Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Данилов, А. В. Лобода, Об аффинной однородности индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 867–884

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:03:26

УДК 514.142+517.5+512.816.3

Об аффинной однородности индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$

М. С. Данилов, А. В. Лобода

В статье развивается конструктивный подход к задаче описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства, имеющих невырожденную законоопределенную форму Леви.

В терминах струи 2-го порядка определяющей функции невырожденной индефинитной гиперповерхности строятся ее аффинные инварианты и вводится понятие аффинного канонического уравнения этой поверхности. Выделены три основных типа канонических уравнений. Для каждого из типов строятся семейства алгебр Ли, связанное с аффинно-однородными поверхностями данного типа. В итоге предъявлено (в форме матричных алгебр) семейство аффинно-различных однородных подмногообразий 3-мерного комплексного пространства, зависящее от двух вещественных параметров.

Библиография: 22 названия.

Введение

Полное описание голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 2-мерных комплексных пространств было построено Картаном в [1]. По сравнению с достаточно простой локальной классификацией таких многообразий ситуация с однородностью в 3-мерных пространствах оказывается гораздо более сложной. Например, полная классификация аффинно-однородных гиперповерхностей вещественного 3-мерного пространства была получена лишь недавно (см. [2]). Объемная работа [3], опубликованная в 2008 г., содержит описание только вырожденных (в смысле Леви) голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств. Отметим, кстати, что все такие поверхности являются голоморфными образами аффинно-однородных (вырожденных) поверхностей.

В серии работ [4]–[8] одного из авторов данной статьи задача описания невырожденных однородных вещественных подмногообразий комплексных пространств изучается на основе использования канонических уравнений рассматриваемых подмногообразий. При этом и голоморфная, и аффинная однородность могут изучаться с единых позиций. Так, в [9] предложена аффинная нормальная форма

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00743-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3877.2008.1).

для уравнений вещественно-аналитических строго псевдо-выпуклых (СПВ) гиперповерхностей, аналогичная голоморфной нормальной форме Мозера [10]. На основе ее использования в [9] построено большое семейство аффинно однородных подмногообразий пространства $\mathbb{C}^3$, а в работах [11]–[14] изучена связь коэффициентов нормальных уравнений со свойствами алгебр Ли векторных полей, касательных к аффинно-однородным поверхностям.

В связи с этим представляются оправданными усилия по введению аффинных канонических (нормальных) уравнений для вещественных гиперповерхностей с невырожденной индефинитной формой Леви и последующему использованию таких уравнений, например, при изучении задач об однородности.

Основу настоящей работы составляет приведение к каноническому виду пары форм от двух комплексных переменных: одна из форм при этом является эрмитовой вещественнозначной, а вторая – квадратичной комплекснозначной формой. Задача о паре форм в предлагаемой постановке обсуждалась и другими авторами, например, Изотовым. Однако в работе [15] приоритетной является квадратичная форма, а итоговая классификация содержит большое количество случаев. В приводимой ниже классификации, ориентирующейся в первую очередь на эрмитову индефинитную форму, выделяются по сути три типа наборов форм (теоремы 1 и 2).

Принадлежащие первому автору статьи разделы 2, 3 содержат подробное доказательство утверждения о трех типах канонических пар, анонсированного в [16], и построение трех типов канонических аффинных уравнений для индефинитных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$.

Использование введенных нормальных уравнений позволяет построить (в разделах 4, 5) примеры большого семейства матричных алгебр, соответствующих аффинно-однородным вещественным индефинитным гиперповерхностям пространства $\mathbb{C}^3$. При этом используется техника работ [17]–[19], связанная с продолжением матричных алгебр Ли. Интегрирование матричных алгебр (и их семейств) и построение по ним явных уравнений однородных поверхностей является достаточно трудоемкой задачей (см., например, [9]). В настоящей статье эта задача фактически не затрагивается.

Заметим еще, что приведенный в [16] пример семейства матричных алгебр как алгебр, отвечающих аффинно-однородным вещественным индефинитным гиперповерхностям пространства $\mathbb{C}^3$, является ошибочным.

1. Определения основных понятий

1.1. Однородность гиперповерхности относительно аффинных преобразований. Везде ниже мы будем рассматривать вещественно-аналитические гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$. Для каждой такой поверхности M все рассуждения будут локальными, т.е. по сути мы обсуждаем росток M в некоторой ее фиксированной точке. Для простоты эта точка всегда предполагается совпадающей с началом координат $O(0, 0, 0)$ объемлющего комплексного пространства $\mathbb{C}^3$.

Аффинная (локальная) однородность поверхности M (вблизи точки $O(0, 0, 0)$) понимается нами как существование в группе $\text{Aff}(3, \mathbb{C})$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$ подгруппы Ли G , действующей транзитивно на M вблизи выбранной точки (сама поверхность M является при этом орбитой точки $O(0, 0, 0)$ под действием G).

В координатах пространства $\mathbb{C}^3$ действие G задается формулами

$$\begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ z_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & A_{13}(t) \\ B_{11}(t) & B_{12}(t) & B_{13}(t) \\ C_{11}(t) & C_{12}(t) & C_{13}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \\ D_3(t) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & A_{13}(t) \\ B_{11}(t) & B_{12}(t) & B_{13}(t) \\ C_{11}(t) & C_{12}(t) & C_{13}(t) \end{pmatrix}$$

– вращательная, а

$$\begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \\ D_3(t) \end{pmatrix}$$

– сдвиговая компоненты отдельного преобразования из группы G , t – многомерный вещественный параметр группы G .

