве Ω , произвольных $w_k \in W$, $\psi_k \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ и произвольных решений $v_k \in \mathbf{C}^2(\bar{\Omega})$ задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{w_k}(v_k) = \psi_k & \text{на } \Omega, \\ v_k = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

таких, что

$$\|v_k\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} \leq M, \quad \|\psi_k\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}, \quad \|w_k\|_W \leq M_0, \quad k = 1, 2,$$

верна оценка

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} \leq c(\|w_1 - w_2\|_W + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})\varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|(v_1 - v_2)|_{\Gamma}\|_{\infty}.$$

В частности, если $w_1 = w_2$, $\psi_1 = \psi_2$ и $v_1|_{\Gamma} = v_2|_{\Gamma}$, то $v_1 \equiv v_2$ на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Члены a_{ij} , b_i и b оператора $\mathcal{L}_w$ соответствуют членам A^{ij} , B^i и $\mathcal{F}$ оператора $L(w, v)$ из теорем 1 и 2. Член E , фигурирующий в операторе $L(w, v)$, отсутствует в операторе $\mathcal{L}_w$ (т.е. равен нулю). Таким образом, оператор $\mathcal{L}_w$ является частным случаем оператора $L(w, v)$ из теорем 1 и 2. Для того чтобы применить утверждения вышеуказанных теорем, мы введем конкретное множество $\mathfrak{B}$ и проверим выполнения условий этих теорем для оператора $\mathcal{L}_w$.

В [8; теорема 4.1, гл. 8] доказано, что в условиях теоремы $\max_{\Omega} |\nabla u|$ оценивается сверху постоянной $M_2 > 0$, зависящей только от $N, M, M_0, \nu(\cdot, M_0), \mu(\cdot, M_0), \varepsilon(\cdot, M_0), P_{M, M_0}(\cdot), \Omega$. Поэтому оператор $L(w_k, \cdot) = \mathcal{L}_{w_k}(\cdot)$ удовлетворяет требуемым свойствам из теорем 1 и 2. Действительно, на множестве

$$\mathfrak{B} = \{(w, u, \nabla u) \mid \|w\|_W \leq M_0, \|u\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} \leq M, \|\nabla u\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} \leq M_1\}$$

модули непрерывности $a_{ij}(x, w, u(x))$ оценивается функциями $\theta^{ij}(\delta) \leq \mu(M, M_0) \times (\delta + M_1\delta)$, и $|b_i(x, w, u(x), \nabla u(x))| \leq \mu(M, M_0)(1 + M_1)$, величины

$$\begin{aligned} & \|b(\cdot, w_1, u_1, \nabla u_1) - b(\cdot, w_2, u_2, \nabla u_2)\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}, \\ & \|b_i(\cdot, w, u_1, \nabla u_1) - b_i(\cdot, w, u_2, \nabla u_2)\|_{L_{q'}(\Omega)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

оцениваются сверху через

$$\begin{aligned} & \eta(M, M_0, M_1)(\|w_1 - w_2\|_W + \|u_1 - u_2\|_{C(\bar{\Omega})} + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}) \\ & \leq \bar{\eta}(M, M_0, M_1, n, N)(\|w_1 - w_2\|_W + \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}_q} + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}). \end{aligned}$$

Таким образом, из теоремы 2 вытекает требуемая оценка.

Рассмотрим теперь случай эллиптического уравнения

$$\mathcal{L}_w u = \sum_{i,j} a_{ij}(x, w, u(x), \nabla u(x)) u_{x_i x_j} + a(x, w, u(x), \nabla u(x)).$$

Изучим поведение решений $u(x)$ класса $W_q^2(\bar{\Omega})$, где $q > n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса W_q^2 . Пусть коэффициенты $a_{ij}(x, w, u, p)$ имеют обобщенные производные 1-го порядка по аргументам (x, u, p) . Предположим, что для любых чисел $M, M_0, M_1 > 0$ найдутся константы $\nu(M, M_0, M_1)$, $\mu(M, M_0, M_1)$, $\eta(M, M_0, M_1)$, $\mu_i(M, M_0) > 0$, $i = 0, 1, 2$, и функции $b, \Phi_1, \Phi_2 \in L_q(\Omega)$ такие, что для всех $(x, \xi, w, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|w| \leq M_0$, $|u| \leq M$, справедливы следующие утверждения:

1) имеет место оценка

$$\nu(M, M_0, M_1)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x, w, u, p) \xi_i \xi_j \leq \mu(M, M_0, M_1)|\xi|^2$$

для всех $|p| \leq M_1$;

2) имеет место оценка

$$\sum_{i,j,k=1}^n \left| \frac{\partial a_{ij}(x, w, u, p)}{\partial p_k} - \frac{\partial a_{ik}(x, w, u, p)}{\partial p_j} \right| \leq \mu_0(M, M_0)(1 + |p|^2)^{-1/2};$$

3) имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}(x, w, u, p)}{\partial u} p_k p_k - \frac{\partial a_{kj}(x, w, u, p)}{\partial u} p_k p_i \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial a_{ij}(x, w, u, p)}{\partial x_k} p_k - \frac{\partial a_{kj}(x, w, u, p)}{\partial x_k} p_j \right) \right| \\ & \leq (1 + |p|^2)^{1/2} (\mu_2(M, M_0)|p| + \Phi_2(x)); \end{aligned}$$

