Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О вещественных двумерных пересечениях квадрики кубикой, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 530–540

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:07:34

О вещественных двумерных пересечениях квадрики кубикой

В. А. Краснов

Работа посвящена нахождению жестких изотопических классов вещественных проективных поверхностей, которые получаются из неособых кубических сечений фиксированной неособой вещественной квадрики. Полученный результат применяется для нахождения топологического типа вещественной части многообразия Фано для последнего неисследованного грубого проективного класса вещественных четырехмерных кубик.

Библиография: 9 названий.

Введение. В данной работе рассматриваются неособые вещественные поверхности в $\mathbb{P}^4$, которые являются полными пересечениями квадрики с кубикой. Такие поверхности мы будем называть *вещественными поверхностями бистепени* $(2, 3)$. Множество этих поверхностей $\mathcal{M}$ является несвязным топологическим пространством, компоненты связности которого называются *жесткими изотопическими классами* вещественных поверхностей бистепени $(2, 3)$ (см. [1]). Каждая такая поверхность является 6-поляризованной КЗ-поверхностью. С другой стороны, каждая 6-поляризованная КЗ-поверхность изоморфна поверхности в $\mathbb{P}^4$ бистепени $(2, 3)$ (см. [2]).

Из результатов работ [3], [4] можно получить описание компонент связности факторпространства $\mathcal{M}/\mathrm{PGL}(5, \mathbb{R})$, которое дает *грубую проективную классификацию* поверхностей бистепени $(2, 3)$. Грубый проективный класс поверхности S бистепени $(2, 3)$ однозначно определяется набором инвариантов

$$(r, d, \delta_\varphi, \delta_h, \delta_{\varphi h}). \quad (0.1)$$

Во введении мы не приводим определение этих инвариантов, оно изложено в п. 1. Здесь мы приведем только геометрическое описание инварианта δ_h для поверхностей бистепени $(2, 3)$. Этот инвариант может принимать значения 0 или 1, причем для поверхности без вещественных точек $\delta_h = 1$. Пусть теперь множество вещественных точек $\mathbb{R}S$ поверхности S непустое. Тогда возьмем вещественное гиперплоское сечение H поверхности S . Инвариант δ_h для поверхности S равен нулю тогда и только тогда, когда класс гомологий

$$[\mathbb{R}H] \in H_1(\mathbb{R}S, \mathbb{F}_2)$$

равен нулю, где $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов. Заметим наконец, что группа $\mathrm{PGL}(5, \mathbb{R})$ связная, поэтому грубая проективная классификация поверхностей

бистепени $(2, 3)$ совпадает с жесткой изотопической классификацией. Описание этих классификаций с помощью инвариантов (0.1) изложено в п. 1.

Перейдем непосредственно к формулировке задачи, которая решается в данной статье. В каждом жестком изотопическом классе поверхностей бистепени $(2, 3)$ существует кубическое сечение квадрики

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 = 0,$$

называемой *эллипсоидом*, или квадрики

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 0,$$

называемой *гиперboloидом*. Заметим, что жесткий изотопический класс поверхности бистепени $(2, 3)$, не имеющей вещественных точек, конечно реализуется сечением эллипсоида, но не реализуется сечением гиперboloида. Если для поверхности S бистепени $(2, 3)$, имеющей вещественные точки, инвариант δ_h равен 1, то ее жесткий изотопический класс нельзя реализовать как кубическое сечение эллипсоида. Действительно, для сечения эллипсоида класс гомологий $[RH] \in H_1(\mathbb{R}S, \mathbb{F}_2)$ равен нулю, поэтому для него инвариант δ_h равен 0. Таким образом, возникает вопрос о том, какие жесткие изотопические классы вещественных поверхностей бистепени $(2, 3)$ с инвариантом δ_h равным нулю могут быть реализованы как кубические сечения эллипсоида, а какие – гиперboloида?