В силу однородности поверхности M выписанное семейство преобразований образует не менее чем пятимерную группу Ли.

Рассматривая в этом случае 5-мерную касательную плоскость к M , можно утверждать, что сдвиговые компоненты группы (1.1) позволяют смещаться в любом направлении в этой плоскости.

Далее вместо групп Ли (1.1) мы будем изучать соответствующие алгебры Ли инфинитезимальных преобразований. Элементы такой алгебры являются линейными векторными полями в $\mathbb{C}^3$ вида

$$\begin{aligned} Z = & (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + p) \frac{\partial}{\partial z_1} + (b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3 + s) \frac{\partial}{\partial z_2} \\ & + (c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 + q) \frac{\partial}{\partial z_3}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

касательными к поверхности M . Это означает, что для каждого поля (1.2) выполняется основное соотношение

$$\operatorname{Re}\{Z(\Phi)\}|_M = 0, \quad (1.3)$$

где $\Phi = \Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)$ – вещественнозначная определяющая функция обсуждаемой поверхности.

1.2. Индефинитные гиперповерхности. Пусть рассматриваемая вещественно-аналитическая гиперповерхность задана вблизи начала координат пространства $\mathbb{C}^3$ уравнением

$$M = \{\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) = 0\}. \quad (1.4)$$

Будем считать точку $O(0, 0, 0)$ неособой точкой M , так что $\operatorname{grad}(\Phi)|_0 \neq 0$. В этом случае уравнение (1.4) разрешимо относительно одной из вещественных переменных пространства $\mathbb{C}^3$, например, относительно $v = \operatorname{Im}(z_3)$. Пусть

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

тогда новое уравнение M имеет вид

$$v = \operatorname{Im}(z_3) = F(z, \bar{z}, u),$$

где $u = \operatorname{Re}(z_3)$, а определяющая функция M превращается в

$$\Phi(z, \bar{z}, z_3) = -v + F(z, \bar{z}, u).$$

В силу аналитичности поверхности M функция $F(z, \bar{z}, u)$ также аналитична. Поэтому ее можно разложить в степенной ряд.

Помимо степеней отдельных переменных, участвующих в наших обсуждениях, нам будет удобно ввести еще понятие их веса. Будем считать, что переменные $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ имеют вес 1, а переменной u припишем вес 2. Веса отдельных мономов, построенных из переменных $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, u$, будем определять по естественному принципу сложения весов. Например, вес монома $z_1 u$ равен 3.

Выделяя в степенном разложении функции $F(z, \bar{z}, u)$ однородные весовые компоненты, запишем уравнение поверхности M в виде

$$v = F(z, \bar{z}, u) = F_0 + F_1(z, \bar{z}, u) + F_2(z, \bar{z}, u) + \dots$$

Сдвигом осей координат мы можем убрать в этом разложении F_0 , а поворотом осей уничтожается $F_1(z, \bar{z}, u)$. Следовательно, уравнение поверхности M можно привести к виду

$$v = H(z, \bar{z}) + Q(z) + \overline{Q(z)} + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \bar{z}, u), \quad (1.5)$$

где $H(z, \bar{z})$ – эрмитова, а $Q(z)$ – квадратичная формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поверхность, заданную уравнением (1.5), будем называть *индефинитной*, если форма $H(z, \bar{z})$ из этого уравнения является знаконеопределенной невырожденной эрмитовой формой.

Известно, что понятия невырожденности, положительной определенности или знаконеопределенности формы $H(z, \bar{z})$ из уравнения (1.5) (называемой *формой Леви поверхности*) инвариантны относительно голоморфных, а тем самым, и аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$.

Одним из основных результатов статьи является построение аффинной канонической формы для уравнений индефинитных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. Это построение основано на возможности приведения линейными преобразованиями $z \rightarrow Uz$ пространства $\mathbb{C}_z^2$ невырожденной знаконеопределенной эрмитовой формы от двух переменных к виду

$$H(z, \bar{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

При этом мы будем отслеживать изменение квадратичной формы

$$Q(z) \rightarrow Q^*(z^*) = Q(Uz^*),$$

изучая тем самым пару форм в комплексном пространстве $\mathbb{C}_z^2$.

2. Совместное приведение пары форм

Рассмотрим пару форм (H, Q) , где $H(z, \bar{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ – эрмитова форма,

$$Q(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2 \quad (2.1)$$

– квадратичная форма с комплексными коэффициентами A, B, C .