4) имеет место оценка

$$|a(x, w, u, p)| \leq \mu_1(M, M_0)|p|^2 + b(x)|p| + \Phi_1(x);$$

5) величины

$$\begin{aligned} & \|a_{ij}(\cdot, w_1, u_1, p_1) - a_{ij}(\cdot, w_2, u_2, p_2)\|_{\mathbf{L}_{q'}(\Omega)}, \\ & \|a(\cdot, w_1, u_1, p_1) - a(\cdot, w_2, u_2, p_2)\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \end{aligned}$$

оцениваются сверху через

$$\eta(M, M_0, M_1)(\|w_1 - w_2\|_W + \|u_1 - u_2\|_{C(\bar{\Omega})} + \|p_1 - p_2\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}),$$

где $\|w_i\|_W \leq M_0$, и $|u_i(x)| \leq M$, $|p_i(x)| \leq M_1$ для всех $x \in \Omega$, $i = 1, 2$.

К примеру эти условия выполняются для следующего оператора:

$$\sum_{j=1}^n (w^2 u^2 + (1 + |\nabla u|^2)^{1/2}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, w) g_{ij}(u, w) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x, w) q_i(u, w) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(x, u, w),$$

где $w \in \mathbb{R}$; $c_i(x, w)$, $b_{ij}(x, w)$ – непрерывные функции на $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, равномерно липшицевые по второй переменной на каждом ограниченном множестве, а $g_{ij}(u, w)$, $q_i(u, w)$, $f(x, u, w)$ – непрерывные и равномерно липшицевые по переменным (u, w) на каждом ограниченном множестве функции. В частности, можно рассмотреть и более простой (конкретный) оператор

$$\mathcal{L}_w u = \Delta u - (w^2(|x|^2 - w^2)^2 - u^2)u - w|x|.$$

Из теоремы 4.1 (см. [7]) вытекает, что для всякого непрерывного решения $u \in W_q^2(\bar{\Omega})$ задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_w(u) = \psi & \text{на } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

норма $\|\nabla u\|_{L_\infty(\Omega)}$ для всех $w \in W$ таких, что $\|w\|_W \leq M_0$, оценивается величиной, зависящей только от

$$n, \quad q, \quad \Omega, \quad M_0, \quad \|u\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad \|\psi\|_{L_q(\Omega)}, \quad \|b\|_{L_q(\Omega)}, \quad \|\Phi_i\|_{L_q(\Omega)}, \quad i = 1, 2.$$

Предполагая дополнительно, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial a_{ij}(x, w, u, p)}{\partial p_k} \right| &\leq \mu_3(M, M_0, M_1), \\ \left| \frac{\partial a_{ij}(x, w, u, p)}{\partial x_k} \right|, \left| \frac{\partial a_{ij}(x, w, u, p)}{\partial u} \right| &\leq \Phi_3(x) \in L_q(\Omega), \quad p = \nabla u, \end{aligned}$$

мы получим в силу теоремы 4.3 (см. [7]) гёльдеровость ∇u с некоторым показателем, зависящим только от

$$n, \quad q, \quad \Omega, \quad M_0, \quad \|u\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad \|\psi\|_{L_q(\Omega)}, \quad \|b\|_{L_q(\Omega)}, \quad \|\Phi_i\|_{L_q(\Omega)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда и из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M, M_0 > 0$, $\beta \in (0, 1]$, $q > n$, $\nu := (1/2)(\beta + n/q) < 1$. Тогда найдутся числа $s, \varepsilon_0 > 0$, зависящие только от M, M_0 и области Ω и такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любой ε -сети Γ в множестве Ω , произвольных $w_k \in W$, $\psi_k \in L_q(\Omega)$ и произвольных решений $v_k \in W_q^2(\bar{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{w_k}(v_k) = \psi_k & \text{на } \Omega, \\ v_k = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

таких, что

$$\|v_k\|_{C(\overline{\Omega})} \leq M, \quad \|\psi_k\|_{L_q(\Omega)}, \quad \|w_k\|_W \leq M_0, \quad k = 1, 2,$$

верна оценка

$$\|v_1 - v_2\|_{C(\overline{\Omega})} \leq c(\|w_1 - w_2\|_W + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_q(\Omega)})\varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|(v_1 - v_2)|_\Gamma\|_\infty.$$

В частности, если $w_1 = w_2$, $\psi_1 = \psi_2$ и $v_1|_\Gamma = v_2|_\Gamma$, то $v_1 \equiv v_2$ на Ω .

Отметим, что, в частности, утверждения предыдущей теоремы верны для уравнений вида

$$\Delta v_k = (w_k^2(|x|^2 - w_k^2)^2 - v_k^2)v_k + w_k|x| + \psi_k(x), \quad k = 1, 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в качестве пространства параметров W взять пространство $W_q^2(\overline{\Omega})$ и рассмотреть оператор

$$\mathcal{L}_\varphi u = \sum_{i,j} a_{ij}(x, u\varphi, \nabla(u + \varphi))(u + \varphi)_{x_i x_j} + a(x, u + \varphi, \nabla(u + \varphi)),$$

то задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varphi u = \psi & \text{на } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_\varphi v = \psi - \mathcal{L}_\varphi \varphi & \text{на } \Omega, \\ v = \varphi & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

равносильны. Поэтому в условиях предыдущей теоремы выполняется неравенство

$$\|v_1 - v_2\|_{C(\overline{\Omega})} \leq c(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_q^2(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_q(\Omega)})\varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|(v_1 - v_2)|_\Gamma\|_\infty.$$

4. Случай параболических систем и уравнений. Пусть W и $V = V_q$ – те же банаховы пространства, что и в предыдущем пункте, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $S = \partial\Omega$ класса C^2 , $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $Q_0 = \overline{\Omega} \times \{0\}$, $S_T = S \times (0, T)$, $\partial''Q = S \times [0, T]$, $\partial'Q_T = Q_0 \cup \partial''Q$, $Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$.

