Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев, О графах Тервиллигера, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 673–685

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:25:30

О графах Тервиллигера, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев

Граф Хофмана–Синглтона – это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(50, 7, 0, 1)$. Хорошо известна гипотеза, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона, имеет массив пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ или $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$. В данной работе справедливость гипотезы установлена при условии, что дистанционно регулярный граф является графом Тервиллигера и диаметр графа не больше 5.

Библиография: 6 названий.

Введение. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Говоря о подграфах, будем подразумевать индуцированные подграфы, если не оговорено противное. Полный подграф на n вершинах называется n -*кликой*.

Если a, b – вершины графа Γ , то через $d_\Gamma(a, b)$ (или также через $d(a, b)$, если граф Γ ясен из контекста) обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ , индуцированный множеством всех вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$, если граф Γ определен из контекста. Положим $a^\perp = [a] \cup \{a\}$.

Граф Γ называется *регулярным графом* степени k , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ .

Пусть вершины u, w находятся на расстоянии i в графе Γ . Тогда окрестность вершины w можно разбить на три непересекающихся подграфа:

$$B_i(u, w) = \Gamma_{i+1}(u) \cap [w], \quad A_i(u, w) = \Gamma_i(u) \cap [w], \quad C_i(u, w) = \Gamma_{i-1}(u) \cap [w].$$

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i := |B_i(u, w)|$ и $c_i := |C_i(u, w)|$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. При этом граф Γ регулярен степени $b_0, c_1 = 1$, любая пара смежных вершин имеет одно и то же число общих соседей k , равное $k - b_1 - 1$, а любая пара вершин, находящихся

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00009), РФФИ-БРФФИ (грант № 08-01-90006), РФФИ-ГФЕН Китая (грант № 10-01-91151), программы отделения математических наук РАН и программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

на расстоянии 2, имеет одно и то же число общих соседей, равное c_2 , которое обозначается также через μ . По лемме 4.1.6 [1] верны неравенства $b_i \leq b_{i-1}$, $c_{i+1} \geq c_i$ для любого $i = 1, \dots, d-1$.

Положим $a_i := k - b_i - c_i$ и $k_i := |\Gamma_i(u)|$ для $u \in \Gamma$, $i = 1, \dots, d$. Параметры k_i можно вычислить при помощи *прямоугольных соотношений* $k_i = b_{i-1}k_{i-1}/c_i$, и равенства $k_0 = 1$. В частности, значения k_i не зависят от выбора вершины u .

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d , и u, w – две вершины из Γ на расстоянии l . Тогда число вершин, находящихся одновременно на расстоянии i от u и на расстоянии j от w , не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии l друг от друга и обозначается через p_{ij}^l . Параметры p_{ij}^l называются *числами пересечений* графа Γ . Согласно лемме 4.1.7 из [1] значения p_{ij}^l можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} p_{ij}^l &= p_{ji}^l, & p_{i0}^l &= \delta_{il}, & p_{i,d+1}^l &= 0, \\ p_{1,l-1}^l &= c_l, & p_{1,l}^l &= a_l, & p_{1,l+1}^l &= b_l, \\ p_{j+1,i}^l &= \frac{1}{c_{j+1}}(p_{j,i-1}^l b_{i-1} + p_{j,i}^l(a_i - a_j) + p_{j,i+1}^l c_{i+1} - p_{j-1,i}^l b_{j-1}). \end{aligned}$$

Заметим, что дистанционно регулярный граф диаметра 2 с массивом пересечений $\{b_0, b_1; c_1, c_2\}$ является *сильно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ) , где v – число вершин в графе, $k := b_0$, $\lambda := k - b_1 - 1$ и $\mu := c_2$.

В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, пересечение окрестностей двух вершин, находящихся на расстоянии 2, будет называться *μ -подграфом*.

Собственными значениями и спектром графа называются соответственно собственные значения и спектр его матрицы смежности. Собственные значения регулярного графа, отличные от наибольшего собственного значения, равного степени графа, называются *неглавными*. Пусть граф Γ на v вершинах имеет матрицу смежности A (при некоторой нумерации вершин), и D – диагональная матрица порядка v такая, что элемент D_{ii} равен степени вершины с номером i . *Матрицей Лапласа* графа Γ называется матрица $L := D - A$. Набор собственных значений $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_v$ матрицы L называется *спектром Лапласа* графа Γ . Для регулярного графа $\omega_1 = 0$.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$. В разделе 4.1 [1] показано, что собственные значения графа Γ , отличные от b_0 , являются собственными значениями матрицы

$$T := \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & k - b_1 - c_2 & b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & k - b_2 - c_3 & b_3 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & k - b_3 - c_4 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{d-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{d-1} & k - b_{d-1} - c_d \end{pmatrix}.$$

Кратность собственного значения θ равна

$$f(\theta) := \frac{v}{\sum_{i=0}^d k_i u_i(\theta)^2},$$

где $u_i(\theta) := w_i(\theta)/(b_0 \dots b_{i-1})$ и $u_0(\theta) := 1$, а многочлены $w_i(x)$ определяются рекуррентным образом:

$$w_0(x) := 1, \quad w_1(x) := x, \quad w_{i+1}(x) := (x - a_i)w_i(x) - c_i b_{i-1} w_{i-1}(x).$$

За более подробными сведениями о дистанционно регулярных графах мы отсылаем читателя к [1].

Пусть m – натуральное число, X – множество из m элементов. Граф Γ называется *треугольным графом* $T(m)$, если его вершинами являются неупорядоченные пары элементов из X , и пары $\{u, w\}$, $\{x, y\}$ смежны, если $|\{u, w\} \cap \{x, y\}| = 1$.

Графом Тервиллигера называется неполный связный граф Γ , в котором все μ -подграфы являются кликами с одним и тем же числом вершин, равным $\mu(\Gamma)$.

