Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Чугунова, Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 440–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:20:41

Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов

В. В. Чугунова

В работе доказано, что в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах функциональных элементов все булевы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) равной: ε^3 – для констант 0 и 1, ε – для функций $\bar{x}_i$, 3ε – для функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0, 1, \bar{x}_i, x_i$, где ε – вероятность ошибки на каждом входе функционального элемента, $i = 1, \dots, n$. Функции x_i , $i = 1, \dots, n$, можно реализовать абсолютно надежно. Сложность асимптотически оптимальных по надежности схем по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Библиография: 4 названий.

Введение. Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов, реализующих булевы функции от n переменных, рассматривал фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/2$) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию $h(\tilde{x})$, а в неисправном – функцию $\bar{h}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода синтеза схем Нейман установил, что в произвольном полном базисе, содержащем функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, при $\varepsilon \in (0; 1/6)$ любую булеву функцию $f(\tilde{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c_1\varepsilon$ (c_1 – некоторая абсолютная константа, зависящая от базиса), т.е. ненадежность схемы остается сравнимой (по порядку) с ненадежностью одного элемента базиса. Основным недостатком метода Неймана в том, что сложность схемы с ростом числа итераций увеличивается экспоненциально (примерно, в 3^k раз, где k – число итераций).

Поэтому именно сложность схем из ненадежных элементов, подверженных инверсным неисправностям на выходах, исследовалась в работах Р. Л. Добрушина, С. И. Ортюкова, Д. Улига и некоторых других авторов (краткий обзор результатов приведен в работе [2]).

Затем рассматривалась задача синтеза оптимальных по надежности схем во всех неприводимых полных базисах, содержащих функции, зависящие не более чем от двух переменных, Алехиной – при однотипных константных неисправностях только на входах или только на выходах элементов [2] и автором статьи – при инверсных неисправностях на входах [3]. Причем сложность предложенных схем (здесь и всюду далее сложность схемы – число функциональных элементов в ней) по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов в базисе $\{\bigvee_{i=1}^k x_i, \bigwedge_{i=1}^k x_i, \bar{x}\}$ в случае однотипных константных неисправностей на входах элементов решена Алехиной [4]. Алехиной доказано, что функции $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, можно реализовать абсолютно надежно, константы 0 и 1 можно реализовать сколь угодно надежно, а все остальные булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной ε^k при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $k \geq 3$.

Возникает аналогичная задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов, решению которой и посвящена данная работа.

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$. Будем считать, что схема из функциональных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\tilde{x})$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Число входов функциональных элементов равно числу существенных переменных функций, приписанных этим элементам. Предполагается, что каждый вход элемента схемы независимо от всех других входов элементов с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/2$) подвержен инверсным неисправностям. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на вход элемента значение a , ($a \in \{0, 1\}$) с вероятностью ε может превратиться в значение $\bar{a}$.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S , реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Обозначим $P(f) = \inf P(S)$, где S – схема из ненадежных элементов, реализующая булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Схему A из ненадежных элементов, реализующую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, назовем *асимптотически оптимальной по надежности*, если $P(A) \sim P(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В данной работе решена задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов.

Основной результат работы выражают теоремы 1–3.

ТЕОРЕМА 1. При $\varepsilon \in (0; 1/400]$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ можно реализовать такой схемой C , ненадежность которой $P(C) \leq 3\varepsilon + \varepsilon^2$.

Пусть $K(n)$ – множество булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вида $f(\tilde{x}) = x_i^a$ (где $i = 1, 2, \dots, n, a \in \{0, 1\}$) и константы 0 и 1.

Рис. 1

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varepsilon \in (0; 1/10]$, $f(\tilde{x})$ – булева функция, $f \notin K(n)$, и S – любая схема, реализующая f в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$. Тогда $P(S) \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$.

ТЕОРЕМА 3. При $\varepsilon \in (0; 1/1\,200\,000]$ произвольную булеву функцию от n переменных $f(\tilde{x})$ можно реализовать в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ такой схемой T , что $L(T) \lesssim 1008 \cdot 2^n/n$ и $P(T) \leq 3\varepsilon + \varepsilon^2$.

Докажем утверждения теорем 1–3.

Верхние оценки ненадежности схем. В теореме 1 содержится утверждение о верхней оценке ненадежности схем. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим несколько вспомогательных утверждений (леммы 1–8).