Поставленная задача имеет самостоятельное значение, но для автора она была мотивирована при получении топологической классификации многообразий Фано вещественных четырехмерных кубик. (Напомним, что многообразие Фано F кубики C состоит из прямых на C .) В работе [5] изложена грубая проективная классификация вещественных четырехмерных кубик, в частности, показано, что существует 75 таких классов. В заметке [6] были изучены топологические типы вещественных частей многообразий Фано для 73 классов грубой проективной эквивалентности вещественных четырехмерных кубик. Оставалось два класса, для которых в статье [6] нет описания топологических типов вещественных частей многообразий Фано. Один из этих классов в статье [5] назван *иррегулярным*. Вещественная часть многообразия Фано иррегулярной кубики была изучена в статье [7]. Методы, которые применялись в работе [7], позволяли установить топологический тип вещественной части многообразия Фано для последнего класса грубой проективной эквивалентности вещественных четырехмерных кубик, если бы было доказано существование вещественного кубического сечения эллипсоида, вещественная часть которого состоит из девяти сфер. Задача о существовании такой поверхности является частным случаем сформулированной ранее общей задачи о вещественных поверхностях бистепени $(2, 3)$.

Заметим, что при $\delta_h = 0$ инвариант δ_φ равен 1 (см. [3]). Поэтому при $\delta_h = 0$ достаточно задать набор инвариантов $(r, d, \delta_{\varphi h})$. На рис. 1 изображены все возможные наборы этих инвариантов, причем окружность означает, что $\delta_{\varphi h}$ равно 0, а точка означает, что $\delta_{\varphi h}$ равно 1. С помощью результатов, доказанных в работах [2], [3], можно установить, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 0.1. *Если среди классов, изображенных на рис. 1, исключить два, которые имеют инварианты $(1, 1, 0)$, $(9, 9, 0)$, то все оставшиеся классы могут быть реализованы как кубические сечения эллипсоида и гиперboloида.*

Рис. 1. Все возможные значения инвариантов $(r, d, \delta_{\varphi_h})$ при $\delta_h = 0$

Поверхность бистепени $(2, 3)$, вещественная часть которой состоит из девяти сфер, имеет инварианты $(19, 3, 1)$. Поэтому из теоремы 0.1 вытекает существование вещественного кубического сечения эллипсоида, вещественная часть которого состоит из девяти сфер. Таким образом, топологический тип вещественной части многообразия Фано для последнего класса грубой проективной эквивалентности вещественных четырехмерных кубик может быть изучен с помощью работы [7]. Соответствующий результат сформулирован в приложении.

Что касается классов жесткой изотопической классификации вещественных поверхностей бистепени $(2, 3)$ с инвариантами $(1, 1, 0)$, $(9, 9, 0)$ на рис. 1, то полного ответа на поставленный вопрос для них пока не найдено. Заметим только, что из работ [5], [8] можно вывести существование кубического сечения эллипсоида, которое реализует класс $(1, 1, 0)$.

1. Доказательство теоремы 0.1. Сначала приведем алгебраическое определение инвариантов (0.1) (см. подробности в [3], [4]). Пусть $S \subset \mathbb{P}^4$ – вещественная поверхность бистепени $(2, 3)$. На ней определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: S \rightarrow S$, которая индуцирует инволюцию на группе гомологий

$$\varphi = \tau_*: H_2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(S, \mathbb{Z}).$$