Заменой переменных

$$z_1 = \frac{iz_1^* + z_2^*}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{iz_1^* - z_2^*}{\sqrt{2}}, \quad (2.2)$$

форма $H(z, \bar{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ превращается в

$$H_1(z, \bar{z}) = i(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2). \quad (2.3)$$

При этом группа

$$SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \bar{\eta} & \bar{\xi} \end{pmatrix}, |\xi|^2 - |\eta|^2 = 1 \right\}$$

сохраняющих форму H преобразований, превращается в группу $SL(2, \mathbb{R})$ вещественных матриц 2-го порядка с единичным определителем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Линейным преобразованием из группы $SL(2, \mathbb{R})$ возможно приведение ненулевой квадратичной формы (2.1) с комплексными коэффициентами к одному из видов:*

- а) $Q(z) = Bz_1z_2, B \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- б) $Q(z) = D(z_1 - rz_2)(z_1 + rz_2) = D(z_1^2 - r^2z_2^2), D \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, r \in \mathbb{R}$;
- в) $Q(z) = D(z_1 - isz_2)(z_1 + itz_2) = D(z_1^2 - i(s+t)z_1z_2 - tsz_2^2), D \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, t, s \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого предложения использует известную (см., например, [20]) связь между линейными преобразованиями формы $Q(z)$ и дробно-линейными преобразованиями корней этой формы. Под корнями квадратичной формы $Q(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$ понимаются корни (квадратного) трехчлена $q(t) = At^2 + Bt + C$ от комплексной переменной t .

Несложно проверяется, что под действием произвольного линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

любой корень μ формы (2.1) изменяется по формуле

$$\mu \rightarrow \frac{\mu d - b}{-\mu c + a}.$$

В случае $A \neq 0$ рассмотрим пару корней (μ_1, μ_2) формы $Q(z)$ как пару точек в комплексной плоскости.

ЛЕММА 1. *Под действием дробно-линейного преобразования с вещественными коэффициентами и единичным определителем любая пара точек (μ_1, μ_2) комплексной плоскости может быть переведена в одно из двух состояний:*

- 1) $(-r, r), r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$;
- 2) $(it, is), t, s \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы сводится к рассмотрению трех случаев:

- (i) $\mu_1 = \mu_2$;
- (ii) $\mu_1 \neq \mu_2$ и $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- (iii) $\mu_1 \neq \mu_2$ и $(\mu_1, \mu_2) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Сначала рассмотрим случай (ii). Так как сдвиг вдоль вещественной оси является дробно-линейным вещественным преобразованием

$$z^* = z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1},$$

то с его помощью мы можем поместить начало координат в точку $((\mu_1 + \mu_2)/2, 0)$. Таким образом, в новой системе координат пара (μ_1, μ_2) превращается в пару $(-r, r)$.

Рассмотрим теперь случай (iii). Если оба числа μ_1, μ_2 чисто мнимые, то они сразу представлены в виде (it, is) . В противном случае соединим точки μ_1 и μ_2 отрезком. Построим его серединный перпендикуляр. С помощью сдвига поместим начало координат в точку пересечения этого перпендикуляра и вещественной оси. Таким образом, получим, что в новых координатах пара точек (μ_1, μ_2) лежит на некоторой окружности радиуса R с центром в начале координат.

В обсуждаемом случае хотя бы одна из двух “вещественных” точек окружности, (т.е. $(-R, 0)$ или $(R, 0)$) расположена вне множества $\mu_1 \cup \mu_2$. Зафиксируем такую точку и сдвинем в нее начало координат. Далее рассмотрим отображение

$$z^* = -\frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0},$$

также являющееся дробно линейным преобразованием с определителем, равным 1. После такого отображения обсуждаемая окружность, содержащая точки μ_1, μ_2 , перейдет в вертикальную прямую. Совмещая мнимую ось с этой прямой, мы переводим пару (μ_1, μ_2) в пару точек мнимой оси (it, is) , где $t, s \in \mathbb{R}$ и $(t, s) \neq (0, 0)$.

Рассмотрим, наконец, случай (i), т.е. $\mu_1 = \mu_2$. Сдвинув мнимую ось таким образом, чтобы она содержала точку μ_1 , мы получим, что $\mu_1 \rightarrow it, t \in \mathbb{R}$. Объединяя случаи (i) и (iii), мы получим, что

$$(\mu_1, \mu_2) \rightarrow (it, is), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1 доказана.

Возвращаясь от корней квадратичных форм к самим этим формам, получаем возможность представить произвольную $Q(z)$ с ненулевым коэффициентом A в одном из двух видов:

$$\text{b) } A(z_1 - rz_2)(z_1 + rz_2) = A(z_1^2 - r^2 z_2^2), \quad A \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } A(z_1 - isz_2)(z_1 + itz_2) = A(z_1^2 - i(s+t)z_1 z_2 - tsz_2^2), \quad A \in \mathbb{C}, t, s \in \mathbb{R}.$$

В случае, когда $A = 0, C \neq 0$, замена переменных

$$\begin{cases} z_1 = -z_2^*, \\ z_2 = z_1^*, \end{cases}$$

не изменяющая вид эрмитовой формы (2.2), приводит квадратичную форму (2.1) к уже рассмотренной ситуации.

Наконец, завершая доказательство предложения 1, заметим, что при $A = C = 0$ мы попадаем в п. а) этого предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $H = H(z, \bar{z})$ – знаконеопределенная эрмитова форма от двух комплексных переменных, $Q = Q(z)$ – ненулевая квадратичная форма. Линейным преобразованием пространства $\mathbb{C}^2$ пара (H, Q) может быть приведена к виду, в котором

- 1) $H = H(z, \bar{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$;
- 2) $Q = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$ имеет только вещественные коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего приведем эрмитову форму H к виду (2.3) и воспользуемся предложением 1. После этого вернемся к эрмитовой форме $H(z, \bar{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ с помощью замены переменных

$$z_1 = -i \frac{z_1^* + z_2^*}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{z_1^* - z_2^*}{\sqrt{2}}, \quad (2.4)$$

обратной к (2.2). При этом квадратичная форма $Q(z)$ любого из описанных в предложении 1 типов примет, как несложно проверить, вид

$$Q(z) = D(A_1z_1^2 + B_1z_1z_2 + C_1z_2^2),$$

где $D = |D|e^{i\varphi} \neq 0$ и $A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R}$.