Графом Мура называется сильно регулярный граф, в котором $\lambda = 0$ и $\mu = 1$. Хорошо известно (см. [1; гл. 1]), что степень k графа Мура может быть равна 2, 3, 7 или 57, а сам граф имеет параметры $(k^2 + 1, k, 0, 1)$. Для каждой из степеней 2, 3 и 7 существует единственный граф Мура – это пятиугольник, граф Петерсена и граф Хофмана–Синглтона (далее, для краткости HoSi) соответственно. Существование графа Мура степени 57 неизвестно.

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$ -графом*, если окрестность любой вершины в Γ изоморфна некоторому графу из класса $\mathcal{F}$.

Задача описания локально $\mathcal{F}$ -графов для заданного класса $\mathcal{F}$ является классической задачей теории графов. С другой стороны, например, каждый известный дистанционно регулярный граф Тервиллигера Γ с $\mu(\Gamma) > 1$ являются локально графом Мура:

- (1) связный локально пятиугольный граф является графом икосаэдра, т.е. дистанционно регулярными графом с массивом пересечений $\{5, 2, 1; 1, 2, 5\}$;
- (2) по теореме Холла [1; теорема 1.16.5] имеется точно 3 связных локально петерсеновских графа: $\overline{T}(7)$ (дополнительный граф к треугольному графу на 7 символах), граф Конвея–Смита (единственный дистанционно регулярный граф на 63 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$) и граф Доро (единственный дистанционно регулярный граф на 65 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$).

Неизвестно существование графов, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона. Особый интерес задача существования графов, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона, представляет в классе дистанционно регулярных графов. В параграфе 1.16 [1] сформулирована следующая

ПРОБЛЕМА. Установить существование локально HoSi-графов, в частности, дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ или $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$.

Массив пересечений, удовлетворяющий известным необходимым условиям существования дистанционно регулярного графа, не определяет граф с точностью до изоморфизма. Тем не менее, для дистанционно регулярных локально HoSi-графов не известны даже все допустимые массивы пересечений. Предполагается, что указанные в формулировке проблемы массивы являются единственно возможными. Изучение дистанционно регулярных локально HoSi-графов было начато в работе [2], в которой доказано, что такие графы являются графами Тервиллигера.

Пусть граф Γ дистанционно регулярен и известно, что окрестность каждой вершины в Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ') . Тогда первые элементы массива пересечений Γ определяются однозначно: $k = b_0 = v'$ (степень вершины в Γ), $b_1 = v' - k' - 1$ (т.е. $\lambda = k'$).

Но уже для параметра c_2 (число вершин в μ -подграфах Γ) существует, в общем случае, множество допустимых значений. Хотя, например, легко понять, что μ -подграфы в Γ будут регулярными графами степени μ' , и c_2 делит $b_0 b_1$.

В нашем случае $(v', k', \lambda', \mu') = (50, 7, 0, 1)$ и $k = b_0 = 50$, $b_1 = 42$, $\lambda = 7$, c_2 делит $42 \cdot 50$ и μ -подграфы в Γ состоят из изолированных ребер (регулярны степени 1).

Основная сложность, которая возникает при описании дистанционно регулярного графа Γ с заданным локальным строением, заключается в ограничении диаметра Γ . Если известно, что $d(\Gamma) \leq d$, то число возможных массивов пересечений для Γ длины d с начальными элементами b_0, b_1 конечно. Поэтому можно перебрать все такие массивы и найти *допустимые* массивы, т.е. удовлетворяющие известным ограничениям.

Существуют некоторые оценки диаметра дистанционно регулярного графа по значениям первых элементов его массива пересечений. Например, для дистанционно регулярных графов, содержащих четырехугольник (простой цикл на 4 вершинах), выполняется граница Тервиллигера (см. следствие 5.2.2 из [1])

$$d \leq \frac{k + c_d}{\lambda + 2} \leq \frac{2k}{\lambda + 2}.$$

Но для дистанционно регулярных графов Тервиллигера (т.е. тех графов, которые не содержат четырехугольников) не известны хорошие оценки для диаметра.

Поэтому рассматриваемая задача разбивается на 2 случая: $c_2 > 2$ (каждый μ -подграф в Γ состоит из нескольких изолированных ребер, поэтому Γ не является графом Тервиллигера) и $c_2 = 2$ (каждый μ -подграф состоит из одного ребра, т.е. является 2-кликкой).

В работе [2] показано, что случай $c_2 > 2$ невозможен. В этой статье доказывается следующая

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф Тервиллигера диаметра, не большего 5, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ или $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$.

В следующей статье авторов будет рассмотрен заключительный случай, когда $c_2 = 2$ и диаметр Γ больше 5 (результат анонсирован в [3]).

1. Вспомогательные результаты. В этом пункте приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ и спектром $\{\theta_0^1, \theta_1^{f_1}, \dots, \theta_d^{f_d}\}$, причем $\theta_0 = b_0$ и $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$.

ЛЕММА 1. Выполняются следующие утверждения:

- (1) если $i + j \leq d$ для некоторых индексов i, j , то $c_i \leq b_j$;
- (2) если $d = 3$ и $b_0 > 2$, то многочлен $w_4(x)$ должен иметь целый корень, отличный от b_0 ;
- (3) если окрестность некоторой вершины в Γ изоморфна графу Хофмана–Синглтона, то $\theta_1 \leq 20$ и $\theta_d \geq -15$;

- (4) если неглавное собственное значение θ_i имеет кратность f_i , меньшую k , то $i \in \{1, d\}$ и для $b := b_1/(\theta_i + 1)$ каждая окрестность вершины имеет собственное значение $-1-b$ кратности, не меньшей $k-f_i$ (если окрестность некоторой вершины в Γ изоморфна графу Хофмана–Синглтона и $f_i \leq 49$, то число θ_i целое).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) следует из предложения 4.1.6 [1], утверждение (2) следует из предложения 2.2.7 [1].

Пусть окрестность вершины a в Γ изоморфна графу Хофмана–Синглтона. Тогда $b_1 = 42$ и подграф $[a]$ имеет неглавные (отличные от λ , равного 7) собственные значения 2, -3 , и ввиду [4] получим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_d} \geq 2, \quad b^- = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_1} \leq -3.$$

Утверждение (3) доказано.