Рассмотрим пространство

$$\Phi = \{\varphi: \partial'Q_T \rightarrow V \mid \|\varphi\|_\Phi < +\infty\},$$

где норма

$$\|\varphi\|_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \|\varphi|_{Q_0}\|_{\mathbf{W}_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|\varphi|_{\partial''Q}\|_{\mathbf{W}_q^{2-1/q, 1-1/(2q)}(\partial''Q)}.$$

Через $\mathcal{B}: \mathbf{W}_q^{2,1}(\overline{Q}_T) \rightarrow \Phi$ обозначим оператор сужения на $\partial'Q_T$ (это непрерывный линейный оператор). Рассмотрим также банаховы пространства

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_q^n(Q_T) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{L}_q(Q_T))^n, \quad \mathcal{G} = \mathbf{L}_q(Q_T), \quad X_0 = W \times \mathbf{L}_q(Q_T) \times \mathbf{L}_q^n(Q_T) \\ X &= W \times \mathbf{L}_q(Q_T) \times \mathbf{L}_q^n(Q_T) \times \Phi \times \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathcal{A} = \{A^{ij}: Q_T \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1, j=1}^{n,n}$$

– матричное отображение, и $E, B^i: Q_T \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим звездное относительно точки (w_0, u_0) множество $\mathfrak{M} \subset W \times \mathbf{W}_q^1(Q_T)$ и звездное относительно точки $(w_0, u_0, \nabla u_0)$ множество $\mathfrak{N} \subset X_0$.

Итак, будем предполагать, что для любого ограниченного множества $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}$ найдутся положительные числа

$$\nu = \nu(\mathcal{M}) > 0, \quad \mu = \mu(\mathcal{M}) > 0, \quad d = d(\mathcal{M}) > 0,$$

для которых выполнены неравенства

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n A^{ij}(x, t, w, u, \nabla u) \xi_i \xi_j \leq \mu|\xi|^2,$$

$$\|E(\cdot, \cdot, w, u, \nabla u)\|_{L_q(Q_T)}, \|B^i(\cdot, \cdot, w, u, \nabla u)\|_{L_r(Q_T)} \leq d, \quad i = 1, \dots, n,$$

для произвольных $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $(w, u) \in \mathcal{M}$, где

$$r = \begin{cases} \max(q, n+2), & \text{если } q \neq n+2, \\ n+2+\varepsilon, & \text{если } q = n+2, \end{cases} \quad q > \frac{n+2}{2},$$

а $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

Далее, для любого ограниченного множества $N \subset \mathfrak{N}$ найдется число $c = c(N) > 0$, для которого выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|E(\cdot, \cdot, s_1) - E(\cdot, \cdot, s_2)\|_{L_{q'}(Q_T)} &\leq c\|s_1 - s_2\|_{X_0}, \\ \|B^i(\cdot, \cdot, s_1) - B^i(\cdot, \cdot, s_2)\|_{L_{q'}(Q_T)} &\leq c\|s_1 - s_2\|_{X_0}, \\ \|A^{ij}(\cdot, \cdot, s_1) - A^{ij}(\cdot, \cdot, s_2)\|_{L_{q'}(Q_T)} &\leq c\|s_1 - s_2\|_{X_0} \end{aligned}$$

для всех индексов i, j и $s_k = (w_k, u_k, p_k) \in N$, $k = 1, 2$.

Кроме того, пусть модули непрерывности функций A^{ij} равномерно по множеству N стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0+$, т.е.

$$\begin{aligned} \theta_N^{ij}(\delta) = \sup\{|A^{ij}(x_1, t_1, s(x_1, t_1)) - A^{ij}(x_2, t_2, s(x_2, t_2))| \\ |(x_k, t_k, s) \in Q_T \times N, |(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| \leq \delta\} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Будем также предполагать, что величины

$$\alpha(\tau) = \sup_{\substack{t \in (0, T), \\ (w, u, p) \in N}} \|B^i(\cdot, \cdot, w, u, p)\|_{L_r(Q_{t, t+\tau})},$$

$$\beta(\tau) = \sup_{\substack{t \in (0, T), \\ (w, u, p) \in N}} \|E(\cdot, \cdot, w, u, p)\|_{L_q(Q_{t, t+\tau})}$$

стремятся к нулю при $\tau \rightarrow 0+$.

