Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Хессами Пилеруд, Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 441–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm856>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:27:28

УДК 511.36

ОЦЕНКИ СНИЗУ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ОТ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Т. Г. Хессами Пилеруд

В работе с помощью аппроксимаций Паде первого рода получена оценка снизу для модуля линейной формы с целыми коэффициентами от значений некоторых гипергеометрических функций в рациональной точке. Эта оценка учитывает рост всех коэффициентов линейной формы.

Библиография: 7 названий.

В данной работе изучаются арифметические свойства значений некоторых гипергеометрических функций в рациональной точке. С помощью приближений Паде первого рода для таких функций получены оценки снизу линейных форм от значений гипергеометрических функций, зависящие от всех коэффициентов формы.

Для $j = 1, \dots, m$ положим

$$f_j(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{\nu}}{(\beta_1)_{\nu}} \cdot \frac{z^{\nu}}{(\beta_j + \nu)}, \quad |z| < 1,$$

где $(\alpha)_0 = 1$ и $(\alpha)_{\nu} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)$ при $\nu \geq 1$; $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m$ — некоторый набор рациональных чисел. В дальнейшем через $\text{den } \xi \in \mathbb{N}$ обозначается знаменатель несократимой дроби ξ . Для $k \in \mathbb{N}$ определим

$$h(k) = \frac{k}{\varphi(k)} \sum_{\substack{r=1 \\ (r,k)=1}}^k \frac{1}{r},$$

где φ — функция Эйлера.

ТЕОРЕМА 1. Пусть числа $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{Q}$ и $\beta_i - \beta_j, 1 + \beta_i - \alpha_1$ ($i, j = 1, \dots, m, i \neq j$) отличны от нуля и отрицательных целых,

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{den } \alpha_1, & b_j &= \text{den } \beta_j, \\ b_{i,j} &= \text{den}(\beta_i - \beta_j), & a_{1,j} &= \text{den}(\alpha_1 - \beta_j), \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, m, \quad i \neq j, \quad (1)$$

$$G = \sum_{k=1}^m \left(h(a_{1,k}) + h(b_k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m h(b_{l,k}) \right),$$

$$F = 2 \left(\ln a_1 + \sum_{\substack{p|a_1 \\ p \text{ простое}}} \frac{\ln p}{p-1} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\ln b_j + \sum_{\substack{p|b_j \\ p \text{ простое}}} \frac{\ln p}{p-1} \right) + G.$$

Пусть, далее, $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$ и выполнено неравенство

$$|b| > a^{m+1} \cdot \exp\{(m-1)(m \ln 4m + \ln 4) + mF\}.$$

Тогда существует постоянная $c = c(\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m, a, b) > 0$ такая, что для любых целых чисел $x_0, x_1, \dots, x_m$, в совокупности отличных от нуля, имеет место неравенство

$$\left| x_0 + \sum_{i=1}^m x_i f_i\left(\frac{a}{b}\right) \right| > c(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_1^{-\delta},$$

где $\bar{x}_i \geq \max\{1, |x_i|\}$ ($i = 1, \dots, m$), $\bar{x}_1 = \max\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$,

$$\delta = \frac{m(m+1) \ln a + m(m+1)F + m^3 \ln 4m + m^2 \ln 4}{\ln |b| - (m+1) \ln a - mF - (m-1)(m \ln 4m + \ln 4)}.$$

Следствие 1. Пусть $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и F – то же, что в теореме 1,

$$|b|^{\varepsilon/(m+\varepsilon)} > a^{m+1} \cdot \exp\{m^2 \ln 4m + (m+1)(F + \ln 4)\}.$$

Тогда для любого нетривиального набора целых чисел $x_0, x_1, \dots, x_m$ и чисел $\bar{x}_i \geq \max\{1, |x_i|\}$ ($i = 1, \dots, m$), удовлетворяющих условиям

$$\bar{x}_1 = \max\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}, \quad \bar{x}_1 \geq X_0 = X_0(\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m, a, b) > 0,$$

справедливо неравенство

$$\left| x_0 + \sum_{i=1}^m x_i f_i\left(\frac{a}{b}\right) \right| > (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_1^{-\varepsilon}.$$

Принцип Дирихле показывает, что уточнение последнего неравенства возможно лишь за счет величины ε .