Утверждение (4) следует из теоремы 4.4.4 [1]. Если окрестность вершины в Γ изоморфна графу Хофмана–Синглтона и $f_i < 49$, то $-1 - b \in \{2, -3\}$, b делит b_1 и число θ_i является целым.

ЛЕММА 2. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) μ делит $b_i b_{i+1}$, $c_i c_{i+1}$ и $a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - k$;
- (2) $b_2 b_3 b_4$ делится на $c_2 c_3$, $k_i b_i$ делится на k и $k_i c_i$ делится на k ;
- (3) μ делит $b_i(a_i + a_{i+1} - a_1)$ и $c_{i+1}(a_i + a_{i+1} - a_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения следуют из леммы 4.1.7 [1] (например, утверждение (1) следует из целочисленности p_{2i-1}^{i+1} , p_{2i+1}^{i-1} и p_{22}^2).

Пусть до конца работы Γ – дистанционно регулярный граф Тервиллигера диаметра d , в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона, с массивом пересечений $\{50, 42, b_2, \dots, b_{d-1}; 1, 2, c_3, \dots, c_d\}$.

ЛЕММА 3. *Диаметр Γ больше 2 и выполняются следующие утверждения:*

- (1) если $i < d$, то $b_i + c_i + 4b_i c_i / 25 \leq 50$;
- (2) $b_2 < 36$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d = 2$, то Γ является сильно регулярным графом и собственные значения Γ являются корнями квадратного уравнения с дискриминантом $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 217$, где $k = 50$, $\mu = 2$, $\lambda = 9$. Получаем противоречие с тем, что 217 не является квадратом целого числа (см. теорему 1.3.1 из [1]).

Докажем утверждение (1). Для этого необходимо напомнить следующий результат (см. [5; предложение 4.6.1]). Если Δ – граф на v вершинах со спектром Лапласа $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_v$, и X , Y – изолированные подграфы в Δ , то выполняется неравенство

$$\frac{|X| \cdot |Y|}{(v - |X|) \cdot (v - |Y|)} \leq \left(\frac{\omega_v - \omega_2}{\omega_v + \omega_2} \right)^2.$$

Пусть Δ – граф Хофмана–Синглтона. Тогда Δ имеет спектр $\{7, 2^{28}, -3^{21}\}$ (см. теорему 1.3.1 [1]) и спектр Лапласа $\{0^1, 5^{35}, 10^{20}\}$. То есть, $\omega_2 = 5$, $\omega_v = 10$. Пусть X , Y – такие подмножества вершин из Δ , что между X и Y нет ребер. Тогда по предложению 4.6.1 из [5] имеем $|X||Y| \leq (50 - |X|)(50 - |Y|)/9$.

Пусть граф Γ удовлетворяет условию леммы, и u, w – две вершины из Γ такие, что $d(u, w) = i$, $2 \leq i \leq d - 1$. Положим $X := C_i(u, w)$, $Y := B_i(u, w)$. Тогда $c_i = |X|$, $b_i = |Y|$, и утверждение (1) леммы следует из неравенства, полученного в предыдущем абзаце.

Пусть $d(u, x) = 2$ и $[u] \cap [x] = \{w, w'\}$ для некоторых вершин $u, x \in \Gamma$. Тогда $\Gamma_2(u) \cap [x]$ содержит по 6 вершин из $[w]$ и из $[w']$. Поэтому $b_2 \leq 36$. В случае $b_2 = 36$ граф Γ является 1-однородным (определение i -однородного графа см. в [6]) и ввиду [6] не существует. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Верно равенство $k_2 = 1050$ и выполняются следующие утверждения:

- (1) если b_2 нечетно, то c_3 и b_3 четны;
- (2) если c_3 нечетно, то b_2, b_3 и c_4 четны;
- (3) для любой пары вершин u, y с $d(u, y) = 3$ степень каждой вершины в подграфе $[u] \cap \Gamma_2(y)$ не меньше 2, и если степень некоторой вершины в этом подграфе равна α , то $c_3 \geq 2\alpha$, в частности, $c_3 \geq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду прямоугольного соотношения имеем $k_2 = 50 \cdot 42/2 = 1050$.

Если b_2 нечетно, то $a_2 = 50 - c_2 - b_2 = 48 - b_2$ нечетно. Так как $a_2(a_2 - a_1) + b_2c_3 - 50$ четно (по утверждению (1) леммы 2), то c_3 четно. Далее, b_2b_3 четно, поэтому b_3 четно. Утверждение (1) доказано.

Пусть c_3 нечетно. Так как $a_2(a_2 - a_1) + b_2c_3 - 50$ четно, то b_2 четно. Далее, $a_3 + a_2 - a_1$ четно, поэтому a_3 нечетно и b_3 четно. Наконец, c_4 четно. Утверждение (2) доказано.

Пусть u – вершина графа Γ . Зафиксируем вершины $w \in [u]$, $y \in \Gamma_3(u) \cap \Gamma_2(w)$ и обозначим через e и f вершины из μ -подграфа $[w] \cap [y]$. Пусть также вершины g и h таковы, что $[u] \cap [e] = \{w, g\}$, $[u] \cap [f] = \{w, h\}$. Так как Γ не содержит 4-клик, то g, h – различные несмежные вершины. Поэтому степень любой вершины в подграфе $[u] \cap \Gamma_2(y)$ не меньше 2.

Если окрестность вершины x в подграфе $[u] \cap \Gamma_2(y)$ содержит точно α вершин $s_1, \dots, s_\alpha$, то для различных i, j подграф $[s_i] \cap [s_j]$ не пересекает $[y] \cap \Gamma_2(u)$, поэтому $c_3 \geq 2\alpha$. Таким образом, $c_3 \geq 5$ (в случае $c_3 = 4$ граф Γ содержит либо 4-клику, либо 4-цикл, оба случая невозможны). Лемма доказана.

До конца раздела предполагается, что последовательность вершин $uwxy$ является геодезическим путем в графе Γ . Обозначим через Δ подграф $[y] \cap \Gamma_2(u)$.