Обозначим через $L(S)$ решетку $(H_2(S, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – целочисленная билинейная симметрическая форма, определенная индексом пересечения. Рассмотрим подрешетки $L_{\pm}(S)$; они получаются из решетки $L(S)$ заменой группы $H_2(S, \mathbb{Z})$ на подгруппы $H_2(S, \mathbb{Z})_{\pm}$, на элементах которых инволюция φ совпадает с умножением на ± 1 . Тогда число $r = r(S)$ равно рангу свободной абелевой группы $L_+(S)$, а число $d = d(S)$ равно размерности векторного $\mathbb{F}_2$ -пространства

$$L(S)/L_+(S) \oplus L_-(S).$$

Рис. 2. Все возможные значения инвариантов (r, d, δ_φ) при $\delta_h = 1$

Инварианты δ_φ , δ_h , $\delta_{\varphi h}$ могут принимать только значения 0 или 1. Инвариант δ_φ равен нулю тогда и только тогда, когда выполняется сравнение $\langle x, \varphi(x) \rangle \equiv 0 \pmod 2$ для каждого $x \in L(S)$. В этом случае также говорят, что решетка $L(S)$ и поверхность S имеют *тип I*, в противном случае они имеют *тип II*. Заметим, что равенство нулю инварианта δ_φ равносильно равенству нулю класса гомологий $[\mathbb{R}S] \in H_2(S, \mathbb{F}_2)$. Инвариант δ_h равен нулю тогда и только тогда, когда выполняется сравнение $\langle h, x \rangle \equiv 0 \pmod 2$ для каждого $x \in L_-(S)$, где $h \in H_2(S, \mathbb{Z})$ – класс гомологий гиперплоского сечения. В случае, когда $\mathbb{R}S \neq \emptyset$, равенство нулю инварианта δ_h равносильно равенству нулю класса гомологий $[\mathbb{R}H] \in H_1(\mathbb{R}S, \mathbb{F}_2)$. Инвариант $\delta_{\varphi h}$ равен нулю тогда и только тогда, когда выполняется сравнение $\langle x, \varphi(x) \rangle \equiv \langle h, x \rangle \pmod 2$ для каждого $x \in L(S)$. Таким образом, равенство нулю инварианта $\delta_{\varphi h}$ равносильно равенству классов гомологий $[\mathbb{R}S], [H] \in H_2(S, \mathbb{F}_2)$. Инварианты r , d также имеют топологическое описание.

Если $\chi(\mathbb{R}S)$ – эйлерова характеристика поверхности $\mathbb{R}S$, то выполняется равенство

$$r = 10 + \frac{1}{2} \chi(\mathbb{R}S).$$

Если $\beta_*(\mathbb{R}S)$ – полное число Бетти поверхности $\mathbb{R}S$ с $\mathbb{F}_2$ -коэффициентами, то при $\mathbb{R}S \neq \emptyset$ выполняется равенство

$$d = \frac{1}{2} (24 - \beta_*(\mathbb{R}S)).$$

А при $\mathbb{R}S = \emptyset$ число d равно 10.

Отметим, что через инварианты r, d, δ_φ вычисляется топологический тип поверхности $\mathbb{R}S$. Обозначим через Π_g компактную ориентируемую топологическую поверх-

ность рода g . Тогда выполняется равенство (см. [3])

$$(\mathbb{R}S)_{\text{top}} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } r = 10, d = 10, \delta_\varphi = 0; \\ \Pi_1 \sqcup \Pi_1, & \text{если } r = 10, d = 8, \delta_\varphi = 0; \\ \Pi_g \sqcup k\Pi_0 & \text{в остальных случаях, где } g = \frac{22-r-d}{2}, k = \frac{r-d}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что при $\delta_h = 0$ инвариант δ_φ равен 1 (см. [3]). Поэтому при $\delta_h = 0$ достаточно задать набор инвариантов $(r, d, \delta_{\varphi h})$. На рис. 1 изображены все возможные наборы этих инвариантов, причем окружность означает, что $\delta_{\varphi h}$ равно 0, а точка означает, что $\delta_{\varphi h}$ равно 1.

Заметим, что при $\delta_h = 1$ инвариант $\delta_{\varphi h}$ равен 1 (см. [3]). Поэтому при $\delta_h = 1$ достаточно задать набор инвариантов (r, d, δ_φ) . На рис. 2 изображены все возможные наборы этих инвариантов, причем окружность означает, что δ_φ равно 0, а точка означает, что δ_φ равно 1.