Определим звездное относительно точки $(w_0, u_0, \nabla u_0)$ множество

$$\mathfrak{B} = \{(w, u, \nabla u) \in \mathfrak{N} \mid (w, u) \in \mathfrak{M}\}$$

и отображение $F: \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G} \times Y \rightarrow Z$, где $Y = \mathbf{W}_q^2(Q_T)$ и $Z = \mathbf{L}_q(Q_T) \times \Phi$, положив для произвольных точек $(s, \varphi, g, u) \in \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G} \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \chi$, где $s = (w, v, \nabla v)$, значение $F(s, \varphi, g, u)$ равным

$$\left(u_t - \sum_{i,j} A^{ij}(x, t, s) u_{x_i x_j} + \sum_i B^i(x, t, s) u_{x_i} + E(x, t, s) u + g(x, t), \mathcal{B}u - \varphi(x, t) \right).$$

Нетрудно видеть, что $F \in \mathcal{H}^1(\chi)$.

Предположим, что для некоторых (φ_0, g_0, a_0) (такая тройка всегда найдется) верно равенство

$$F(s_0, \varphi_0, g_0, a_0) = 0, \quad \text{где } s_0 = (w_0, u_0, \nabla u_0),$$

и рассмотрим уравнение

$$F(s, \varphi, g, u) = 0, \quad \text{где } s = (w, v, \nabla v).$$

Поскольку для произвольного ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B}$ функции

$$a^{ij}(x, t) := A^{ij}(x, t, s(x, t)): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

равномерно непрерывны и их модули непрерывности оцениваются функциями $\theta_N^{ij}(\cdot)$, а функции $b^i(x, t) = B^i(x, t, s)$ и $e(x, t) = E(x, t, s(x, t))$ имеют равномерно ограниченные константой $d(N)$ нормы соответственно в пространствах $L_r(Q_T)$ и $L_q(Q_T)$, и

$$\|b^i\|_{L_r(Q_{t,t+\tau})} \leq \alpha(\tau) \rightarrow 0, \quad \|e\|_{L_s(Q_{t,t+\tau})} \leq \beta(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0+,$$

то в силу теоремы 9.1 (см. [9; гл. 4]) линейный оператор

$$F'_u(s, \varphi, g, u)[\eta] \equiv F'_u(s, \varphi, g)[\eta] = (L_s \eta, \mathcal{B} \eta),$$

где

$$L_s \eta = \eta_t - \sum_{i,j} a^{ij}(x, t) \eta_{x_i x_j} + \sum_i b^i(x, t) \eta_{x_i} + e(x, t) \eta$$

равномерно ограничен на множестве N и обратим в каждой точке (s, φ, g) .

Это вытекает из ограниченности оператора $\mathcal{B}$ и равномерной ограниченности операторов

$$\mathcal{L}_s[y] = y_t - \sum_{i,j} a^{ij}(x, t) y_{x_i x_j} + \sum_i b^i(x, t) y_{x_i} + e(x, t) y,$$

определенных на пространстве действительных функций $W_q^{2,1}(Q_T)$, с образами в пространстве $L_q(\Omega)$. Последнее следует из теоремы 9.1 (см. [9; гл. 4]). Действительно, в силу этой теоремы найдется константа $P > 0$, зависящая только от множеств N , Q_T функций $\theta_N^{ij}(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ и чисел $\lambda(N)$, $\mu(N)$, $d(N)$, r , q , такая, что

$$\|\mathcal{L}_s[y]\|_{L_q(\Omega)} \leq P \|y\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}$$

для всех действительных функций $y \in L_q(Q_T)$. Возьмем произвольную вектор функцию $\eta(x, t) = \sum_\alpha \eta_\alpha(x, t) e_\alpha$, тогда

$$\|\mathcal{L}_s[\eta_\alpha]\|_{L_q(Q_T)} \leq P \|\eta_\alpha\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \quad \text{для всех } \alpha.$$

Учитывая, что $L_s \eta = \sum_\alpha \mathcal{L}_s[\eta_\alpha] e_\alpha$, мы получим требуемую оценку:

$$\begin{aligned} \|L_s \eta\|_{L_q(Q_T)} &= \left(\sum_\alpha \|\mathcal{L}_s[\eta_\alpha]\|_{L_q(Q_T)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_\alpha P^q \|\eta_\alpha\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}^q \right)^{1/q} = P \|\eta\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}. \end{aligned}$$

Кроме того, для оператора $\mathfrak{L} = (\mathcal{L}_s, \mathcal{B})$ выполняется неравенство

$$\|y\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \leq K \|\mathfrak{L}_s[y]\|_{L_q(Q_T)}$$

для произвольной функции $y \in W_q^{2,1}(Q_T)$, где константа $K > 0$ зависит только от множеств N , Q_T , функций $\theta_N^{ij}(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ и чисел $\lambda(N)$, $\mu(N)$, $d(N)$, r , q . При этом оператор $\mathfrak{L}_s$ обратим, и, следовательно, для любой функции $f \in L_q(Q_T)$ такой, что $\|f\|_{L_q(Q_T)} \leq 1$, существует функция $\mathfrak{L}_s^{-1}f$, норма которой не превосходит числа K . Покажем, что отсюда вытекает оценка

$$\|\eta\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} \leq K \|F'_u[\eta]\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}$$

для произвольной функции $\eta \in \mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)$ и $(1/K)$ -регулярность оператора F'_u . Действительно,

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} &= \left(\sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{\alpha} K^q \|\mathfrak{L}[\eta_{\alpha}]\|_{L_q(Q_T)}^q \right)^{1/q} = K \|F'_u[\eta]\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}. \end{aligned}$$

Для каждой вектор-функции

$$\mathbf{f}(x, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x, t) e_{\alpha} \in \mathbf{L}_q(Q_T) : \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)} \leq 1,$$

рассмотрим вектор-функцию

$$\eta(x, t) = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(x, t) e_{\alpha} \in \mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T), \quad \text{где } \eta_{\alpha} = \mathfrak{L}_s^{-1} f_{\alpha}.$$

Тогда $F'_u[\eta] = \mathbf{f}$ и $\|\eta\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} \leq K$, т.е. оператор F'_u является $(1/K)$ -регулярным линейным изоморфизмом между $\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)$ и $\mathbf{L}_q(Q_T)$.