Первая оценка линейной формы, зависящая от всех коэффициентов, для чисел e^{α_i} , $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, m$, была получена А. Бейкером в [1].

Для значений некоторых G -функций оценки такого типа с помощью явных функциональных конструкций приближений получены пока только в работах [2]–[4]. Теорема 1 обобщает результат работы [2].

Оценки линейных форм, зависящие от всех коэффициентов, от значений функций $f_j(z)$ можно получать и с помощью метода Зигеля–Шидловского [5]. Однако эффективное построение приближающих форм дает лучшие результаты.

Перейдем к доказательству теоремы.

1. Построение приближающих форм. Пусть $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{Q} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ и

$$\beta_i - \beta_j \neq 0, -1, -2, \dots, \quad 1 + \beta_i - \alpha_1 \neq 0, -1, -2, \dots, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad i \neq j. \quad (2)$$

Пусть далее $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа,

$$n_1 = \max\{n_1, \dots, n_m\}, \quad N + 1 = \sum_{i=1}^m (n_i + 1), \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m).$$

Положим

$$R_{\mathbf{n}}(\nu) = \frac{(\nu-1)(\nu-2) \cdots (\nu-N)}{(\beta_1 + \nu)_{n_1+1} \cdots (\beta_m + \nu)_{n_m+1}}, \quad (3)$$

$$F_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{\nu}}{(\beta_1)_{\nu}} R_{\mathbf{n}}(\nu) z^{-\nu}. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. *Существуют рациональные числа $\omega_{j,s}$ ($j = 1, \dots, m$; $s = 0, 1, \dots, n_j$), для которых тождественно по ν выполнено равенство*

$$R_{\mathbf{n}}(\nu) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} \frac{(\alpha_1 + \nu)_s}{(\beta_1 + \nu)_s (\beta_j + \nu + s)}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части (5) на знаменатель $R_{\mathbf{n}}(\nu)$; тогда задача сведется к доказательству существования чисел $\omega_{j,s} \in \mathbb{Q}$ ($j = 1, \dots, m$; $s = 0, 1, \dots, n_j$) таких, что тождественно по ν

$$(\nu - 1) \cdots (\nu - N) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} (\alpha_1 + \nu)_s \cdot T_{j,s}(\nu), \quad (6)$$

где $T_{j,s}(\nu)$ – многочлен степени $N - s$ равный

$$T_{j,s}(\nu) = \frac{(\beta_1 + \nu)_{n_1+1} \cdots (\beta_m + \nu)_{n_m+1}}{(\beta_1 + \nu)_s (\beta_j + \nu + s)}. \quad (7)$$

Подставляя в (6) последовательно $\nu = 1, 2, \dots, N$, получим систему N линейных однородных уравнений относительно $N + 1$ неизвестных $\omega_{j,s}$, которая имеет ненулевое решение с точностью до нормировочного множителя, который определим ниже. Тогда для выбранного ненулевого решения

$$\sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} (\alpha_1 + \nu)_s \cdot T_{j,s}(\nu) = T(\nu),$$

где $T(\nu)$ – некоторый многочлен степени не выше N .

Если $\deg T(\nu) < N$, то $T(\nu) \equiv 0$, и

$$\sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} (\alpha_1 + \nu)_s \cdot T_{j,s}(\nu) \equiv 0. \quad (8)$$

Заметим, что при $1 \leq j \leq m$, $0 \leq s \leq n_j$ в силу (7) и (2) $\beta_j + \nu + s$ делит $T_{j',s'}(\nu)$ при всех допустимых значениях $(j', s') \neq (j, s)$ и не делит $(\alpha_1 + \nu)_s T_{j,s}(\nu)$. Тогда из (8) следует, что $\omega_{j,s} = 0$ ($1 \leq j \leq m$, $0 \leq s \leq n_j$), а это невозможно.