Перейдем теперь к формулировке результатов из работ [5], [8], которые потребуются при доказательстве теоремы 0.1.

Комплексные алгебраические гиперповерхности третьей степени в $\mathbb{P}^5$ называются *четырёхмерными кубиками*, далее мы называем их просто *кубиками*. Множество кубик образует 55-мерное комплексное проективное пространство, которое мы обозначаем через $\mathcal{B}$. Если $b \in \mathcal{B}$, то через C_b обозначается соответствующая кубика. Через $\mathcal{B}^*$ обозначается множество неособых кубик.

На многообразиях $\mathbb{P}^5$, $\mathcal{B}$ определена инволюция комплексного сопряжения, которую мы обозначаем через τ . Инвариантные относительно этой инволюции кубики называются *вещественными кубиками*. Множество вещественных кубик обозначается через $\mathbb{R}\mathcal{B}$, оно равно множеству неподвижных точек инволюции $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Если C – вещественная кубика, то на ней индуцируется инволюция комплексного сопряжения $\tau: C \rightarrow C$. Поэтому вещественную кубика C будем также обозначать через (C, τ) .

Множество $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ является несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ называются *жесткими изотопическими классами* неособых вещественных кубик в $\mathbb{P}^5$ (см. [1]).

Группа $\text{PGL}(6, \mathbb{R})$ вещественных автоморфизмов пространства $\mathbb{P}^5$ действует на $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Эта группа несвязная, она состоит из двух компонент связности, поэтому она может переставлять компоненты связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Проективная классификация вещественных четырехмерных кубик состоит в описании факторпространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*/\text{PGL}(6, \mathbb{R})$. Его компоненты связности будем называть *грубыми проективными классами* вещественных кубик (см. [3]). Множество таких классов обозначим через $\mathcal{V}$. Заметим, что выполняется равенство

$$\mathcal{V} = \pi(\mathbb{R}\mathcal{B}^*)/\text{PGL}(6, \mathbb{R}),$$

где $\pi(\mathbb{R}\mathcal{B}^*)$ – множество компонент связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, т.е. множество классов жесткой изотопической эквивалентности вещественных кубик.

Таким образом, две вещественные кубики $C_{b'}$, $C_{b''}$ грубо проективно эквивалентны, если существует проективное преобразование $g \in \text{PGL}(6, \mathbb{R})$ такое, что точки $g(b')$, b'' принадлежат одной компоненте связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$.

В работе [5] показано, что число элементов во множестве $\mathcal{V}$ грубых проективных классов вещественных четырехмерных кубик равно 75, а также изучен граф примыканий вещественных четырехмерных кубик. Этот граф изображен на рис. 3.

Описание грубого проективного класса фиксированной вещественной четырехмерной кубики C дается с помощью решетки $(H_4(C, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – билинейная форма, определенная индексом пересечения циклов. Эту решетку будем обозначать через $\Lambda(C)$. Рассмотрим подрешетки $\Lambda_{\pm}(C)$, они получаются из решетки $\Lambda(C)$ заменой группы $H_4(C, \mathbb{Z})$ на подгруппы $H_4(C, \mathbb{Z})_{\pm}$, состоящие из элементов $a \in H_4(C, \mathbb{Z})$ таких, что $\tau_*(a) = \pm a$.

Рис. 3. Граф примыканий

Параметр r на рис. 3 равен рангу решетки $\Lambda_-(C)$, где C – кубика, представляющая данный класс эквивалентности. Параметр d равен размерности $\mathbb{F}_2$ -пространства

$$\Lambda(C)/\Lambda_+(C) \oplus \Lambda_-(C).$$

Вершины, которые изображены рядом, имеют одинаковые значения параметров r, d . Они различаются типом решетки $\Lambda(C)$. Решетка $\Lambda(C)$ и кубика C имеют *тип I*, если выполняется сравнение

$$\langle x, \tau_*(x) \rangle + \langle x, x \rangle \equiv 0 \pmod{2}$$

для каждого $x \in \Lambda(C)$. В противном случае решетка $\Lambda(C)$ и кубика C имеют *тип II*.