В силу следствия А найдется отображение $G: \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G} \rightarrow Y$ такое, что $G \in \mathcal{H}^1(\mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G})$ и $F(s, \varphi, g, G(s, \varphi, g)) \equiv 0$ на $\mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G}$. При этом, учитывая, что для каждой точки (s, φ, g) оператор $F'_u(s, \varphi, g, u)[\cdot]$ является линейным непрерывным изоморфизмом, а также то, что условие $F(s, \varphi, g, u) = 0$ эквивалентно $F'_u(s, \varphi, g)[u] = (-g, -\varphi)$, мы получим, что вектор-функция u однозначно определяется тройкой (s, φ, g) . Тем самым, для каждой точки (s, φ, g) условие $F(s, \varphi, g, u) = 0$ эквивалентно равенству $u = G(s, \varphi, g)$, т.е. глобальное решение уравнения $F(s, \varphi, g, u) = 0$ единственно.

Рассмотрим отображение $\mathcal{F}: Q_T \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbf{L}_q(\Omega)$ такое, что для любого ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B}$ найдется константа $J = J(N) > 0$, для которой выполняется неравенство

$$\|\mathcal{F}(\cdot, \cdot, s_1) - \mathcal{F}(\cdot, \cdot, s_2)\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)} \leq J \|s_1 - s_2\|_{X_0} = J (\|w_1 - w_2\|_W + \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{W}_q^1(\Omega)})$$

для всех точек $s_i = (w_i, u_i, \nabla u_i) \in \mathfrak{B}$, $i = 1, 2$.

Введем оператор

$$\begin{aligned} L(w, v) \stackrel{\text{def}}{=} v_t - \sum_{i,j} A^{ij}(x, t, w, v, \nabla v) v_{x_i x_j} + \sum_i B^i(x, t, w, v, \nabla v) v_{x_i} \\ + E(x, w, v, \nabla v) v + \mathcal{F}(x, t, w, v, \nabla v). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. Для произвольного ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G}$ найдется константа $\mathcal{P} = \mathcal{P}(N) > 0$ такая, что для произвольных функций w_k, φ_k, g_k и произвольных решений $v_k \in \mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)$ задачи

$$\begin{cases} L(w_k, v_k) = g_k & \text{на } Q_T, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial' Q_T \end{cases}$$

таких, что $(w_k, v_k, \nabla v_k, \varphi_k, g_k) \in N$, $k = 1, 2$, верно неравенство

$$\|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} \leq \mathcal{P}(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы уже отмечали, v_k является решением задачи

$$\begin{cases} L(w_k, v_k) = g_k & \text{на } Q_T, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial' Q_T \end{cases}$$

в том и только том случае, когда

$$v_k = G(w_k, v_k, \nabla v_k, \varphi_k, \mathcal{F}(\cdot, \cdot, w_k, v_k, \nabla v_k) - g_k), \quad k = 1, 2.$$

Следовательно, найдется константа $c = c(N) > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} &\leq c(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)} + \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_{\mathbf{L}_q^n(Q_T)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi \\ &\quad + \|\mathcal{F}(\cdot, w_1, v_1, \nabla v_1) - \mathcal{F}(\cdot, w_2, v_2, \nabla v_2)\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)} + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}) \\ &\leq (c + cJ)(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^{1,0}(Q_T)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}). \end{aligned}$$

В силу теоремы вложения (см. [9]) найдется константа $P_1 > 0$, зависящая от Q_T, q , $c_1 = c + cJ$ такая, что

$$\|u\|_{W_q^{1,0}(Q_T)} \leq (4c_1)^{-1} \|u\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} + P_1 \|u\|_{L_q(Q_T)}$$

для всех $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$. Поэтому для любой функции $v(x) = \sum_\alpha v_\alpha(x) e_\alpha \in \mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{W}_q^{1,0}(Q_T)}^q &= \sum_\alpha \|v_\alpha\|_{W_q^{1,0}(Q_T)}^q \leq \sum_\alpha ((4c_1)^{-1} \|v_\alpha\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} + P_1 \|v_\alpha\|_{L_q(Q_T)})^q \\ &\leq \sum_\alpha 2^q ((4c_1)^{-q} \|v_\alpha\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}^q + P_1^q \|v_\alpha\|_{L_q(Q_T)}^q) \\ &\leq (2c_1)^{-q} \sum_\alpha \|v_\alpha\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}^q + (2P_1)^q \sum_\alpha \|v_\alpha\|_{L_q(Q_T)}^q \\ &= (2c_1)^{-q} \|v\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)}^q + (2P_1)^q \|v\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}^q \\ &\leq ((2c_1)^{-1} \|v\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} + 2P_1 \|v\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})^q. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} \\ & \leq \mathcal{P}(\|w_1 - w_2\|_W + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{P} = 2c_1(1 + 2P_1)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть

$$0 < \beta \leq \min\left\{1, 2 - \frac{n+2}{q}\right\}, \quad \nu = \frac{\beta + n/q}{2 - 2/q}.$$