Таким образом, $\deg T(\nu) = N$ и при соответствующем выборе нормировочного множителя $T(\nu) = (\nu - 1) \cdots (\nu - N)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$F_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{j=1}^m P_{\mathbf{n},j}(z) \cdot f_j(z^{-1}) - P_{\mathbf{n},0}(z),$$

где

$$P_{\mathbf{n},j}(z) = \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} z^s, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$P_{\mathbf{n},0}(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{s=0}^{n_i} \omega_{i,s} z^s \left(1 + \sum_{\nu=1}^s \frac{(\alpha_1)_\nu z^{-\nu}}{(\beta_1)_\nu (\beta_i + \nu)} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4) и (5) имеем

$$\begin{aligned}
 F_{\mathbf{n}}(z) &= \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} z^s \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{\nu+s} z^{-\nu-s}}{(\beta_1)_{\nu+s} (\beta_j + \nu + s)} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{n_j} \omega_{j,s} z^s \cdot \left(f_j(z^{-1}) - 1 - \sum_{k=1}^s \frac{(\alpha_1)_k z^{-k}}{(\beta_1)_k (\beta_j + k)} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m P_{\mathbf{n},j}(z) \cdot f_j(z^{-1}) - P_{\mathbf{n},0}(z),
 \end{aligned}$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 3. Существуют положительные числа c_1, c_2 , зависящие только от $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m$, такие, что при $|z| \geq 2$ и всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$ с условием $\min\{n_1, \dots, n_m\} \geq c_1$ справедливо неравенство

$$|F_{\mathbf{n}}(z)| \leq N^{c_2} |z|^{-N-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) и (4) получаем

$$F_{\mathbf{n}}(z) = \frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(\alpha_1)} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \nu)}{\Gamma(\beta_1 + \nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - N)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(\beta_i + \nu)}{\Gamma(\beta_i + \nu + n_i + 1)} z^{-\nu}. \quad (9)$$

Всюду в дальнейшем $c_3, c_4, \dots$ — некоторые положительные константы, зависящие только от $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m$.

По формуле Стирлинга имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(\alpha_1 + \nu)}{\Gamma(\beta_1 + \nu)} &\leq c_3 \cdot \nu^{\alpha_1 - \beta_1}, \\
 \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - N)} &\leq c_4 \cdot \exp \left\{ N \ln \nu - \left(\nu - N - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{N}{\nu} \right) - N \right\}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned}
 - \left(\nu - N - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{N}{\nu} \right) &= \left(\nu - N - \frac{1}{2} \right) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^r}{r \nu^r} \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^r}{r \nu^{r-1}} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^{r+1}}{r \nu^r} = N - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N^{r+1}}{r(r+1) \nu^r} < N,
 \end{aligned}$$

находим

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - N)} < c_4 \cdot \nu^N. \quad (11)$$

Далее

$$\frac{\Gamma(\beta_i + \nu)}{\Gamma(\beta_i + \nu + n_i + 1)} \leq c_5 \exp \left\{ (-1 - n_i) \ln \nu + n_i + 1 - (\beta_i + \nu + n_i + 1) \ln \left(1 + \frac{\beta_i + n_i + 1}{\nu} \right) \right\}.$$

Так как

$$\ln\left(1 + \frac{\beta_i + n_i + 1}{\nu}\right) \geq \frac{\beta_i + n_i + 1}{\nu} - \frac{(\beta_i + n_i + 1)^2}{2\nu^2},$$

при достаточно большом $\min\{n_1, \dots, n_m\}$ выполнено

$$\begin{aligned} & -(\beta_i + \nu + n_i + 1) \ln\left(1 + \frac{\beta_i + n_i + 1}{\nu}\right) \\ & \leq -\beta_i - n_i - 1 + \frac{(\beta_i + n_i + 1)^2}{2\nu} \left(-1 + \frac{\beta_i + n_i + 1}{\nu}\right) \leq -\beta_i - n_i - 1 \end{aligned}$$

и

$$\frac{\Gamma(\beta_i + \nu)}{\Gamma(\beta_i + \nu + n_i + 1)} < c_6 \cdot \nu^{-n_i - 1}. \quad (12)$$

Окончательно из (9)–(12) при $|z| \geq 2$ получаем

$$|F_{\mathbf{n}}(z)| \leq c_7 \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \nu^{\alpha_1 - \beta_1 - 1} |z|^{-\nu} < |z|^{-N-1} N^{c_8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha_1 - \beta_1}}{2^k} = N^{c_9} |z|^{-N-1},$$

и лемма доказана.