Далее при $D = |D|e^{i\varphi}$ за счет одновременного поворота осей $z_1 = e^{i\varphi/2}z_1^*$, $z_2 = e^{i\varphi/2}z_2^*$ приведем квадратичную форму $Q(z)$ к “вещественному” виду

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть дана пара форм $(H, Q_{\mathbb{R}})$, где

$$H = H(z, \bar{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$$

– эрмитова знаконеопределенная форма,

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$$

– ненулевая квадратичная форма с вещественными коэффициентами A, B, C . С помощью линейного преобразования, сохраняющего H , форма $Q_{\mathbb{R}}$ приводится к одному из видов:

- 1) при $|A + C| > |B|$

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 \geq 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0; \quad (2.5)$$

- 2) при $|A + C| = |B|$

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2), \quad (2.6)$$

где пара $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ удовлетворяет одному из четырех условий:

- a) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 = 0$;
- b) $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0$;
- c) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \neq 0$,
- d) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$;
- 3) при $|A + C| < |B|$

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 > 0. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай 2), когда $B = A + C$ или $B = -(A + C)$. Заметим, что второй подслучай сводится к первому заменой

$$z_1 \rightarrow -z_1, \quad z_2 \rightarrow z_2,$$

сохраняющей слагаемые Az_1^2, Cz_2^2 формы $Q(z)$ и форму H целиком.

В первом же подслучае, т.е. при $B = A + C$, форму $Q_{\mathbb{R}}(z)$ можно переписать в виде

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = (Az_1^2 + (A + C)z_1z_2 + Cz_2^2) = (Az_1 + Cz_2)(z_1 + z_2).$$

Теперь воспользуемся гиперболическим линейным преобразованием

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi \\ \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

сохраняющим эрмитову форму $H(\varphi \in \mathbb{R})$.

Под действием этого преобразования форма $(Az_1 + Cz_2)(z_1 + z_2)$ превратится в аналогичную форму

$$(\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2), \quad (2.9)$$

где

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = e^\varphi \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi \\ \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Орбитами действия (2.10) в плоскости $\mathbb{R}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^2$ являются гиперболы из семейства

$$\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = \pm t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

их асимптота $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и отдельные точки второй асимптоты $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$. По гиперболам и прямой $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ любую точку разрезанной плоскости $\mathbb{R}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^2 \setminus \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0\}$ можно переместить на одну из (проколотых в начале координат) осей $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ или в одну из двух точек $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1$.

Для получения окончательных условий случая 2) остается еще учесть, что преобразование $z_1 \rightarrow iz_1, z_2 \rightarrow iz_2$ сохраняет эрмитову форму $H = |z_1|^2 - |z_2|^2$ и изменяет знаки обоих коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в форме (2.9).

Далее, при $|A + C| \neq |B|$ снова рассмотрим преобразование (2.8).

Коэффициенты A, B и C квадратичной формы Q под действием этого преобразования изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A^* &= A \operatorname{ch}^2 \varphi + B \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi + C \operatorname{sh}^2 \varphi, \\ B^* &= 2A \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi + B(\operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi) + C \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi, \\ C^* &= A \operatorname{sh}^2 \varphi + B \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi + C \operatorname{ch}^2 \varphi. \end{aligned}$$

Для получения равенства $B^* = 0$ достаточно, чтобы было разрешимым при некотором φ уравнение

$$B \operatorname{ch} 2\varphi = -(A + C) \operatorname{sh} 2\varphi. \quad (2.11)$$

Ясно, что при $|A + C| > |B| > 0$ его решением будет единственное решение “элементарного” гиперболического уравнения

$$\operatorname{cth} 2\varphi = -\frac{A + C}{B}.$$

Если при этом какой-нибудь из коэффициентов $\varepsilon_1 = A^*$, $\varepsilon_2 = C^*$ формы Q^* окажется отрицательным, то заменой соответствующей переменной $z_k \rightarrow iz_k$ изменим знак этого коэффициента (сохраняя форму H).

В случае $|A + C| < |B|$ мы получаем аналогичное уравнение

$$B \operatorname{sh} 2\varphi = -(A + C) \operatorname{ch} 2\varphi. \quad (2.12)$$

В силу его очевидной разрешимости в этом случае форма $Q_{\mathbb{R}}$ может быть приведена к виду

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2 \quad (2.13)$$

с некоторыми вещественными $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. При этом обращение в нуль коэффициента

$$\varepsilon_2 = (A + C) \operatorname{sh} 2\varphi + B \operatorname{ch} 2\varphi$$

невозможно, так как это противоречит условию (2.12).

В случае отрицательного ε_2 достаточно сделать замену $z_1 \rightarrow -z_1$, изменяющую знак ε_2 и сохраняющую форму $H(z, \bar{z})$. Если при этом в формуле (2.13) еще и $\varepsilon_1 < 0$, нужна дополнительная замена

$$z_1 \rightarrow -iz_1, \quad z_2 \rightarrow iz_2,$$

приводящая этот случай к виду (2.7).

Предложение 3 полностью доказано.