Среди каждой пары вершин на рис. 3, которые имеют одинаковые значения параметров r, d , вершина, не являющийся вершиной квадрата, обозначена окружностью, она имеет *тип I*, а другая вершина, т.е. та, которая является вершиной квадрата и обозначена точкой, имеет *тип II*. Если две вершины имеют одинаковые значения параметров r, d , то они обозначаются через $(r, d)_I$, $(r, d)_II$ в зависимости от типа. Остальные вершины обозначаются через (r, d) . Заметим, что вершины $(2, 0)$, $(6, 2)$,

(10, 0), (14, 2), (18, 0) имеют тип I, они обозначены окружностью. Все остальные неупомянутые вершины имеют тип II, они обозначены точкой.

Перейдем к определению ребер графа примыканий на рис. 3. Через Δ^* обозначим множество неособых точек на дискриминантной гиперповерхности $\Delta \subset \mathcal{B}$. Если $b \in \Delta^*$, то кубика C_b имеет единственную особую точку, которая является простой двойной точкой. Особая точка a кубики C_b называется *каспом*, если в окрестности точки a на $\mathbb{P}^5$ существуют комплексно аналитические координаты $z_1, \dots, z_5$ такие, что кубика C_b в этой окрестности задается уравнением $z_1^3 + z_2^2 + \dots + z_5^2 = 0$. К множеству $\Delta^* \subset \mathcal{B}$ добавим точки $b \in \Delta$ такие, что кубика C_b имеет единственную особую точку, причем она является каспом. Полученное множество точек обозначим через Δ_0 . Если $b \in \Delta_0$ и кубика C_b имеет касп в качестве единственной особой точки, то в окрестности точки b на $\mathcal{B}$ существуют комплексно аналитические координаты $w_1, \dots, w_{55}$ такие, что множество Δ_0 задается уравнением $w_1^3 + w_2^2 = 0$. Если точка $b \in \Delta_0$ вещественная, то кроме этого координаты $w_1, \dots, w_{55}$ удовлетворяют условию $w_k \circ \tau = \bar{w}_k$, $k = 1, \dots, 55$, где черта означает комплексное сопряжение. Из этих утверждений вытекает, что множество вещественных точек $\mathbb{R}\Delta_0$ является топологическим многообразием.

Компоненты связности факторпространства $\mathbb{R}\Delta_0/\mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$ являются ребрами графа примыканий. Оказывается, что множество таких ребер равно множеству классов грубой проективной эквивалентности 6-поляризованных вещественных КЗ-поверхностей (см. [5]). Соответствие, которое обеспечивает это равенство, устроено следующим образом. Если $[C]$ – класс грубой проективной эквивалентности особой кубики C , то, заменив кубику C на проективно эквивалентную, можно считать, что она задается уравнением

$$X_0 F_2(X_1, \dots, X_5) + F_3(X_1, \dots, X_5) = 0,$$

где $X_0, \dots, X_5$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^5$, $F_2(X_1, \dots, X_5)$ – квадратичная форма, $F_3(X_1, \dots, X_5)$ – кубическая форма. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} F_2(X_1, \dots, X_5) = 0, \\ F_3(X_1, \dots, X_5) = 0 \end{cases}$$

определяет неособую поверхность $S = S(C)$ бистепени (2, 3) в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$ с однородными координатами $X_1, \dots, X_5$. Эта поверхность определяется кубикой C с точностью до проективного преобразования. Класс грубой проективной эквивалентности $[S]$ поверхности S по определению ставится в соответствие классу $[C]$. Заметим, что квадратичная форма $F_2(X_1, \dots, X_5)$ невырожденная тогда и только тогда, когда особая точка кубики C является простой двойной точкой. Отметим еще, что квадрака $Q = Q(C) \subset \mathbb{P}^4$, заданная уравнением $F_2(X_1, \dots, X_5) = 0$, определяется кубикой C с точностью до проективного преобразования.