В леммах 5–8 показано, что при малых значениях c_3 диаметр графа Γ может быть ограничен.

ЛЕММА 5. Если $c_3 = 5$, то выполняются следующие утверждения:

- (1) подграф $\Sigma := \{u\} \cup ([u] \cap \Gamma_2(y)) \cup ([y] \cap \Gamma_2(u)) \cup \{y\}$ является графом икосаэдра;
- (2) $b_3 \leq 20$, $c_4 \geq 28$, $b_4 \leq 4$;
- (3) $d \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_3 = 5$. Тогда Δ является пятиугольником, и по построению Σ является графом икосаэдра. Утверждение (1) доказано.

Пусть окрестность вершины y в графе Σ состоит из вершин $x := x_{-1}, \dots, x_5$. Тогда для любого $i \in \{1, 5\}$ подграф $[x_i] \cap [y]$ содержит 2 вершины из Σ и 5 вершин из $\Gamma_3(u)$. Заметим, что для различных i, j подграф $[x_i] \cap [y] \cap \Gamma_3(u)$ не пересекает $[x_j]$.

В самом деле, если 2 вершины x_i, x_j несмежны, то $[x_i] \cap [x_j] \subset \Sigma$, а если вершины x_i, x_j смежны, то подграф $[x_i] \cap [x_j]$ является 7-кликкой. Поэтому $a_3 \geq 25$ и $b_3 \leq 20$.

Предположим, что диаметр Γ не меньше 5 и выберем $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$. Для каждого $i \in \{1, \dots, 5\}$ μ -подграф $[x_i] \cap [z]$ содержит вершину y и еще некоторую вершину y_i . Заметим, что вершины $y_1, \dots, y_5$ попарно различны. Таким образом, подграф $[y] \cap [z]$ содержит не более 2 вершин из $\Gamma_4(u)$. Далее, любая вершина $t \in [z] \cap \Gamma_5(u)$ смежна с одной из двух вершин в $[y] \cap [z] \cap \Gamma_4(u)$, скажем с z' . Так как $[z] \cap [z']$ содержит y и не более 6 вершин из $\Gamma_5(u)$, то $b_4 \leq 12$.

Так как степень вершины y в графе $[z] \cap \Gamma_3(u)$ не меньше 5, и граф $[z] \cap \Gamma_3(u)$ не содержит треугольников и четырехугольников, то $c_4 = |[z] \cap \Gamma_3(u)| \geq 1 + 5 + 20$, причем в случае равенства $[z] \cap \Gamma_3(u)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(26, 5, 0, 1)$; противоречие с тем, что такой граф не существует (см. теорему 1.3.1 из [1]). Так как $c_3 c_4$ четно, то $c_4 \geq 28$. Если $d \geq 5$, то по лемме 3 имеем $28 + b_4 + 4 \cdot 28b_4/25 \leq 50$, поэтому $b_4 \leq 4$. Утверждение (2) доказано.

Если $d \geq 7$, то по лемме 1 имеем $c_4 \leq b_3$; противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если $c_3 = 6$, то выполняются следующие утверждения:

- (1) подграф Δ является шестиугольником;
- (2) $b_3 \leq 17$, $c_4 \geq 20$, $b_4 \leq 12$, причем в случае $b_4 \geq 7$ имеем $b_3 \leq 15$;
- (3) $d \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_3 = 6$. Если, без ограничения общности, степень вершины x в графе Δ равна 3, то $\Delta - x^\perp$ содержит 2 вершины, каждая из которых смежна с единственной вершиной из $\Delta_1(x)$. Противоречие с тем, что степень вершины из $\Delta_1(x)$, несмежной с вершинами из $\Delta_2(x)$, в графе Δ равна 1. Значит, степень любой вершины в графе Δ равна 2 и Δ является шестиугольником $x_1, \dots, x_6$. Утверждение (1) доказано.

Далее, $[x_i]$ содержит 5 вершин из $\Gamma_3(u) \cap [y]$, и для различных i, j подграф $[x_i] \cap [y] \cap \Gamma_3(u)$ пересекает $[x_j]$ тогда и только тогда, когда $d_\Delta(x_i, x_j) = 3$. Поэтому $a_3 \geq 6 \cdot 5 - 3$ и $b_3 \leq 17$. Для $i = 1, 2, 3$ через o_i обозначим отличную от y вершину из μ -подграфа $[x_i] \cap [x_{i+3}]$.

Предположим, что диаметр Γ не меньше 5 и выберем $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$. Для каждого $i \in \{1, \dots, 6\}$ μ -подграф $[x_i] \cap [z]$ содержит вершину y и еще некоторую вершину y_i . Если $[z]$ не содержит вершины из $\{o_1, o_2, o_3\}$, то вершины $y_1, \dots, y_6$ попарно различны, и $[y] \cap [z]$ содержит не более одной вершины из $\Gamma_4(u)$. Любая вершина $t \in [z] \cap \Gamma_5(u)$ смежна с единственной вершиной z' из $[y] \cap [z] \cap \Gamma_4(u)$. Так как $[z] \cap [z']$ содержит y и не более 6 вершин из $\Gamma_5(u)$, то $b_4 \leq 6$.

Если $[z]$ содержит точно одну вершину из $\{o_1, o_2, o_3\}$, то $[y] \cap [z]$ содержит не более двух вершин из $\Gamma_4(u)$ и $b_4 \leq 12$. Если $[z]$ содержит две вершины o_i, o_j из $\{o_1, o_2, o_3\}$, то вершины o_i, o_j не смежны и $[o_i] \cap [o_j] = \{y, z\}$. Таким образом, $[y] \cap \Gamma_4(u)$ содержит не более 3 вершин, смежных с парами вершин из $\{o_1, o_2, o_3\}$, поэтому $b_4 \leq 12$.

Если $b_4 > 6$, то каждая вершина из $[y] \cap \Gamma_4(u)$ смежна с вершиной из $\{o_1, o_2, o_3\}$, и $b_3 \leq 15$.