Объединяя предложения 1–3, получаем первый из основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 1 (о предварительном приведении пары форм). Пусть $H = H(z, \bar{z})$ – законепреопределенная эрмитова форма от двух комплексных переменных, $Q = Q(z)$ – ненулевая квадратичная форма. Линейным преобразованием пространства $\mathbb{C}^2$ пара (H, Q) может быть приведена к виду, в котором

- а) $H = H(z, \bar{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$;
- б) $Q = Q(z)$ задается одной из формул (2.5)–(2.7).

3. Аффинное каноническое уравнение индефинитной поверхности

Применим обсуждения предыдущего раздела к уравнению (1.5) индефинитной поверхности. При этом везде далее будем полагать эрмитову форму $H(z, \bar{z})$ из (1.5) равной $|z_1|^2 - |z_2|^2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – вещественно-аналитическая индефинитная гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^3$, заданная уравнением

$$v = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + (Q(z) + \overline{Q(\bar{z})}) + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \bar{z}, u). \quad (3.1)$$

Аффинным преобразованием пространства $\mathbb{C}^3$, сохраняющим начало координат и вид уравнения (3.1), форму $Q(z)$ можно привести к одному и только одному из следующих видов:

$$Q(z) \equiv 0, \quad (3.2)$$

$$Q(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0, \quad (3.3)$$

$$Q(z) = \varepsilon z_1(z_1 + z_2), \quad \varepsilon > 0, \quad \text{или} \quad Q(z) = (z_1 + z_2)^2, \quad (3.4)$$

$$Q(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 > 0. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим для сравнения, что в строго псевдо-выпуклом случае, в котором форма Леви поверхности H из уравнения (1.5) сводится к сумме квадратов $|z_1|^2 + |z_2|^2$, квадратичная форма $Q(z)$ из этого уравнения всегда приводится к единственному типу, аналогичному (3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Три типа (3.3)–(3.5) ненулевых квадратичных форм в теореме 2 естественно называть *каноническими* типами. При этом формы, сводимые к типам (3.3), (3.4) и (3.5), назовем *эллиптическими*, *параболическими* и *гиперболическими* соответственно.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. Во-первых, заметим, что нулевая квадратичная форма $Q(z)$ из уравнения (3.1) остается нулевой (условие (3.2)) при любых линейных заменах координат.

Во-вторых, поясним различия между наборами условий (2.5), (2.6) с одной стороны и (3.3), (3.4) с другой (формулы (2.7) и (3.5) из формулировок предложения 3 и теоремы 2 совпадают).

а) При выполнении условия $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \neq 0$ квадратичная форма $Q(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2)$ из (2.6) сводится преобразованием $z_1 \rightarrow z_1, z_2 \rightarrow iz_2$ к виду $Q^*(z) = \varepsilon_1(z_1^2 + z_2^2)$, относящемуся к (2.5).

б) Преобразование координат в 3-мерном комплексном пространстве $z_1 \rightarrow z_2, z_2 \rightarrow z_1, z_3 \rightarrow -z_3$ превращает пару форм $(|z_1|^2 - |z_2|^2, \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2)$ из уравнения (3.1) в аналогичную пару, но с переставленными $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Это позволяет ввести в рамках (2.5) упорядочение коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

в) Тем же преобразованием пара $(0, \varepsilon)$ из (2.6) превращается в $(\varepsilon, 0)$.

С учетом этих пояснений и уже доказанной теоремы 1 для доказательства теоремы 2 теперь достаточно убедиться в однозначности определения по заданной поверхности вида (3.1) с ненулевой формой $Q(z)$:

а) типа формы $Q(z)$ из трех возможных типов (3.3)–(3.5);

б) вещественных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, соответствующих поверхности с ненулевой квадратичной формой любого из 3-х канонических типов.

Здесь можно сослаться на работы [10], [21], в которых детально изучены более общие голоморфные преобразования уравнений вида (3.1).

Пусть поверхность M , заданная таким уравнением, переходит под действием голоморфного (и, в частности, линейного) преобразования в аналогичное уравнение

$$v = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + (Q_1(z) + \overline{Q_1(z)}) + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \bar{z}, u).$$

В силу обсуждений из упомянутых работ в такой ситуации существует матрица $U \in SU(1, 1)$ такая, что выполняется одно из двух условий:

$$\text{а) } Q_1(Uz) = e^{i\omega} Q(z) \quad \text{или} \quad \text{б) } Q_1(Uz) = e^{i\omega} Q(Jz), \quad (3.6)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– матрица, переставляющая переменные z_1, z_2 , $\omega \in [0, 2\pi)$.

Имеют место два технических утверждения (их доказательства, связанные с перебором большого количества простых частных случаев, мы здесь опускаем).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Любое из условий а) или б) в (3.6) влечет совпадение типов канонических квадратичных форм $Q(z)$ и $Q_1(z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В рамках каждого из трех типов канонических квадратичных форм (3.3)–(3.5) любое из условий а) или б) в (3.6) влечет совпадение форм $Q(z)$ и $Q_1(z)$.

С учетом этих предложений теорему 2 можно считать доказанной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Уравнение (3.1), в котором квадратичная форма $Q(z)$ удовлетворяет одному из условий (3.2)–(3.5), будем называть *каноническим уравнением индефинитной поверхности*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Более кратко теорему 2 можно сформулировать как утверждение об аффинной инвариантности пары форм

$$(|z_1|^2 - |z_2|^2, Q(z))$$

из канонического уравнения (3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теореме 2 не утверждается единственность канонического уравнения. Линейные преобразования могут сохранять эрмитову и квадратичную формы в таком уравнении, но изменять слагаемые старших весов.