Ребра в графе примыканий на рис. 3 трех типов. Если ребро $[S]$ изображено сплошной тонкой линией, то это означает, что инвариант $\delta_h(S)$ равен 1. Если ребро $[S]$ изображено прерывистой линией, то это означает, что инвариант $\delta_h(S)$ равен 0, а инвариант $\delta_{\varphi h}(S)$ равен 1. Наконец, если ребро $[S]$ изображено сплошной толстой линией, то это означает, что инварианты $\delta_h(S)$, $\delta_{\varphi h}(S)$ равны 0.

Выберем на ребрах ориентацию, согласно которой параметр r возрастает. Для ребра $[S]$ обозначим через $v[S]$ начальную вершину согласно выбранной ориентации. Если вершина $v[S]$ равна классу грубой проективной эквивалентности $[C]$ неособой кубики C , то инварианты $r(S)$, $d(S)$ совпадают с инвариантами $r(C)$, $d(C)$, а также совпадает тип поверхности S с типом кубики C (см. [5]).

Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ – фиксированная точка. Тогда в $\mathcal{B}$ существует неособая комплексно аналитическая параметрическая кривая $b = \beta(t)$, $|t| < 1$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $\beta(0) = b_0$, $\beta(t) \notin \Delta$ при $t \neq 0$;
- 2) кривая $b = \beta(t)$ проходит через точку b_0 трансверсально к Δ ;
- 3) кривая $b = \beta(t)$ эквивариантная, т.е. выполняется равенство $\beta(\bar{t}) = \tau(\beta(t))$, где черта означает комплексное сопряжение.

Через C_t будем обозначать семейство кубик $C_{\beta(t)}$. Топологическое пространство семейства кубик C_t

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{|t| < 1} C_t \times t \subset \mathbb{P}^5 \times \{|t| < 1\}$$

является неособым комплексно аналитическим пятимерным многообразием с вещественной структурой $\tau: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, заданной инволюцией комплексного сопряжения. С другой стороны, топологическое пространство семейства $\mathbb{R}C_t$

$$\mathbb{R}\mathfrak{C} = \bigcup_{-1 < t < 1} \mathbb{R}C_t \times t \subset \mathbb{RP}^5 \times (-1, 1)$$

является неособым гладким пятимерным многообразием, причем проекция $\mathfrak{C} \rightarrow (-1, 1)$ является гладкой функцией Морса с единственной критической точкой, которая невырождена и совпадает с особой точкой кубики C_0 . Индекс этой критической точки обозначим через I_β . Пусть ε – маленькое положительное число. Тогда кубики $C_{\pm\varepsilon}$ будем обозначать через $C_\pm$. Далее предполагаем, что $d(C_-) > d(C_+)$. Тогда индекс I_β не зависит от выбора кривой, поэтому будем обозначать этот индекс через $I(b_0)$.

Компоненты связности пространства $\mathbb{R}\Delta_0$ будем называть *стенками*. На множестве стенок $\pi(\mathbb{R}\Delta_0)$ действует группа $\mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$. Факторклассы стенок при этом действии являются ребрами графа примыканий на рис. 3. Обозначим через e_1 ребро в графе примыканий, соединяющее вершину $(1, 1)$ с вершиной $(2, 0)$, а через e_2 обозначим ребро, соединяющее вершину $(9, 9)$ с вершиной $(10, 8)_I$. В работе [8] доказана