Положим $\Sigma := [z] \cap \Gamma_3(u)$. Если z не смежна с вершинами из $\{o_1, o_2, o_3\}$, то степень вершины y в графе Σ не меньше 6, а степени в графе Σ вершин из $\Sigma_1(y)$ не меньше 4, поэтому $c_4 = |\Sigma| \geq 1 + 6 + 18 = 25$. Если z смежна точно с одной вершиной из $\{o_1, o_2, o_3\}$, то степень вершины y в графе Σ не меньше 5, а степени

вершин $y_i \notin \{o_1, o_2, o_3\}$ в графе Σ не меньше 4, поэтому $c_4 \geq 1 + 5 + 12 + 2 = 20$. Утверждение (2) доказано.

Если $d \geq 7$, то $c_4 \leq b_3$; противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $c_3 = 7$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если Δ содержит вершину a степени 3, то $\Delta - a^\perp$ является 2-путем, $b_3 \leq 12$, $b_4 \leq 6$ и в случае $b_3 > 10$ имеем $b_4 = 0$;
- (2) если подграф Δ является семиугольником, то $b_3 \leq 15$ и $b_4 \leq 6$;
- (3) $d \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_3 = 7$ и $\{o_1, \dots, o_l\}$ – множество вершин из $[y] - \Delta$, смежных с парами вершин из Δ .

Заметим, что Δ не содержит вершин степени больше 3. Если степень некоторой вершины a в графе Δ равна 3, то $\Delta - a^\perp$ содержит 3 вершины, каждая из которых смежна с единственной вершиной из $\Delta_1(a)$ и $\Delta - a^\perp$ является 2-путем, центральную вершину которого обозначим через b . Без ограничения общности, пусть $x \in \Delta_1(a) \cap [b]$, $\Delta_1(a) - \{x\}$ состоит из вершин x_1, x_2 и $\Delta_1(b) - \{x\}$ состоит из вершин x_3, x_4 . Для определенности можно считать, что вершина x_1 смежна с x_3 , вершина x_2 смежна с x_4 . Тогда Δ содержит 2 пары вершин, находящихся на расстоянии 3 в Δ (это $\{x_1, x_4\}$ и $\{x_2, x_3\}$), и число вершин из $[y] \cap \Gamma_3(u)$, смежных с вершинами из Δ , не меньше $2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 - 2$. Поэтому $a_3 \geq 31$ и $b_3 \leq 12$. Обозначим через o_1 (через o_2) вершину из μ -подграфа $[x_1] \cap [x_4]$ (из $[x_2] \cap [x_3]$), отличную от вершины y .

Допустим, что диаметр Γ не меньше 5 и выберем $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$. Если $[z]$ не содержит вершин из $\{o_1, o_2\}$, то $[y] \cap [z]$ не пересекает $\Gamma_4(u)$, поэтому $[z]$ не пересекает $\Gamma_5(u)$ и $d \leq 4$; противоречие.

Если $[z]$ содержит $\{o_1, o_2\}$, то вершины o_1, o_2 не смежны и $[o_1] \cap [o_2] = \{y, z\}$. В этом случае $[z]$ не пересекает $\Gamma_5(u)$ и снова $b_4 = 0$, иначе для $t \in [z] \cap \Gamma_5(u)$ получим $[y] \cap [t] = \{z, z'\}$ для некоторой вершины z' , причем z' смежна, по крайней мере, с одной вершиной o_i из $\{o_1, o_2\}$, и вершины z', z, o_i образуют треугольник в $[y]$; противоречие.

Если $[z]$ содержит точно одну вершину из $\{o_1, o_2\}$, то $[y] \cap [z]$ содержит не более одной вершины из $\Gamma_4(u)$. Любая вершина $t \in [z] \cap \Gamma_5(u)$ смежна с единственной вершиной z' из $[y] \cap [z] \cap \Gamma_4(u)$. Так как $[z] \cap [z']$ содержит y и не более 6 вершин из $\Gamma_5(u)$, то $b_4 \leq 6$. Так как $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит не более 10 вершин из $[o_1] \cup [o_2]$, то в случае $b_3 > 10$ получим $b_4 = 0$. Утверждение (1) доказано.

Если степень любой вершины в Δ равна 2, то Δ является 7-циклом $x_1, \dots, x_7$. При этом $[x_i]$ содержит 5 вершин из $\Gamma_3(u) \cap [y]$, и для различных i, j подграф $[x_i] \cap [y] \cap \Gamma_3(u)$ пересекает $[x_j]$, если и только если вершины $d_\Delta(x_i, x_j) = 3$. В этом случае $l = 7$, $a_3 \geq 7 \cdot 5 - 7$ и $b_3 \leq 15$.

Допустим, что диаметр Γ не меньше 5 и выберем $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$. Для каждого $i \in \{1, \dots, 7\}$ обозначим через y_i отличную от y вершину из μ -подграфа $[x_i] \cap [z]$. Если $[z]$ не содержит вершин из $\{o_1, \dots, o_7\}$, то вершины $y_1, \dots, y_7$ попарно различны, $[y] \cap [z]$ не пересекает $\Gamma_4(u)$, $[z]$ не пересекает $\Gamma_5(u)$ и $b_4 = 0$; противоречие.

Заметим, что $[z]$ содержит не более трех вершин из $\{o_1, \dots, o_7\}$, иначе найдутся такие несмежные вершины o_i, o_j , что подграф $[o_i] \cap [o_j]$ содержит y, z и некоторую вершину x_l .

Если $[z]$ содержит точно одну вершину из $\{o_1, \dots, o_7\}$, то $[y] \cap [z] \cap \Gamma_4(u)$ содержит не более одной вершины. Любая вершина $t \in [z] \cap \Gamma_5(u)$ смежна с единственной вершиной z' из $[y] \cap [z] \cap \Gamma_4(u)$. Так как $[z] \cap [z']$ содержит y и не более 6 вершин из $\Gamma_5(u)$, то $b_4 \leq 6$.

Если $[z]$ содержит две вершины o_i, o_j из $\{o_1, \dots, o_7\}$, то вершины o_i, o_j не смежны и $[o_i] \cap [o_j] = \{y, z\}$.