4. Продолжение матричных алгебр Ли

Линейные векторные поля в пространстве $\mathbb{C}^3$, касательные к аффинно-однородной вещественной гиперповерхности M , образуют алгебру Ли. Эту алгебру удобно представлять в матричной форме, сопоставляя векторному полю (1.2) матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & s \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

При этом скобке векторных полей соответствует скобка (коммутатор) матриц

$$[Z_1, Z_2] = Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1,$$

а размерность алгебры сохраняется.

В связи с однородностью 5-мерных гиперповерхностей нас в первую очередь интересуют 5-мерные алгебры. Мы будем рассматривать примеры специальных матричных алгебр вида

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.2)$$

удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям на элементы составляющих их матриц. Часть таких ограничений получается из основного соотношения (1.3), т.е. из тождества

$$\operatorname{Re}\{Z(\Phi)\}|_M = 0.$$

Пусть, например, поверхность M задана каноническим уравнением

$$v = F_2(z, \bar{z}) + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \bar{z}, u), \quad \text{где} \quad F_2(z, \bar{z}) = H(z, \bar{z}) + Q(z) + \overline{Q(z)}.$$

Отделяя в тождестве (1.3) компоненты младших весов, получим

$$\text{Вес } 0: \quad \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2} q \right) = 0; \quad (4.3)$$

$$\text{Вес } 1: \quad \operatorname{Re} \left(p \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + s \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + \frac{i}{2} (a_{31} z_1 + a_{32} z_2) \right) = 0. \quad (4.4)$$

Первое из этих ограничений, т.е. (4.3), означает, что для поверхности M , заданной каноническим уравнением, коэффициент q из представления (4.1) или (4.2) произвольного векторного поля на M является вещественным числом.

Ясно, что вид соотношения (4.4) зависит от типа квадратичной формы $Q(z)$ из канонического уравнения обсуждаемой поверхности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть вещественно-аналитическая индефинитная гиперповерхность M задана каноническим уравнением (3.1) и $Q(z) \neq 0$. В зависимости от типа $Q(z)$ коэффициенты линейных векторных полей на M вида (4.2) подчиняются следующим ограничениям:

- эллиптический тип $Q(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2$, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} a = 2i(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p), \\ b = 2i(-\bar{s} + 2\varepsilon_2 s); \end{cases} \quad (4.5)$$

- параболический тип $Q(z) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2)$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 = 0$ или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$:

$$\begin{cases} a = 2i(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)s), \\ b = 2i(-\bar{s} + 2\varepsilon_2 s + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)p); \end{cases} \quad (4.6)$$

- гиперболический тип $Q(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2$, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 > 0$:

$$\begin{cases} a = 2i(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p + \varepsilon_2 s), \\ b = 2i(-\bar{s} - 2\varepsilon_1 s + \varepsilon_2 p). \end{cases} \quad (4.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для СПВ-гиперповерхностей аналогом различных выписанных в (4.5)–(4.7) условий на коэффициенты a , b , p , s являются единые соотношения

$$a = 2i(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p), \quad b = 2i(\bar{s} + 2\varepsilon_2 s).$$

Будем еще считать, что каждая из рассматриваемых алгебр (4.2) содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

соответствующую векторному полю $\partial/\partial z_3$.

Геометрически это требование означает жесткость изучаемых поверхностей. Уравнение вида (3.1) жесткой поверхности не зависит от переменной $u = \operatorname{Re} w$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для 5-мерной матричной алгебры h вида (4.2) выполняются следующие условия:

- 1) h содержит матрицу (4.8);
- 2) вещественная линейная оболочка четвертых столбцов матриц h замечает 5-мерное вещественное подпространство в $\mathbb{C}^3$;
- 3) выполнено одно из условий (4.5)–(4.7) с нетривиальной парой $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (одной и той же для всех матриц из h).

Тогда существует единственная индефинитная аффинно-однородная вещественная гиперповерхность канонического вида $M \in \mathbb{C}^3$, для которой алгебра h является матричной реализацией алгебры линейных векторных полей на M . При этом тип поверхности определяется по алгебре в соответствии с правилами (4.5)–(4.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из замкнутости относительно скобки рассматриваемой алгебры линейных векторных полей на M в силу классической теоремы Фробениуса следует интегрируемость этой алгебры.

В силу условия 2) соответствующее этой алгебре интегральное (однородное) многообразие, содержащее начало координат, имеет в этой точке (и, следовательно, вблизи нее) 5-мерное касательное пространство, т.е. является вещественной гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{C}^3$. Аналитичность этой поверхности является следствием аналитичности решения системы линейных уравнений в частных производных с линейными коэффициентами.

Из условия 1) вытекает разрешимость определяющей функции этой поверхности относительно переменной $v = \operatorname{Im} z_3$.