Тогда для произвольного ограниченного множества $N \subset \mathfrak{B} \times \Phi \times \mathcal{G}$ найдутся числа $c, \varepsilon_0 > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, произвольных функций w_k, φ_k, g_k и произвольных решений $v_k \in \mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T) \cap \mathbf{C}(\overline{Q}_T)$ задачи

$$\begin{cases} \mathbf{L}(w_k, v_k) = g_k & \text{на } Q_T, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial' Q_T \end{cases}$$

таких, что $(w_k, v_k, \nabla v_k, \varphi_k, g_k) \in N$, $k = 1, 2$, и любой ε -сети Γ в множестве $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, где $\tau \in [0, T]$ такое, что $\|v(\cdot, \tau)\| = \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}$, $v = v_1 - v_2$, верна оценка

$$\begin{aligned} & \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} \\ & \leq c(\|w_1 - w_2\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})\varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|(v_1 - v_2)|_\Gamma\|_\infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы вложения (см. [9]) с некоторой константой k , зависящей только от Q_T, q , выполняется неравенство

$$\|f\|_{W_q^\gamma(\Omega_\tau)} \leq k\|f\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \quad \text{для всех } f \in W_q^{2,1}(Q_T), \quad \text{где } \gamma = 2 - \frac{2}{q}.$$

Так же, как и ранее, доказывается оценка

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_q^\gamma(\Omega_\tau)} \leq k\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)} \quad \text{для всех } \mathbf{f} \in \mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T).$$

Отсюда и из следствия 1 вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\overline{\Omega}_\tau)} & \leq P(\text{mes}^{1/q} \Omega + \text{mes}^{(1-\nu)/q} \Omega)(\|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega}_\tau)} + \|v\|_{\mathbf{W}_q^\gamma(\Omega_\tau)}^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega}_\tau)}^{1-\nu}) \\ & \leq P_1(\|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega}_\tau)} + \|v\|_{\mathbf{W}_q^{2,1}(Q_T)}^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega}_\tau)}^{1-\nu}), \end{aligned}$$

где

$$P_1 = P(\text{mes}^{1/q} \Omega + \text{mes}^{(1-\nu)/q} \Omega)(1 + k^\nu).$$

Положим $w = w_1 - w_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $g = g_1 - g_2$, тогда в силу теоремы 5 имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\overline{\Omega}_\tau)} & \leq P_1(\|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega}_\tau)} + \mathcal{P}^\nu(\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)} + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega}_\tau)}^{1-\nu}) \\ & \leq P_2(\|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)})^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}^{1-\nu}), \end{aligned}$$

где

$$P_2 = P_1(1 + \mathcal{P}^\nu(1 + \text{mes}^{1/q} \Omega)^\nu).$$

Пусть $\varepsilon_0 = (8P_2)^{-1/\beta}$. Рассмотрим произвольные число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и ε -сеть Γ в множестве Ω_τ . Пусть $x_0 \in \overline{\Omega}_\tau$, $x \in \Gamma$ – такие точки, что

$$\|v(x_0)\|_V = \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega}_\tau)} \quad \text{и} \quad |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\|v(x_0) - v(x)\|_V \leq \|v\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\overline{\Omega}_\tau)} \varepsilon^\beta.$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\|v|_\Gamma\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} &\leq \|v(x_0)\|_V - \|v(x)\|_V \leq \|v(x_0) - v(x)\|_V \leq \|v\|_{\mathbf{H}_\infty^\beta(\overline{\Omega}_\tau)} \varepsilon^\beta \\ &\leq P_2 \varepsilon^\beta \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)})^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}^{1-\nu} \\ &\leq \frac{1}{8} \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})^\nu \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}^{1-\nu}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{3}{8} \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}^\nu \leq P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})^\nu$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{4} \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}^\nu \leq P_2 \varepsilon^\beta (\|w\|_W + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})^\nu.$$

Отсюда

$$\|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}^\nu \leq (4P_2)^{1/\nu} \varepsilon^{\beta/\nu} (\|w\|_W + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}).$$

Тем самым, в общем случае мы получим оценку

$$\|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} \leq c(\|w\|_W + \|\varphi\|_\Phi + \|g\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}) \varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|v|_\Gamma\|_\infty, \quad \text{где } c = (4P_2)^{1/\nu}.$$

Применим предыдущую теорему к параболическим системам для вектор-функций $u = (u^1, \dots, u^N): \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}^N$. Для $u \in \mathbf{C}^{2,1}(Q_T, \mathbb{R}^N) \cap \mathbf{C}^{1,0}(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^N)$ рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L}_w u = u_t - \sum_{ij} a_{ij}(x, t, w, u) u_{x_i x_j} + \sum_i b_i(x, t, w, u, \nabla u) u_{x_i} + b(x, t, w, u, \nabla u),$$