Положим $\Sigma := [y] \cap \Gamma_4(u)$. Допустим, что $b_4 > 6$ и t_1, t_2 – такие вершины из $[z] \cap \Gamma_5(u)$, что $[y] \cap [t_1] = \{z, z_1\}$, $[y] \cap [t_2] = \{z, z_2\}$ и $z_1 \neq z_2$. Тогда $[z_1] \cap [z_2] = \{y, z\}$ и каждая из вершин z, z_1, z_2 смежна, по крайней мере, с 2 вершинами из $\{o_1, \dots, o_7\}$. Выберем $z_3 \in \Sigma_1(z_2) - \{z\}$. Если одна из вершин z, z_1, z_2 (для определенности, скажем z_1) смежна с 3 вершинами из $\{o_1, \dots, o_7\}$, то $[z_3]$ содержит единственную вершину из $\{o_1, \dots, o_7\} \cap [z_1]$ и по доказанному выше $b_4 \leq 6$; противоречие.

Значит, вершина z смежна точно с 2 вершинами из $\{o_1, \dots, o_7\}$, еще с 3 вершинами из $\cup_i [x_i] - \{o_1, \dots, o_7\}$ и с 2 вершинами из Σ . Отсюда степень y в графе $[z] \cap \Gamma_3(u)$ равна 5 и ввиду утверждения (1) имеем $c_4 \geq 1 + 5 + 5 \cdot 4$.

В случае $c_4 = 26$ подграф $[z] \cap \Gamma_3(u)$ сильно регулярен с параметрами $(26, 5, 0, 1)$; противоречие с теоремой 1.3.1 [1]. Так как $[z] \cap \Gamma_3(u)$ – регулярный граф степени 5, то число его вершин четно и $c_4 \geq 28$. Тогда

$$b_4 + c_4 + \frac{4b_4c_4}{25} > 6 + 28 + 4 \cdot 6 \cdot \frac{28}{25} > 50;$$

противоречие с леммой 3. Утверждение (2) доказано.

Итак, неравенство $b_4 \leq 6$ выполняется независимо от типа подграфа Δ . Так как $c_3 > b_4$, диаметр Γ не больше 6. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $c_3 = 8$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если подграф Δ является восьмиугольником, то $b_3 \leq 14$;
- (2) если Δ содержит точно две вершины a, e степени 3, то
 - (i) либо $\Delta \subset a^\perp \cup e^\perp$, либо $d_\Delta(a, e) = 2$, либо вершины a, e смежны;
 - (ii) $b_3 \leq 11$;
- (3) если Δ содержит четыре вершины степени 3, то $b_3 \leq 8$;
- (4) верны неравенства $b_4 \leq 6$ и $d \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_3 = 8$ и $\{o_1, \dots, o_l\}$ – множество вершин из $[y] - \Delta$, смежных с парами вершин из Δ .

Если степень любой вершины в графе Δ равна 2, то Δ является восьмиугольником $\{x_1, \dots, x_8\}$. Тогда $[x_i]$ содержит 5 вершин из $\Gamma_3(u) \cap [y]$, и для различных i, j подграф $[x_i] \cap [y] \cap \Gamma_3(u)$ пересекает $[x_j]$, только если $d_\Delta(x_i, x_j) > 2$. Поэтому $l = 12$, $a_3 \geq 8 \cdot 5 - 12$ и $b_3 \leq 14$. Утверждение (1) доказано.

Если Δ содержит точно две вершины a, e степени 3, то либо $d_\Delta(a, e) = 3$ и $\Delta \subset a^\perp \cup e^\perp$, либо $d_\Delta(a, e) = 2$, либо вершины a, e смежны. В любом случае число пар вершин, находящихся друг от друга на расстоянии, большем 2 в Δ , не меньше 7, $a_3 \geq 2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 - 7$ и $b_3 \leq 11$. Утверждение (2) доказано.

Если Δ содержит 4 вершины степени 3, то число пар вершин, находящихся на расстоянии, большем 2 в Δ , равно 2, $a_3 \geq 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 - 2$ и $b_3 \leq 8$. Утверждение (3) доказано.

Предположим, что диаметр графа Γ не меньше 5 и выберем вершину $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$. Заметим, что $[z]$ содержит не более 4 вершин из $\{o_1, \dots, o_l\}$, иначе для подходящих различных $o_i, o_j \in [z]$ подграф $[o_i] \cap [o_j]$ содержит y, z и вершину из Δ .

Если $[z]$ содержит не более одной вершины из $\{o_1, \dots, o_l\}$, то $[y] \cap [z]$ не пересекает $\Gamma_4(u)$, и $[z]$ не пересекает $\Gamma_5(u)$; противоречие.

Если $[z]$ содержит точно две вершины из $\{o_1, \dots, o_l\}$, то $[y] \cap [z]$ содержит не более одной вершины z' из $\Gamma_4(u)$. Любая вершина $t \in [z] \cap \Gamma_5(u)$ смежна с z' из $[y] \cap [z] \cap \Gamma_4(u)$. Так как $[z] \cap [z']$ содержит y и еще не более 6 вершин из $\Gamma_5(u)$, то $b_4 \leq 6$.