Канонический вид соответствующего уравнения поверхности гарантируется видом (4.2) обсуждаемой алгебры. Каждое из условий (4.5)–(4.7) (с конкретными значениями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$) обеспечивает требуемую индивидуальную структуру слагаемых 2-го веса в этом уравнении, причем с заданными параметрами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. По младшим слагаемым уравнения (3.1) из системы весовых составляющих уравнения (1.3) поочередно можно однозначно определить все остальные компоненты однородности этого уравнения по схеме, описанной в [12]. Тем самым, алгебра (4.2) однозначно определяет некоторую аффинно-однородную поверхность канонического вида.

Отметим, что построение алгебр, удовлетворяющих условиям теоремы 3, является весьма трудоемкой задачей. В работах [18], [19] разработан алгоритм решения аналогичной задачи для случая СПВ-гиперповерхностей за счет продолжения матричных алгебр. Техника названных работ оказывается применимой и для построения индефинитных однородных поверхностей.

В основе алгоритма лежит замечание о том, что левые верхние (2×2) -блоки матриц из алгебры (4.2) сами образуют алгебру Ли. При этом (см. [22]) лишь малая часть всех подалгебр алгебры Ли $M(2, \mathbb{C})$ допускает продолжения, т.е. вкладывается в качестве левых верхних (2×2) -блоков в алгебры, отвечающие однородным СПВ-поверхностям. В частности, только одна (с точностью до матричного подобия) 3-мерная вещественная подалгебра $M(2, \mathbb{C})$ продолжима в СПВ-случае. Это алгебра с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Использование именно этой алгебры позволило построить большое количество подалгебр $M(4, \mathbb{C})$, представляющих интерес в связи с однородностью и в индефинитном случае.

5. Примеры матричных алгебр, соответствующих индефинитным однородным поверхностям

Согласно упомянутому выше алгоритму проще строить вместо алгебры h , удовлетворяющей требованиям теоремы 3, подобную ей алгебру $\hat{h} = C^{-1}hC$ с некоторой подходящей матрицей $C \in GL(4, \mathbb{C})$. Ниже приводятся примеры именно таких “подобных требуемым” алгебр.

Например, имея в виду индефинитные однородные поверхности гиперболического типа, рассмотрим семейство 5-мерных вещественных алгебр с базисом

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(1-2\varepsilon_1)^2}{8t^2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1-2\varepsilon_1}{4t} \\ a_1 & b_1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1-2\varepsilon_1}{2t} \\ 0 & 0 & 0 & -(1-2\varepsilon_1) \\ a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \frac{i(1-2\varepsilon_1)}{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 2i\varepsilon_1 \\ ia_2 - b_4 & -2ia_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где ε_1, t – вещественные параметры,

$$a_1 = i \frac{(6t^2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 + t^2 + 1)(2\varepsilon_1 - 1)}{4t^2}, \quad a_2 = i \frac{(t^2 + 1)(1 - 4\varepsilon_1^2)}{t},$$

$$b_1 = i \frac{(2\varepsilon_1 - 1)(t^2 + 4t^2\varepsilon_1^2 + 12t^2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1^2 - 4\varepsilon_1 + 1)}{8t^3}, \quad b_4 = \frac{(t^2 + 1)(2\varepsilon_1 - 1)}{t}.$$

Преобразование подобия с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

(вещественный параметр t – тот же, что и в формулах (5.1)–(5.3)) переводит любую алгебру из семейства (5.1)–(5.3) в алгебру, удовлетворяющую всем условиям теоремы 3. В частности, векторы

$$\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

из базисных матриц обоих семейств являются линейно независимыми над $\mathbb{R}$, например, при условиях

$$0 < t < 1, \quad 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}.$$

Для всех матриц любой новой алгебры выполняется условие (4.7) с параметром ε_1 из (5.1)–(5.3) и

$$\varepsilon_2 = \frac{(1-t^2)(1-2\varepsilon_1)}{2t}.$$

Это означает, что построено 2-параметрическое семейство различных аффинно-однородных индефинитных поверхностей гиперболического типа.

Непосредственное интегрирование алгебр (5.1)–(5.3) (чрезмерно громоздкое в общем случае) приводит при отдельных значениях параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ к алгебраическим поверхностям 6-го порядка, напоминающим уравнения однородных СПВ-гиперповерхностей из [18].

В эллиптическом случае базис построенного нами 2-параметрического семейства алгебр имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4\varepsilon_2^2 - 1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{t(2\varepsilon_2 + 1)}{4} \\ a_1 & b_1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{t(2\varepsilon_2 + 1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(t^2 + 1)(2\varepsilon_2 + 1)}{2} \\ a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \frac{it(2\varepsilon_2 + 1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i(1 - 2\varepsilon_2 t^2 - t^2 - 2\varepsilon_2)}{2} \\ ia_2 - b_4 & -2ia_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

где

$$a_1 = \frac{i(4\varepsilon_2^2 - 1)}{2}, \quad a_2 = it(3 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2 t^2 - t^2)(2\varepsilon_2 + 1), \\ b_1 = \frac{it(2\varepsilon_2 - 1)(2\varepsilon_2 + 1)^2}{4}, \quad b_4 = -2t(2\varepsilon_2 + 1).$$

Условие (4.5) эллиптичности типа выполняется для алгебр (5.5)–(5.7) после применения к ним подобия с той же матрицей (5.4). При этом

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}(1 + 2\varepsilon_2),$$

так что, например, при $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 1/2$ четверка векторов

$$\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

является линейно независимой в вещественном смысле. Это позволяет говорить (в силу теоремы 3) о существовании 2-параметрического семейства аффинно неэквивалентных друг другу аффинно-однородных indefinitных гиперповерхностей эллиптического типа. Каждая такая поверхность является орбитой аффинной группы Ли, связанной с одной из алгебр (5.5)–(5.7).