Пусть Θ – замкнутый, положительно-ориентированный, кусочно-гладкий контур, охватывающий точки $-\beta_1 - s, -\beta_j - s - 1, \dots, -\beta_j - n_j$ ($j = 1, \dots, m$) и не содержащий внутри себя остальных точек вида $-\beta_k - l, -\alpha_1 - r$, отличных от перечисленных. Для $1 \leq j \leq m$, $0 \leq s \leq n_j$ пусть число $\rho_{j,s} \in (0, 1/2]$ настолько мало, что внутри окружности $|\beta_j + \zeta + s| = \rho_{j,s}$ нет других точек вида $-\beta_k - l, -\alpha_1 - r$, отличных от $-\beta_j - s$.

Тогда из (5) легко получаем следующие интегральные представления для чисел $\omega_{j,s}$:

$$\omega_{j,s} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\beta_j + \zeta + s| = \rho_{j,s}} R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_s} d\zeta, \quad 2 \leq j \leq m, \quad 0 \leq s \leq n_j, \quad (13)$$

$$\omega_{1,s} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\beta_1 + \zeta + s| = \rho_{1,s}} R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_s} d\zeta, & \text{если } \alpha_1 = \beta_1, \\ \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2\pi i} \oint_{\Theta} R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_{s+1}} d\zeta, & \text{если } \alpha_1 \neq \beta_1, \end{cases} \quad 0 \leq s \leq n_1 \quad (14)$$

(в формулах (13), (14) число i является мнимой единицей).

ЛЕММА 4. При $|z| > 1$ и всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$ таких, что $n_1 > 1$ справедливы неравенства

$$|P_{\mathbf{n},j}(z)| \leq n_1^{c_{10}} e^{(m \ln 4m + \ln 4)n_1} |z|^{n_j}$$

при $1 \leq j \leq m$, $0 \leq s \leq n_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим функцию

$$R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_s}$$

на окружности $|\beta_j + \zeta + s| = \rho_{j,s}$ для всех допустимых значений j и s в (13) и для случая $\alpha_1 = \beta_1$ в (14):

$$\left| R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_s} \right| \leq \frac{(|\zeta| + 1)(|\zeta| + 2) \cdots (|\zeta| + N)}{|(\beta_1 + \zeta)_{n_1+1}| \cdots |(\beta_m + \zeta)_{n_m+1}|} \frac{|(\beta_1 + \zeta)_s|}{|(\alpha_1 + \zeta)_s|}.$$

Согласно [6, лемма 7.7, с. 108] находим

$$|(\beta_i + \zeta)_{n_i+1}| \geq c_{11} n_i! \cdot 2^{-n_i} n_i^{-1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_s} \right| &\leq n_1^{c_{12}} \frac{(|\beta_j| + s + 2) \cdots (|\beta_j| + s + N + 1)}{n_2! \cdots n_m! s! (n_1 - s)!} \cdot 2^{n_1 + \cdots + n_m} \\ &\leq n_1^{c_{13}} \cdot \frac{2^{2N+s} \cdot N!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot C_{n_1}^s \leq n_1^{c_{14}} e^{n_1(m \ln 4m + \ln 4)} \end{aligned}$$

при допустимых значениях j и s . Следовательно, для этих значений j и s

$$|P_{\mathbf{n},j}(z)| \leq |z|^{n_j} n_1^{c_{15}} e^{n_1(m \ln 4m + \ln 4)}.$$

Пусть теперь $\alpha_1 \neq \beta_1$ и $j = 1$, $0 \leq s \leq n_1$. Заметим, что если $\zeta \in \Theta$, то существует положительная константа c_{16} , зависящая только от чисел $\alpha_1, \beta_1 \dots \beta_m$, такая, что $|\zeta| < n_1 + c_{16}$. Тогда на контуре Θ имеем

$$\begin{aligned} \left| R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_{s+1}} \right| &\leq \frac{(|\zeta| + 1) \cdots (|\zeta| + N)}{|(\beta_1 + \zeta)_{n_1+1}| \cdots |(\beta_m + \zeta)_{n_m+1}|} \cdot \frac{|(\beta_1 + \zeta)_s|}{|(\alpha_1 + \zeta)_{s+1}|} \\ &< n_1^{c_{17}} \frac{(n_1 + c_{16}) \cdots (n_1 + c_{16} + N)}{(s+1)! (n_1 - s)! n_2! \cdots n_m!} \cdot 2^N < n_1^{c_{18}} \cdot 2^{2N+2n_1} \cdot m^N \\ &\leq n_1^{c_{19}} e^{n_1(m \ln 4m + \ln 4)}, \end{aligned}$$

и лемма доказана.