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть факторкласс стенки $W \subset \mathbb{R}\Delta_0$ задает ребро графа примыканий, отличное от ребер e_1, e_2 , которое обозначено прерывистой линией или сплошной толстой линией. Тогда существуют точки $b', b'' \in W \cap \mathbb{R}\Delta^*$ такие, что выполняются равенства

$$I(b') = 1, \quad I(b'') = 3.$$

Покажем теперь, что справедлива следующая

ЛЕММА 1.2. Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$, $C_0 = C_{b_0}$ – соответствующая особая кубика, а $Q = Q(C_0) \subset \mathbb{P}^4$ – соответствующая квадрика, определенная с точностью до проективного преобразования. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $I(b_0) = 1$, то квадрика Q является эллипсоидом;

2) если $I(b_0) = 3$, то квадрака Q является гиперboloидом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменив вещественные проективные координаты $X_0, \dots, X_5$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^5$, можно считать, что особая точка кубики C_0 имеет координаты $[1, 0, \dots, 0]$. Тогда уравнение кубики C_0 приобретает вид

$$F(X_0, \dots, X_5) = X_0 F_2(X_1, \dots, X_5) + F_3(X_1, \dots, X_5) = 0,$$

где $F_2(X_1, \dots, X_5)$ – квадратичная форма, а $F_3(X_1, \dots, X_5)$ – кубическая форма. Квадрика $Q = Q(C_0) \subset \mathbb{P}^4$ задается уравнением $F_2(X_1, \dots, X_5) = 0$. В качестве кривой $\beta(t)$ можно взять часть прямой

$$[F(X_0, \dots, X_5) + tG(X_0, \dots, X_5)],$$

где $G(X_0, \dots, X_5)$ – кубическая форма, причем $G(1, 0, \dots, 0) \neq 0$, а квадратные скобки означают соответствующую кубической форме точку в проективном пространстве $\mathcal{B}$. Рассмотрим аффинную карту $\mathbb{A}^5 \subset \mathbb{P}^5$ с аффинными координатами

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0}, \quad \dots, \quad x_5 = \frac{X_5}{X_0}.$$

Пересечение $\mathbb{R}\mathfrak{C} \cap \mathbb{R}\mathbb{A}^5 \times (-1, 1)$ задается уравнением

$$F_2(x_1, \dots, x_5) + F_3(x_1, \dots, x_5) + tG(1, x_1, \dots, x_5) = 0,$$

из которого получаем, что функция $\mathbb{R}\mathfrak{C} \cap \mathbb{R}\mathbb{A}^5 \times (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ имеет вид

$$t = -\frac{F_2(x_1, \dots, x_5) + F_3(x_1, \dots, x_5)}{G(1, x_1, \dots, x_5)}, \quad (1.1)$$

причем функции

$$x_1, \dots, x_5: \mathbb{R}\mathfrak{C} \cap \mathbb{R}\mathbb{A}^5 \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

образуют систему координат в окрестности точки $[1, 0, \dots, 0] \times \{0\} \in \mathbb{R}\mathfrak{C}$ на гладком пятимерном многообразии $\mathbb{R}\mathfrak{C}$. Рассмотрим разложение функции (1.1) в окрестности точки $(0, \dots, 0)$. Тогда получим равенство

$$t = -\frac{1}{G(1, 0, \dots, 0)} F_2(x_1, \dots, x_5) + \dots.$$

Из этого равенства и определения квадраки Q вытекают утверждения леммы.

Лемма доказана.

Для окончания доказательства теоремы 0.1 нужно применить описание ребер графа примыканий на рис. 3 с помощью классов грубой проективной эквивалентности поверхностей бистепени $(2, 3)$, а также теорему 1.1 и лемму 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [8] показано, что для стенки $W \subset \mathbb{R}\Delta_0$, которая задает ребро e_1 , существует точка $b \in W \cap \mathbb{R}\Delta^*$ такая, что выполняется равенство $I(b) = 1$. Поэтому из доказательства теоремы 0.1 вытекает существование кубического сечения эллипсоида, которое реализует класс $(1, 1, 0)$ на рис. 1.