где $a_{ij}: Q_T \times W \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $b_i: Q_T \times W \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \rightarrow \mathbb{R}$, $b: Q_T \times W \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Будем предполагать выполненными следующие условия: для числа $M_0 > 0$ найдутся функции $\nu(\cdot, M_0)$, $\mu(\cdot, M_0)$, $\varepsilon(\cdot, M_0) > 0$ и $P(|p|, |u|, M_0)$, стремящаяся к нулю при $|p| \rightarrow +\infty$, такие, что для всех $(x, t, \xi, w, u, p) \in Q_T \times \mathbb{R}^n \times W \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ таких, что $|w| \leq M_0$, выполнено

$$1) \text{ имеют место оценки } \nu(|u|, M_0) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x, t, w, u) \xi_i \xi_j \leq \mu(|u|, M_0) |\xi|^2;$$

- 2) $|b_i(x, t, w, u, p)| \leq \mu(|u|, M_0)(1 + |p|)$;
 3) $|b(x, t, w, u, p)| \leq (\varepsilon(|u|, M_0) + P(|p|, |u|, M_0))(1 + |p|^2)$ и $(2M + 1)\varepsilon(M, M_0) \leq \nu(M, M_0)$;
 4) имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x, t, w, u) \right|, \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l}(x, t, w, u) \right| \leq \mu(|u|, M_0);$$

- 5) величины

$$\|b(\cdot, \cdot, w_1, u_1, p_1) - b(\cdot, \cdot, w_2, u_2, p_2)\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)}, \\ \|b_i(\cdot, \cdot, w, u_1, p_1) - b_i(\cdot, \cdot, w, u_2, p_2)\|_{L_{q'}(Q_T)}, \quad i = 1, 2,$$

оцениваются сверху через

$$\eta(M, M_0, M_1)(\|w_1 - w_2\|_W + \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} + \|p_1 - p_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})$$

где $\|w_i\|_W \leq M_0$ и $|u_i(x, t)| \leq M$, $|p_i(x, t)| \leq M_1$ для всех $(x, t) \in Q_T$, $i = 1, 2$.

К примеру, эти условия выполняются для следующего дифференциального оператора:

$$u_t^l - \sum_{j=1}^n (w^2 |u|^2 + 1) \frac{\partial^2 u^l}{\partial x_j^2} + \sum_{m=1}^N \sum_{i,j=1}^n b_{lmij}(x, w) g_{lmij}(u, w) \frac{\partial u^l}{\partial x_i} \frac{\partial u^m}{\partial x_j} \\ + \sum_{i=1}^n c_{li}(x, w) q_{li}(u, w) \frac{\partial u^l}{\partial x_i} + f_l(x, u, w),$$

где $w \in \mathbb{R}$; $c_{li}(x, w)$, $b_{lmij}(x, w)$ – непрерывные функции на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, равномерно липшицевые по второй переменной на каждом ограниченном множестве, а $g_{lmij}(u, w)$, $q_{li}(u, w)$, $f_l(x, u, w)$ – непрерывные и равномерно липшицевые по переменным (u, w) на каждом ограниченном множестве функции.

В силу теоремы 6.1 (см. [9; гл. 7]) для всякого решения

$$u \in \mathbf{C}^{2,1}(Q_T, \mathbb{R}^N) \cap \mathbf{C}^{1,0}(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^N)$$

задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_w u = g & \text{на } Q_T, \\ u = 0 & \text{на } S_T, \end{cases}$$

где $\|w\|_W \leq M_0$, величина $\max_{Q_T} |\nabla u|$ оценивается величиной $M_1 > 0$, зависящей только от M_0 , Ω , $\|u\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}$, $\|g\|_{\mathbf{L}_\infty(Q_T)}$, $\|\nabla u(x, 0)\|_{\mathbf{C}(\overline{\Omega})}$, функций $\nu(\cdot, M_0)$, $\mu(\cdot, M_0)$, $\varepsilon(\cdot, M_0)$, > 0 и $P(|p|, |u|, M_0)$. Отсюда и из теоремы 6 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть

$$M, M_0 > 0, \quad 0 < \beta \leq \min \left\{ 1, 2 - \frac{n+2}{q} \right\}, \quad \nu = \frac{\beta + n/q}{2 - 2/q}.$$

Тогда найдутся числа $c, \varepsilon_0 > 0$, зависящие только от M, M_0 , области Q_T , функций $\nu(\cdot, M_0)$, $\mu(\cdot, M_0)$, $\varepsilon(\cdot, M_0)$, $P(|p|, |u|, M_0)$ и такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, всех произвольных $(w_k, \varphi_k, g_k) \in W \times \mathbf{W}_q^{2-2/q}(\Omega) \times \mathbf{L}_\infty(Q_T)$ и всех произвольных решений $v_k \in \mathbf{C}^{2,1}(Q_T, \mathbb{R}^N) \cap \mathbf{C}^{1,0}(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^N)$ задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{w_k}(v_k) = g_k & \text{на } Q_T, \\ v_k = 0 & \text{на } S_T, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } Q \end{cases}$$

таких, что

$$\|v_k\|_{C(\overline{Q}_T)} \leq M, \quad \|w_k\|_W, \|g_k\|_{\mathbf{L}_\infty(Q_T)}, \|\nabla \varphi_k\|_{\mathbf{L}_\infty(Q_0)} \leq M_0, \quad k = 1, 2,$$

и любой ε -сети Γ в множестве $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, где $\tau \in [0, T]$ такое, что $\|v(\cdot, \tau)\| = \|v\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)}$, $v = v_1 - v_2$, верна оценка

$$\begin{aligned} & \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} \\ & \leq c(\|w_1 - w_2\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{W}_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{\mathbf{L}_q(Q_T)})\varepsilon^{\beta/\nu} + 2\|(v_1 - v_2)|_\Gamma\|_\infty. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $(b(x, t, u, 0), u) \geq -c_1|u|^2 - c_2$, то теорема 7 верна без предположения $\|v_k\|_{\mathbf{C}(\overline{Q}_T)} \leq M$ (см. [9; § 7, глава 7]).