Положим $\Sigma := [y] \cap \Gamma_4(u)$. Допустим, что $b_4 > 6$ и t_1, t_2 – такие вершины из $[z] \cap \Gamma_5(u)$, что

$$[y] \cap [t_1] = \{z, z_1\}, \quad [y] \cap [t_2] = \{z, z_2\}, \quad z_1 \neq z_2.$$

Тогда $[z_1] \cap [z_2] = \{y, z\}$ и ввиду доказанного в предыдущем абзаце каждая из вершин z, z_1, z_2 смежна, по крайней мере, с 3 вершинами из $\{o_1, \dots, o_l\}$. Выберем $z_3 \in \Sigma_1(z_2) - \{z\}$ и $z_4 \in \Sigma_1(z_1) - \{z\}$. Если z смежна с 4 вершинами из $\{o_1, \dots, o_l\}$, то $[z_3]$ содержит единственную вершину из $\{o_1, \dots, o_l\} \cap [z_1]$ и оставшиеся 2 вершины из $\{o_1, \dots, o_l\} - ([z] \cup [z_1] \cup [z_2])$. Симметрично, $[z_4]$ содержит единственную вершину из $\{o_1, \dots, o_l\} \cap [z_2]$ и оставшиеся 2 вершины из $\{o_1, \dots, o_l\} - ([z] \cup [z_1] \cup [z_2])$. Противоречие с тем, что $[z_3] \cap [z_4]$ содержит y и 2 вершины из $\{o_1, \dots, o_l\}$. Значит, каждая вершина из Σ смежна точно с 3 вершинами из $\{o_1, \dots, o_l\}$, еще с 2 вершинами из $\cup_i [x_i] - \{o_1, \dots, o_l\}$ и с 2 вершинами из Σ . Отсюда степень y в графе $[z] \cap \Gamma_3(u)$ равна 5 и $c_4 \geq 1 + 5 + 5 \cdot 4$. В случае $c_4 = 26$ подграф $[z] \cap \Gamma_3(u)$ сильно регулярен с параметрами $(26, 5, 0, 1)$; противоречие. Так как $[z] \cap \Gamma_3(u)$ – регулярный граф степени 5, то число его вершин четно и $c_4 \geq 28$. Отсюда

$$b_4 + c_4 + \frac{4b_4c_4}{25} > 6 + 28 + 4 \cdot 6 \cdot \frac{28}{25} > 50;$$

противоречие с леммой 3.

Итак, $b_4 \leq 6$. Так как $c_3 > b_4$, то диаметр Γ не больше 6. Лемма доказана.

2. Случай малых диаметров. В этом пункте найдены массивы пересечений графа Γ в случае, когда $d \leq 4$. Частично при доказательстве лемм привлекались компьютерные вычисления. А именно, при заданных ограничениях на элементы массива пересечений графа Γ осуществлялся перебор всех векторов длины $2d$ (с подходящими значениями b_i, c_i) вида

$$\{50, 42, b_2, \dots, b_{d-1}; 1, 2, c_3, \dots, c_d\},$$

для которых проверялись условия существования: целочисленность всех чисел пересечений p_{ij}^l , целочисленность кратностей f_i всех неглавных собственных значений, $i \in \{1, \dots, d\}$, все утверждения леммы 1 и утверждение (1) леммы 3. Другие необходимые условия существования дистанционно регулярных графов можно найти в [1]. В основном, нам было достаточно вышеперечисленных.

Зафиксируем в Γ геодезический 3-путь uvw .

ЛЕММА 9. Если диаметр Γ равен 3, то Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ или $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если диаметр Γ равен 3, то число вершин v в Γ равно $1 + 50 + 1050 + k_3 = 1101 + k_3$. Число различных треугольников в графе Γ равно $v \cdot k \cdot \lambda/6$ и является натуральным числом. Поэтому k_3 делится на 3. Напомним, что ввиду прямоугольного соотношения $k_3 := b_2 k_2 / c_3 = 3 \cdot 350 b_2 / c_3$.

Пусть $b_2 = 1$. Тогда $\Gamma_3(u)$ является кокликкой, иначе для некоторой вершины $z \in [y] \cap \Gamma_3(u)$ подграф $[x] \cap [z]$ содержит y и еще вершину из $\Gamma_2(u)$, которая смежна с y и z ; противоречие. Поэтому $c_3 = 50$ и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$, спектр $\{50^1, 10^{357}, -1^{50}, -5^{714}\}$. Пусть, далее, $b_2 > 1$.

Допустим, что b_2 нечетно. Если b_2 не делится на 3, то c_3 не делится на 3 и по лемме 4 является четным числом. Далее, $b_2 \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$. Отсюда либо c_3 делит 350 и $c_3 \in \{10, 14\}$, либо $c_3 = 2b_2$.

В случае $c_3 \in \{10, 14\}$ при любом b_2 из указанного множества массив пересечений графа Γ не удовлетворяет требованию целочисленности кратностей собственных значений.

Если же $c_3 = 2b_2$, то только в случае $b_2 = 17$ и $c_3 = 34$ многочлен $w_4(x)$ имеет второй целый корень (равный -1). Но кратность соответствующего корню собственного значения -1 графа Γ является дробной, противоречие.

Допустим, что b_2 нечетно и делится на 3. Если многочлен $w_4(x)$ имеет, по крайней мере, два целых корня, то либо $c_3 = 30$, $b_2 = 21$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и -1 , либо $c_3 = 18$, $b_2 = 27$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 2, либо $c_3 = 10$, $b_2 = 9$ и $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и -5 , либо $c_3 = 42$, $b_2 = 9$. В первых трех случаях кратность некоторого собственного значения графа Γ не является целым числом. В последнем случае

$$w_4(x) = (x - 50)(x^3 - 4x^2 - 71x - 66),$$

граф Γ имеет спектр $\{50^1, 11^{350}, -1^{390}, -6^{585}\}$ и является вторым графом из заключения теоремы.

Итак, можно считать, что b_2 четно.

Пусть $b_2 = 2$. Тогда $c_3 \in \{5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50\}$ и во всех случаях $p_{33}^3 < 0$.

В случае $b_2 = 4$ и $c_3 \neq 40$ имеем $p_{33}^3 < 0$ или многочлен $w_4(x)$ имеет только один целый корень. Если же $c_3 = 40$, то $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 5. Но кратность собственного значения 5 графа Γ не является целым числом.

В случае $b_2 = 6$ имеем $c_3 \in \{5, 7, 12, 15, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 42\}$. Если $c_3 = 5$, то

$$w_4(x) = (x - 50)(x^3 - 44x^2 + 135x + 1860),$$

если же $c_3 = 7$, то

$$w_4(x) = (x - 50)(x^3 - 42x^2 + 125x + 1764).$$

В любом случае $w_4(x)$ имеет единственный целый корень. Если $7 < c_3 < 35$, то $p_{33}^3 < 0$. Если $c_3 = 35$, то

$$w_4(x) = (x - 50)(x^3 - 14x^2 - 15x + 420),$$

если же $c_3 = 42$, то

$$w_4(x) = (x - 50)(x^3 - 7x^2 - 50x + 84).$$

В любом случае $w_4(x)$ имеет единственный целый корень.