2. Приложение. Пусть $C \subset \mathbb{P}^5$ – неособая кубика, тогда через $F = F(C)$ обозначается многообразие Фано кубики C . Его точками являются прямые в $\mathbb{P}^5$, лежащие на кубике C . Многообразие Фано F является неособым четырехмерным подмногообразием многообразия Грассмана $\mathcal{G} = G(6, 2)$ (см. [9]). На многообразии Фано F вещественной кубики C также индуцируется инволюция комплексного сопряжения $\tau: F \rightarrow F$, поэтому его обозначаем (F, τ) .

Пусть $b \in \mathcal{B}^*$, тогда через F_b будем обозначать многообразие Фано кубики C_b . Заметим, что если точки b', b'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, т.е. кубики $C_{b'}$, $C_{b''}$ принадлежат одному классу жесткой изотопической эквивалентности, то вещественные многообразия Фано $(F_{b'}, \tau)$, $(F_{b''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны.

В работах [6], [7] изучен топологический тип вещественной части многообразия Фано для 74 классов грубой проективной эквивалентности вещественных четырехмерных кубик. Остался только один класс – $(20, 2)$, для которого топологический тип вещественной части Фано не был установлен.

Из теоремы 0.1 вытекает, что существует вещественная поверхность S бистепени $(2, 3)$, которая является кубическим сечением эллипсоида, а ее вещественная часть состоит из девяти сфер. Грубый проективный класс $[S]$ поверхности S определяет ребро на графе примыканий, соединяющее вершину $(19, 2)$ с вершиной $(20, 2)$.

Пусть $\Sigma_1, \dots, \Sigma_9$ – сферы, из которых состоит поверхность $\mathbb{R}S$. Так как индексы самопересечения (Σ_i, Σ_i) , $i = 1, \dots, 9$, равны -2 , то можно изменить в окрестности каждой сферы Σ_i инволюцию $\tau: S \rightarrow S$, чтобы получилась гладкая инволюция $\hat{\tau}: S \rightarrow S$, для которой множество неподвижных точек $S^{\hat{\tau}}$ стало пустым. Тогда обозначим через $M(S)$ гладкое многообразие $M(S)$, которое равно фактормногообразию $S/\hat{\tau}$.

Из работы [7] (см. лемму 3.2 в [7]) вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если вещественная четырехмерная кубика принадлежит классу грубой проективной эквивалентности $(20, 2)$, то вещественная часть ее многообразия Фано имеет топологический тип $45\Sigma^2 \sqcup M(S)$, где Σ – двумерная сфера, $\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$, $45\Sigma^2$ – несвязное объединение сорока пяти Σ^2 , а многообразие $M(S)$ – ранее описанное четырехмерное гладкое многообразие.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33**:5 (1978), 77–89.
- [2] B. Saint-Donat, “Projective models of $K - 3$ surfaces”, *Amer. J. Math.*, **96**:4 (1974), 602–639.
- [3] В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177.
- [4] В. В. Никулин, “О компонентах связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 99–122.
- [5] S. Finashin, V. Kharlamov, “Deformation classes of real four-dimensional cubic hypersurfaces”, *J. Algebraic Geom.*, **17**:4 (2008), 677–707.
- [6] В. А. Краснов, “Эквивариантная топологическая классификация многообразий Фано вещественных четырехмерных кубик”, *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 603–615.
- [7] В. А. Краснов, “О многообразии Фано одного класса вещественных четырехмерных кубик”, *Матем. заметки*, **85**:5 (2009), 711–720.

- [8] S. Finashin, V. Kharlamov, “Topology of real cubic fourfolds”, *J. Topol.*, **3**:1 (2010), 1–28, [arXiv: math.AG/0906.1480v1](#).
- [9] C. H. Clemens, P. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math. (2)*, **95**:2 (1972), 281–356.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

20.11.2009