Описанные примеры алгебр (и, следовательно, однородных поверхностей) из эллиптического и гиперболического случаев накрывают некоторые открытые подмножества во множестве $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ допустимых параметров второго порядка из канонических уравнений (3.3) и (3.5) вещественных гиперповерхностей. В параболическом случае наш очередной пример гарантирует существование алгебр (и, следовательно, однородных поверхностей), отвечающих лишь одной точке

$$\{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1\},$$

из множества параметров канонических форм $Q(z)$ параболического типа.

Здесь параметрами обсуждаемого семейства алгебр являются

$$r \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

При этом использованы дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - 2\varepsilon, & \mu &= 1 + 2\varepsilon, \\ a_1 &= \frac{1}{2}(\mu \cos \varphi - i\lambda \sin \varphi), & a_2 &= 2(\cos \varphi - i \sin \varphi), \\ b_1 &= \frac{1}{2}(\mu^2 \cos \varphi - i\lambda^2 \sin \varphi) + 2r(\cos \varphi - i \sin \varphi), & b_3 &= -(\lambda \sin \varphi + i\mu \cos \varphi). \end{aligned}$$

С учетом этого базисные матрицы каждой из алгебр предлагаемого семейства имеют вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ir(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}(-\lambda \sin \varphi + i\mu \cos \varphi) \\ a_1 & b_1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(-\lambda \sin \varphi + i\mu \cos \varphi) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi + i \cos \varphi \\ a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & -\frac{1}{2}(\mu \cos \varphi + i\lambda \sin \varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos \varphi + i \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\sin \varphi + i \cos \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Несложно проверяется, что при указанных ограничениях на параметры векторы

$$\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

являются линейно независимыми в вещественном смысле.

При подобии используется матрица того же вида (5.4), но с конкретным значением параметра t , а именно $t = -1$; получаемые при этом алгебры подчиняются условию (4.6). Это означает справедливость теоремы 3 в параболическом варианте для семейства алгебр (5.8)–(5.11).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Cartan, “Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **11**:1 (1932), 17–90.
- [2] B. Doubrov, B. Komrakov, M. Rabinovich, *Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry*, Preprint, Oslo, 1995.
- [3] G. Fels, W. Kaup, “Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5”, *Acta Math.*, **201**:1 (2008), 1–82.
- [4] А. В. Лобода, “О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ ”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 211–223.
- [5] А. В. Лобода, “Локальное описание однородных вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства в терминах их нормальных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:2 (2000), 33–42.
- [6] А. В. Лобода, “Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии”, *Матем. сб.*, **192**:12 (2001), 3–24.
- [7] А. В. Лобода, “Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Анатолия Георгиевича Витушкина, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 114–142.
- [8] А. В. Лобода, “Об одном семействе алгебр Ли, связанных с однородными поверхностями”, *Комплексный анализ и приложения*, Сборник статей, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 111–126.
- [9] А. В. Лобода, А. С. Ходарев, “Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства”, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, № 10, 38–50.
- [10] S. S. Chern, J. K. Moser, “Real hypersurfaces in complex manifolds”, *Acta Math.*, **133**:3 (1974), 219–271.
- [11] А. В. Лобода, “Об определении аффинно-однородной седловидной поверхности пространства $\mathbb{R}^3$ по коэффициентам ее нормального уравнения”, *Матем. заметки*, **65**:5 (1999), 793–797.
- [12] M. Eastwood, V. Ezhov, “On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space”, *Geom. Dedicata*, **77**:1 (1999), 11–69.
- [13] Р. Н. Гузев, А. В. Лобода, “О нормальных уравнениях аффинно-однородных выпуклых поверхностей пространства $\mathbb{R}^3$ ”, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, № 3, 25–32.
- [14] О. А. Болдырева, А. В. Лобода, “О коэффициентном подходе к аффинной однородности”, *Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем.*, 2006, № 1, 105–109.

- [15] Г. Е. Изотов, “О совместном приведении квадратичной и эрмитовой форм”, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, № 1, 143–159.
- [16] М. С. Данилов, “Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности с индефинитной формой Леви”, *Международная школа-семинар по геометрии и анализу (Абрау-Дюрсо, 2008)*, 25–26.
- [17] О. А. Болдырева, А. В. Лобода, “Об одном семействе непродолжаемых матричных алгебр Ли”, *Черноземный альманах научных исследований*, 2007, № 1(5), 89–102.
- [18] А. М. Демин, А. В. Лобода, “Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ ”, *Матем. заметки*, **84:5** (2008), 791–794.
- [19] В. К. Евченко, А. В. Лобода, “4-мерные матричные алгебры и аффинная однородность вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ ”, *Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем.*, 2009, № 1, 108–118.
- [20] Д. П. Желобенко, А. И. Штерн, *Представления групп Ли*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983.
- [21] В. К. Белошапка, “О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43:2** (1979), 243–266.
- [22] А. В. Лобода, “Действие аффинной подгруппы в комплексной касательной плоскости к однородной поверхности”, *Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, 2009)*, 106–107.

М. С. Данилов

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: damased@yandex.ru

Поступило

20.08.2009

А. В. Лобода

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: lobvgasu@yandex.ru