Определим натуральные числа $a_1, b_j, b_{i,j}, a_{1,j}$ ($i, j = 1, \dots, m, i \neq j$) равенствами (1). Для вычисления общего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{\mathbf{n},j}(z)$, $0 \leq j \leq m$, нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [7].

ЛЕММА 5. Пусть a, b – натуральные числа, $1 \leq a \leq b$, $(a, b) = 1$. Пусть

$$h(b) = \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{r=1 \\ (r,b)=1}}^b \frac{1}{r},$$

где φ – функция Эйлера. Тогда для $d_n(b, a) = \text{НОК}(a+b, a+2b, \dots, a+nb)$ имеет место асимптотическая формула

$$d_n(b, a) = e^{h(b) \cdot n(1+o(1))} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 6. Пусть

$$H = \sum_{k=1}^m \left(h(a_{1,k}) + h(b_k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m h(b_{l,k}) \right),$$

$$F = 2 \left(\ln a_1 + \sum_{\substack{p|a_1 \\ p \text{ простое}}} \frac{\ln p}{p-1} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\ln b_j + \sum_{\substack{p|b_j \\ p \text{ простое}}} \frac{\ln p}{p-1} \right) + H.$$

Пусть Ω – наименьший общий знаменатель коэффициентов многочленов $P_{\mathbf{n},j}(z)$, $0 \leq j \leq m$. Тогда справедливо неравенство

$$\Omega \leq e^{Fn_1 + o(n_1)} \quad \text{при } n_1 \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (13) и (14) следует, что

$$\omega_{j,s} = R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_s} (\beta_j + \zeta + s) \Big|_{\zeta = -\beta_j - s}, \quad 2 \leq j \leq m, \quad 0 \leq s \leq n_j \quad (15)$$

и $j = 1, \quad 0 \leq s \leq n_1$ в случае $\alpha_1 = \beta_1$;

$$\begin{aligned} \omega_{1,s} &= (\alpha_1 - \beta_1) \sum_{j=1}^m \sum_{k=s+1}^{n_j} R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_{s+1}} (\beta_j + k + \zeta) \Big|_{\zeta = -\beta_j - k} \\ &\quad + (\alpha_1 - \beta_1) R_{\mathbf{n}}(\zeta) \frac{(\beta_1 + \zeta)_s}{(\alpha_1 + \zeta)_{s+1}} (\beta_1 + s + \zeta) \Big|_{\zeta = -\beta_1 - s}, \quad (16) \\ &0 \leq s \leq n_1 \text{ в случае } \alpha_1 \neq \beta_1. \end{aligned}$$

Для $\omega_{j,s}$ из (15) получаем

$$\omega_{j,s} = \frac{(\zeta - 1) \cdots (\zeta - N)(\beta_j + \zeta + s)}{(\alpha_1 + \zeta)_s (\beta_1 + \zeta + s)_{n_1+1-s} \prod_{i=2}^m (\beta_i + \zeta)_{n_i+1}} \Big|_{\zeta = -\beta_j - s}. \quad (17)$$

Для натурального числа a положим

$$\sigma_a^n = \prod_{\substack{p|a \\ p \text{ простое}}} p^{[n/(p-1)]}.$$

Используя обозначения (1), легко показать, что существуют положительные постоянные $c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}$, зависящие только от чисел $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m$, такие, что

$$\begin{aligned} a_1^s \cdot \sigma_{a_1}^s \cdot d_s(a_{1,j}, c_{20}) \cdot \frac{(\zeta - 1) \cdots (\zeta - (s - 1))}{(\alpha_1 + \zeta)_s} \Big|_{\zeta = -\beta_j - s} &\in \mathbb{Z}, \\ b_1^{n_1+1-s} \cdot \sigma_{b_1}^{n_1+1-s} \cdot d_{n_1+1-s}(b_{1,j}, c_{21}) \cdot \frac{(\zeta - s) \cdots (\zeta - n_1)}{(\beta_1 + \zeta + s)_{n_1+1-s}} \Big|_{\zeta = -\beta_j - s} &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Для $1 < i < j$