Случаи $8 \leq b_2 \leq 34$ рассматриваются аналогично с помощью компьютерного перебора.

ЛЕММА 10. *Если $c_3 = 5$, то диаметр Γ больше 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если диаметр Γ равен 4, то $k_3 + k_4$ делится на 3. По лемме 1 имеем $c_3 \leq b_1 = 42$.

Пусть $c_3 = 5$. По лемме 5 $b_3 \leq 20$, $c_4 \geq 28$ и $b_4 \leq 12$, а по лемме 3 числа b_2, b_3, c_4 четны. Далее, $k_3 = 210b_2$ и по лемме 2 число b_2b_3 делится на 5.

Допустим сначала, что b_2 делится на 5. В случае $b_2 = 10$ имеем $k_3 = 2100$, $k_4 := b_3k_3/c_4$ делится на 3, поэтому $c_4 \in \{28, 30, 32, 40, 42, 50\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 10, b_3; 1, 2, 5, c_4\}$. Для всех допустимых значений b_3 и c_4 , по крайней мере, одно из чисел пересечений $p_{34}^4, p_{33}^3, p_{44}^4$ или p_{44}^3 не является целым неотрицательным числом.

В случае $b_2 = 20$ имеем $k_3 = 4200$, k_4 делится на 3 и $c_4 \in \{28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 50\}$. Граф Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, b_3; 1, 2, 5, c_4\}$. Если $c_4 = 40$ и $b_3 = 20$ или $c_4 = 50$ и $b_3 = 10$, то собственное значение θ_4 не целое и имеет кратность, меньшую 49. Если $b_3 = 10$ и $c_4 = 40$, то $\theta_1 > 20$. В обоих случаях имеем противоречие с леммой 1. Для всех остальных допустимых значений b_3 и c_4 , по крайней мере, одно из чисел пересечений $p_{34}^4, p_{33}^3, p_{44}^4$ или p_{44}^3 не является целым неотрицательным числом.

Случаи $b_2 \in \{30, 40\}$ разбирается аналогично с помощью компьютерного перебора.

Предположим теперь, что b_2 не делится на 5. Если $b_3 = 10$, то $b_2 \in \{12, 14, 16, 18, 22, 24, 26, 28, 32, 34\}$. В случае $b_2 = 12$ имеем $k_3 = 2520$, k_4 делится на 3 и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12, 10; 1, 2, 5, c_4\}$. Если c_4 не делится на 5, то число p_{34}^4 не целое. Если же c_4 делится на 5, то собственное значение θ_1 не целое и имеет кратность, меньшую 49. С помощью компьютерного перебора мы получаем аналогичные противоречия для остальных допустимых значений b_2 .

Если $b_3 = 20$, то $b_2 \in \{22, 24, 26, 28, 32, 34\}$. В случае $b_2 = 22$ имеем $k_3 = 4620$, k_4 делится на 3 и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 22, 20; 1, 2, 5, c_4\}$. Если c_4 не делится на 5, то число p_{34}^4 не целое. Если же $c_4 \in \{40, 50\}$, то число θ_4 не целое и имеет кратность, меньшую 49. С помощью компьютерного перебора мы получаем аналогичные противоречия для остальных допустимых значений b_2 .

ЛЕММА 11. *Если $c_3 \leq 8$, то диаметр Γ больше 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть диаметр Γ равен 4 и $6 \leq c_3 \leq 8$. Тогда из лемм 6–8 следуют неравенства сверху для b_3, b_4 и неравенство снизу для c_4 .

Справедливость утверждения леммы установлена компьютерным перебором массивов пересечений графа Γ диаметра 4 с указанными ограничениями на b_3, b_4 и c_4 .

ЛЕММА 12. *Если $c_3 > 8$, то диаметр Γ больше 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения леммы установлена компьютерным перебором массивов пересечений графа Γ диаметра 4 при $9 \leq c_3 \leq 42$ и значениями b_3 , удовлетворяющими утверждению (1) леммы 3.

3. Графы диаметра 5. Ввиду результатов предыдущего пункта можно считать, что диаметр Γ больше 4. Допустим, что диаметр Γ не меньше 5. Тогда по лемме 1 имеем $c_3 \leq b_2 < 36$.

ЛЕММА 13. Диаметр Γ больше 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что диаметр Γ равен 5.

Если $c_3 \in \{5, 6, 7, 8\}$, то из лемм 5–8 следуют ограничения на значения b_3 , b_4 и c_4 . Компьютерный перебор массивов пересечений, проведенный с учетом этих неравенств, показывает, что графов диаметра 5 с данными c_3 нет.

Для $c_3 \geq 9$ неравенство на b_3 следует из утверждения (1) леммы 3. Компьютерный перебор массивов пересечений, проведенный с учетом этих неравенств, показывает, что графов диаметра 5 с данными c_3 нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из лемм 9–13.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **18**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [2] А. А. Махнев, “О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона”, *Тр. ИММ*, **15**, 2009, 143–161.
- [3] А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев, “О дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана–Синглтона”, *Докл. РАН*, **428**:2 (2009), 157–160.
- [4] P. Terwilliger, “A new feasibility condition for distance-regular graphs”, *Discrete Math.*, **61**:2-3 (1986), 311–315.
- [5] A. E. Brouwer, *Spectra of graphs. Some course notes*, <http://www.win.tue.nl/~aeb/>.
- [6] A. Jurišić, J. Koolen, “A local approach to 1-homogeneous graph”, *Des. Codes Cryptogr.*, **21**:1-3 (2000), 127–147.

А. Л. Гаврилюк

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: alexander.gavriliouk@gmail.com

Поступило

27.11.2009

А. А. Махнев

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: makhnev@imm.uran.ru