Рассмотрим для функций

$$u \in W_q^{2,1}(\overline{Q}_T) \cap C^{1+\beta, \beta/2}(\partial' Q), \quad q > n + 2,$$

параболическое уравнение $\mathcal{L}_w u = 0$, где

$$\mathcal{L}_w u = u_t - \sum_{i,j} a_{ij}(x, t, w, u, \nabla u) u_{x_i x_j} + a(x, t, w, u, \nabla u),$$

$\partial\Omega \in C^2$. Будем предполагать, что коэффициенты a_{ij} имеют частные производные 1-го порядка по всем переменным, и для любых чисел $M, M_0, M_1 > 0$ и множества

$$\mathfrak{M}(M, M_0, M_1) = \{(x, t, w, u, p) \in Q_T \times W \times \mathbb{R}^{n+1} \mid |u| \leq M, \|w\|_W \leq M_0, |p| \leq M_1\}$$

найдутся константы $\nu, \mu, \mu_1 > 0$ и функции $\Psi, \Theta \in L_q(Q_T)$ такие, что для произвольных $(x, t, w, u, p) \in \mathfrak{M}(M, M_0, M_1)$ выполнены следующие утверждения

1) имеют место оценки

$$\nu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x, t, w, u, p) \xi_i \xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n;$$

2) имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(x, t, w, u, p) \right| \leq \mu_1, \\ & \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x, t, w, u, p) \right|, \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}(x, t, w, u, p) \right| \leq \Psi(x, t); \end{aligned}$$

3) $|a(x, t, w, u, p)| \leq \Theta(x, t)$ и величина

$$\|a(\cdot, \cdot, w_1, u_1, p_1) - a(\cdot, \cdot, w_2, u_2, p_2)\|_{L_q(Q_T)}$$

оценивается сверху через

$$\mu_1(\|w_1 - w_2\| + |u_1 - u_2| + |p_1 - p_2|)$$

для всех w_i, u_i, p_i таких, что $\|w_i\| \leq M_0, |u_i| \leq M, |p_i| \leq M_1$.

В силу теоремы 4.4 (см. [7]) найдутся число $\alpha > 0$, зависящее только от $q, \beta, Q_T, M_1, \nu, \mu, \mu_1$, и константа $c > 0$, зависящая от тех же параметров и дополнительно от чисел M, M_0 и норм $\|u\|_{C^{1+\beta, \beta/2}(\partial'Q)}, \|\Psi\|_{L_q(Q_T)}, \|\Theta\|_{L_q(Q_T)}$, такие, что

$$\|u\|_{C^{1+\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T)} \leq c.$$

Отсюда и из теоремы 6 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $M_1, M_0 > 0, \gamma = (\beta + n/q)/(2 - 2/q)$. Тогда найдутся числа $c, \varepsilon_0 > 0$, зависящие только от M_1, M_0, β и области Q_T , такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, всех $(w_k, \varphi_k, g_k) \in W \times \Phi \times L_q(Q_T)$ и всех решений $v_k \in W_q^{2,1}(\overline{Q}_T) \cap C^{1+\beta, \beta/2}(\partial'Q_T)$ задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{w_k}(v_k) = g_k & \text{на } Q_T, \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial'Q_T \end{cases}$$

таких, что

$$\|\nabla v_k\|_{C(\overline{Q}_T)} \leq M_1, \quad \|w_k\|_W, \|g_k\|_{L_q(Q_T)}, \|\varphi_k\|_{C^{1+\beta, \beta/2}(\partial'Q)} \leq M_0, \quad k = 1, 2,$$

и любой ε -сети Γ в множестве $\Omega_\tau = Q_T \cap \{\tau = \tau\}$, где $\tau \in [0, T]$ такое, что $\|v(\cdot, \tau)\| = \|v\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $v = v_1 - v_2$, верна оценка

$$\|v_1 - v_2\|_{C(\overline{Q}_T)} \leq c(\|w_1 - w_2\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q_T)})\varepsilon^\gamma + 2\|(v_1 - v_2)|_\Gamma\|_\infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Г. Царьков, “Устойчивость однозначной разрешимости в некорректной задаче Дирихле”, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 294–308.
- [2] И. Г. Царьков, “Устойчивость однозначной разрешимости для некоторых дифференциальных уравнений”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **14**, № 3, 2008, 170–182.
- [3] С. И. Похожаев, “Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$ ”, *Матем. сб.*, **113**:2 (1980), 324–338.
- [4] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, *Тр. МИАН*, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [5] И. Г. Царьков, “О глобальном существовании неявной функции”, *Матем. сб.*, **184**:7 (1993), 79–116.
- [6] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [7] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, “Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности”, *УМН*, **41**:5 (1986), 59–83.

- [8] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [9] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

И. Г. Царьков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tsar@mech.math.msu.su

Поступило

16.05.2009

Исправленный вариант

15.03.2011