$$b_i^{n_i+1} \cdot \sigma_{b_i}^{n_i+1} \cdot d_{n_1+1}(b_{i,j}, c_{22}(i)) \times \frac{(\zeta - n_1 - \dots - n_{i-1} - (i-1)) \dots (\zeta - n_1 - \dots - n_i - (i-1))}{(\zeta + \beta_i)_{n_i+1}} \Big|_{\zeta = -\beta_j - s} \in \mathbb{Z},$$

$$b_j^{n_j} \cdot \sigma_{b_j}^{n_j} \times \frac{(\zeta - n_1 - \dots - n_{j-1} - (j-1)) \dots (\zeta - n_1 - \dots - n_j - (j-2))}{(\beta_j + \zeta)_s (\beta_j + \zeta + s + 1)_{n_j-s}} \Big|_{\zeta = -\beta_j - s} \in \mathbb{Z}.$$

Для $i > j$

$$b_i^{n_i+1} \cdot \sigma_{b_i}^{n_i+1} \cdot d_{n_1}(b_{i,j}, c_{23}(i)) \times \frac{(\zeta - n_1 - \dots - n_{i-1} - (i-2)) \dots (\zeta - n_1 - \dots - n_i - (i-2))}{(\beta_i + \zeta)_{n_i+1}} \Big|_{\zeta = -\beta_j - s} \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда с учетом (17) и леммы 5 получаем, что

$$a_1^{n_1} \cdot \sigma_{a_1}^{n_1} \cdot \left(\prod_{l=1}^m b_l^{n_l+1} \cdot \sigma_{b_l}^{n_l+1} \right) \cdot \Lambda_j \cdot \omega_{j,s} \in \mathbb{Z}, \quad 2 \leq j \leq m, \quad 0 \leq s \leq n_j$$

и $j = 1, \quad 0 \leq s \leq n_1$ в случае $\alpha_1 = \beta_1$,

где

$$\Lambda_j \leq \exp \left\{ \left(h(a_{1,j}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m h(b_{i,j}) \right) n_1 (1 + o(1)) \right\} \quad \text{при } n_1 \rightarrow \infty.$$

Аналогичные рассуждения для $\omega_{1,s}$ из (16) позволяют доказать, что

$$a_1^{n_1+1} \cdot \sigma_{a_1}^{n_1+1} \cdot \prod_{l=1}^m b_l^{n_l+1} \cdot \Lambda \cdot \omega_{j,s} \in \mathbb{Z} \quad j = 1, \dots, m, \quad s = 0, \dots, n_j,$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 \dots \Lambda_m \leq \exp \left\{ \left(\sum_{l=1}^m \left(h(a_{1,l}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m h(b_{i,l}) \right) \right) n_1 (1 + o(1)) \right\}.$$

А учитывая то, что при $0 \leq s \leq n_1$

$$a_1^{n_1} \cdot \sigma_{a_1}^{n_1} \cdot d_{n_1+1}(b_1, c_{24}) \cdot \frac{(\alpha_1)_s}{(\beta_1)_{s+1}} \in \mathbb{Z}$$

и

$$\prod_{j=2}^m d_{n_1}(b_j, c_{25}(j)) \cdot \sum_{\nu=1}^s \frac{1}{\beta_j + \nu} \in \mathbb{Z},$$

получаем

$$a_1^{2n_1+1} \cdot \sigma_{a_1}^{2n_1+1} \cdot \left(\prod_{l=1}^m b_l^{n_l+1} \cdot \sigma_{b_l}^{n_l+1} \right) \cdot \Lambda \cdot \Lambda_0 \cdot P_{\mathbf{n},j}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad 0 \leq j \leq m, \quad (18)$$

где

$$\Lambda_0 \leq \exp \left\{ \left(\sum_{l=1}^m h(b_l) \right) n_1 (1 + o(1)) \right\} \quad \text{при } n_1 \rightarrow \infty.$$

Теперь из (18) следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что $\omega_{j,n_j} \neq 0$ для каждого $j = 1, \dots, m$.

Пусть $\mathbf{n}_i = (n_1 + 1, \dots, n_{m-i} + 1, n_{m+1-i}, \dots, n_m)$, $i = 0, 1, \dots, m$. Рассмотрим определитель

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = \begin{vmatrix} P_{\mathbf{n}_0,0}(z) & P_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ P_{\mathbf{n}_1,0}(z) & P_{\mathbf{n}_1,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_1,m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\mathbf{n}_m,0}(z) & P_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 7. *Выполнено $\Delta_{\mathbf{n}}(z) \equiv \text{const} \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_{\mathbf{n},j}(z)$, $0 \leq j \leq m$, – алгебраическое дополнение элемента $P_{\mathbf{n}_j,0}(z)$:

$$\Delta_{\mathbf{n},j}(z) = (-1)^j \begin{vmatrix} P_{\mathbf{n}_0,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_0,m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\mathbf{n}_{j-1},1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_{j-1},m}(z) \\ P_{\mathbf{n}_{j+1},1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_{j+1},m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{\mathbf{n}_m,1}(z) & \dots & P_{\mathbf{n}_m,m}(z) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что $\deg \Delta_{\mathbf{n},m}(z) = N + 1$ и $\deg \Delta_{\mathbf{n},j}(z) < N + 1$ при $j < m$. Из леммы 2 получаем следующие равенства при $j = 0, 1, \dots, m$:

$$P_{\mathbf{n}_j,1}(z)f_1\left(\frac{1}{z}\right) + \dots + P_{\mathbf{n}_j,m}(z)f_m\left(\frac{1}{z}\right) - P_{\mathbf{n}_j,0}(z) = \frac{d_{\mathbf{n}_j}}{z^{N+1+(m-j)}} + \dots. \quad (19)$$

Умножая обе части равенства (19) на $\Delta_{\mathbf{n},j}(z)$ и суммируя по j от 0 до m , получим

$$\Delta_{\mathbf{n}}(z) = \sum_{j=0}^m \Delta_{\mathbf{n},j}(z) \cdot P_{\mathbf{n}_j,0}(z) = \pm d_{\mathbf{n}_m} \prod_{j=1}^m \rho_j + \frac{d_1}{z} + \dots,$$

где ρ_j – старший коэффициент многочлена $P_{\mathbf{n}_{j-1},j}$. Из последнего равенства и следует утверждение леммы, так как $d_{\mathbf{n}_m} \neq 0$.

ЛЕММА 8. Пусть $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, $n_1 = \max\{n_1, \dots, n_m\}$, $N + 1 = \sum_{i=1}^m (n_i + 1)$; $z = b/a$, $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, $|z| \geq 2$. Тогда существуют положительное число $c_{26} = c_{26}(\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m)$ и $m+1$ линейно независимых форм от чисел $1, f_1(a/b), \dots, f_m(a/b)$ с целыми коэффициентами,

$$\sum_{j=1}^m T_{i,j} \cdot f_j\left(\frac{a}{b}\right) - T_{i,0} = E_i, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (20)$$

которые при $\min\{n_1, \dots, n_m\} \geq c_{26}$ удовлетворяют условиям:

$$|T_{i,j}| \leq T_j = A_1 \cdot e^{(F+m \ln 4m + \ln 4)n_1} \cdot a^{n_1} \cdot \left(\frac{|b|}{a}\right)^{n_j}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m, \quad (21)$$

$$|E_i| \leq A_2 \cdot e^{F n_1} \cdot a^{n_1} \cdot \left(\frac{|b|}{a}\right)^{-N}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

F определено в лемме 6, $A_1 = e^{o(n_1)}$ и $A_2 = e^{o(n_1)}$ при $n_1 \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из лемм 2–7, если положить

$$T_{i,j} = \Omega a^{n_1+1} \cdot P_{\mathbf{n}_i,j} \left(\frac{b}{a} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$E_i = \Omega a^{n_1+1} \cdot F_{\mathbf{n}_i} \left(\frac{b}{a} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

2. Доказательство теоремы 1. Пусть числа $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условию

$$|b| > a^{m+1} \exp\{(m-1)(m \ln 4m + \ln 4) + mF\}. \quad (22)$$

Тогда, в частности, $|b| \geq 2a$. Рассмотрим форму

$$l = x_1 f_1 \left(\frac{a}{b} \right) + \dots + x_m f_m \left(\frac{a}{b} \right) - x_0$$

с целыми коэффициентами, не все из которых равны нулю, и пусть числа $\bar{x}_i \geq \max(1, |x_i|)$, $i = 1, \dots, m$, таковы, что $\bar{x}_1 = \max\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$. Определим натуральное число n_1 как наименьшее, удовлетворяющее условию

$$\bar{x}_1 \cdot \left(e^{mF+(m-1)(m \ln 4m + \ln 4)} \cdot \frac{a^{m+1}}{|b|} \right)^{n_1} < \frac{1}{2m}.$$

В силу (22) при достаточно большом $\bar{x}_1$ такое n_1 всегда существует. Для $1 < i \leq m$ определим n_i как наименьшее натуральное, удовлетворяющее условию

$$\bar{x}_i \cdot \left(e^{mF+(m-1)(m \ln 4m + \ln 4)} \cdot a^m \right)^{n_i} \cdot \left(\frac{a}{|b|} \right)^{n_i} < \frac{1}{2m}.$$

Легко видеть, что при таком выборе чисел n_i выполнено $n_1 = \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Кроме того, при фиксированных a и b условия $\bar{x}_1 \rightarrow \infty$, $n_1 \rightarrow \infty$ и $\min\{n_1, \dots, n_m\} \rightarrow \infty$ эквивалентны. Далее по лемме 8 среди линейных форм (20) существуют m форм линейно независимых с l . Не ограничивая общности, пусть это формы $E_1, \dots, E_m$. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_m \\ T_{1,0} & T_{1,1} & \dots & T_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m,0} & T_{m,1} & \dots & T_{m,m} \end{vmatrix}$$

– целое число отличное от нуля. Вычитая из первого столбца определителя остальные, умноженные соответственно на $f_1(a/b), \dots, f_m(a/b)$, и раскладывая полученный таким способом определитель по первому столбцу, получим равенство

$$1 \leq |\Delta| \leq |l| \cdot m! \cdot T_1 \dots T_m + m! \sum_{i=1}^m \frac{T_1 \dots T_m}{T_i} \cdot |E_m|. \quad (23)$$

Из (23) и (21) для всех достаточно больших n_1 (т.е. для $\bar{x}_1 > X_0$) находим

$$1 \leq |l| \cdot e^{(mF+m^2 \ln 4m + m \ln 4)n_1} \cdot a^{mn_1-N} \cdot |b|^N + \sum_{i=1}^m \bar{x}_i e^{(mF+(m-1)(m \ln 4m + \ln 4))n_1} \cdot \frac{a^{mn_1+n_i}}{|b|^{n_i}}.$$

Отсюда с учетом выбора чисел $n_1, \dots, n_m$ при $\bar{x}_1 > X_0(a, b, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m)$ получаем

$$\begin{aligned} |I| &> \frac{1}{2} e^{-(mF+m^2 \ln 4m+m \ln 4)n_1} \cdot a^{N-mn_1} \cdot |b|^{-N} \\ &> C_*(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot (e^{m(m+1)F+m^3 \ln 4m+m^2 \ln 4} \cdot a^{m^2+m})^{-n_1} \\ &> C_{**}(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_1^{-\frac{m(m+1)F+m^3 \ln 4m+m^2 \ln 4+m(m+1) \ln a}{\ln |b|-(m+1) \ln a-mF-(m-1)(m \ln 4m+\ln 4)}} \\ &= C_{**}(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)^{-1} \cdot \bar{x}_1^{-\delta}, \end{aligned}$$

где $C_{**} = C_{**}(a, b, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_m)$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Ю. В. Нестеренко за научное руководство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baker A. On some Diophantine inequalities involving the exponential function // Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 616–626.
- [2] Фельдман Н. И. Об одной линейной форме // Acta Arith. 1972. V. 21. P. 347–355.
- [3] Сорокин В. Н. Об иррациональности значений гипергеометрических функций // Матем. сб. 1985. Т. 127(169). № 2(6). С. 245–258.
- [4] Хессами Пилеруд Т. Г. Оценка снизу одной линейной формы // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 617–623.
- [5] Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G -functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.
- [6] Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [7] Alladi K., Robinson M. Legendre polynomials and irrationality // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 318. P. 137–155.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
08.04.1999