ЛЕММА 1. Пусть S – произвольная схема, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, отличную от константы, а ее выходному элементу E приписана конъюнкция. Первый вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_1 , второй вход – с выходом некоторой подсхемы S_2 , третий вход – с выходом некоторой подсхемы S_3 , причем подсхемы S_1 , S_2 и S_3 не имеют общих элементов (рис. 1). Обозначим через $P_{f_i}(S_i, \tilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_i , реализующей функцию f_i , $i = 1, 2, 3$.

Вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют условиям

1) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то

$$\begin{aligned} P_1(S, \tilde{a}) \leq & \varepsilon^3 + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 + (P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}) \\ & + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\ & + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}); \end{aligned}$$

2) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то

$$P_1(S, \tilde{a}) \leq \varepsilon^2 + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon$$

$$+ (P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\ + P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon^3 + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a});$$

3) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то

$$P_1(S, \tilde{a}) \leq \varepsilon + (P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\ + (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\ + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})\varepsilon^3 + P_1(S_3, \tilde{a});$$

4) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то

$$P_0(S, \tilde{a}) \leq 3\varepsilon + P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}) \\ + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок на выходе схемы S , удовлетворяющей условиям леммы.

1) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_1(S, \tilde{a}) = (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^3 \\ + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\ + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\ + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\ + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\ + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\ + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\ + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^3 \\ \leq \varepsilon^3 + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\ + (P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\ + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}).$$

2) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_1(S, \tilde{a}) = (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon^3 \\ + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\ + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\ + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\ + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\ + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\ + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\ + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))(1 - \varepsilon)^3 \\ \leq \varepsilon^2 + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
& + (P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\
& + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

3) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}
P_1(S, \tilde{a}) &= P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^3 \\
&+ P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
&+ P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
&+ P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^3 \\
&\leq \varepsilon + (P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\
&+ (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\
&+ P_1(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

4) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}
P_0(S, \tilde{a}) &= P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})((1 - \varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1 - \varepsilon)) \\
&+ P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))((1 - \varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3) \\
&+ P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})((1 - \varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3) \\
&+ P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))((1 - \varepsilon)^3 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3) \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})((1 - \varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3) \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))((1 - \varepsilon)^3 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3) \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})((1 - \varepsilon)^3 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3) \\
&+ (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))(3\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3) \\
&\leq 3\varepsilon + P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}) \\
&+ P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}).
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть схема S состоит только из одного конъюнктора E , реализующего функцию $x_1 \& x_2 \& x_3$, тогда вероятности ошибок на выходе схемы S равны

- 1) $P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (000)$,
- 2) $P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon^2 - \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (001)$ или $\tilde{a} = (010)$, или $\tilde{a} = (100)$,
- 3) $P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (011)$ или $\tilde{a} = (101)$, или $\tilde{a} = (110)$,
- 4) $P_0(S, \tilde{a}) = 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (111)$.

Для доказательства леммы 2 достаточно вычислить вероятности ошибок на выходе схемы S , удовлетворяющей условиям леммы, на соответствующих входных наборах.

ЛЕММА 3. Пусть S – произвольная схема, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, отличную от константы, а ее выходному элементу E приписана конъюнкция. Три входа конъюнктора E соединены с выходами трех одинаковых подсхем S_1 , каждая из которых реализует функцию $f_1(\tilde{x})$. Обозначим через $P_{\tilde{f}_1}(S_1, \tilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_1 ; тогда вероятности ошибок на выходе схемы S , очевидно, реализующей ту же функцию $f_1(\tilde{x})$, удовлетворяют условиям

- 1) $P_1(S, \tilde{a}) \leq (\varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a}))^3$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$,
- 2) $P_0(S, \tilde{a}) \leq 3(\varepsilon + 2P_0(S_1, \tilde{a}))$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся леммой 1.

1) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, то по лемме 1 (случай 1) вероятность ошибки на выходе схемы S удовлетворяет условию

$$P_1(S, \tilde{a}) \leq \varepsilon^3 + 3P_1(S_1, \tilde{a})\varepsilon^2 + 3P_1^2(S_1, \tilde{a})\varepsilon + P_1^3(S_1, \tilde{a}) = (\varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a}))^3.$$

2) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, то по лемме 1 (случай 4) вероятность ошибки на выходе схемы S удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} P_0(S, \tilde{a}) &\leq 3\varepsilon + 3P_0(S_1, \tilde{a}) + 3P_0^2(S_1, \tilde{a}) = 3\varepsilon + 3P_0(S_1, \tilde{a})(1 + P_0(S_1, \tilde{a})) \\ &\leq 3\varepsilon + 6P_0(S_1, \tilde{a}) = 3(\varepsilon + 2P_0(S_1, \tilde{a})). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть S – произвольная схема, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, отличную от константы, а ее выходному элементу E приписана дизъюнкция. Первый вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_1 , второй вход – с выходом некоторой подсхемы S_2 , третий вход – с выходом некоторой подсхемы S_3 , причем подсхемы S_1 , S_2 и S_3 не имеют общих элементов (рис. 2). Обозначим через $P_{\tilde{f}_i}(S_i, \tilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_i , реализующей функцию $f_i(\tilde{x})$, $i = 1, 2, 3$.

Вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют условиям

- 1) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то

$$\begin{aligned} P_1(S, \tilde{a}) &\leq 3\varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}) \\ &\quad + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}); \end{aligned}$$

- 2) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то

$$\begin{aligned} P_0(S, \tilde{a}) &\leq \varepsilon + (P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\ &\quad + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\ &\quad + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})\varepsilon^3 + P_0(S_3, \tilde{a}); \end{aligned}$$

- 3) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то

$$\begin{aligned} P_0(S, \tilde{a}) &\leq \varepsilon^2 + (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\ &\quad + (P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\ &\quad + P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon^3 + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}); \end{aligned}$$

Рис. 2

4) если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то

$$P_0(S, \tilde{a}) \leq \varepsilon^3 + (P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon + (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок на выходе схемы S , удовлетворяющей условиям леммы.

1) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned} P_1(S, \tilde{a}) &= P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1-\varepsilon)) \\ &\quad + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))((1-\varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) \\ &\quad + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) \\ &\quad + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))((1-\varepsilon)^3 + 2\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) \\ &\quad + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 3\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) \\ &\quad + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))((1-\varepsilon)^3 + 2\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) \\ &\quad + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 2\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) \\ &\quad + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))(3\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + 3\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) \\ &\leq 3\varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}) \\ &\quad + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}). \end{aligned}$$

2) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 0$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_0(S, \tilde{a}) = P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^3 + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1-\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
& + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^3 \\
\leq & \varepsilon + (P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\
& + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\
& + P_0(S_3, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

3) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}
P_0(S, \tilde{a}) &= (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon^3 \\
& + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))(1 - \varepsilon)^3 \\
\leq & \varepsilon^2 + (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon \\
& + (P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a})P_1(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_3, \tilde{a})\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

4) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, $f_2(\tilde{a}) = 1$ и $f_3(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}
P_0(S, \tilde{a}) &= (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^3 \\
& + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2(1 - \varepsilon) \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))P_0(S_3, \tilde{a})\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 \\
& + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a})(1 - \varepsilon)^3 \\
\leq & \varepsilon^3 + (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon^2 \\
& + (P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}) \\
& + P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}))\varepsilon + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})P_0(S_3, \tilde{a}).
\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть схема S состоит только из одного дизъюнктора E , реализующего функцию $x_1 \vee x_2 \vee x_3$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S равны

- 1) $P_1(S, \tilde{a}) = 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (000)$,
- 2) $P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (001)$ или $\tilde{a} = (010)$, или $\tilde{a} = (100)$,
- 3) $P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon^2 - \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (011)$ или $\tilde{a} = (101)$, или $\tilde{a} = (110)$,
- 4) $P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon^3$, если входной набор $\tilde{a} = (111)$.

Для доказательства леммы 5 достаточно вычислить вероятности ошибок на выходе схемы S , удовлетворяющей условиям леммы, на соответствующих входных наборах.

ЛЕММА 6. Пусть S – произвольная схема, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, отличную от константы, а ее выходному элементу E приписана дизъюнкция. Три входа дизъюнктора E соединены с выходами трех одинаковых подсхем S_1 , каждая из которых реализует функцию $f_1(\tilde{x})$. Обозначим через $P_{\tilde{f}_1}(S_1, \tilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_1 ; тогда вероятности ошибок на выходе схемы S , очевидно, реализующей ту же функцию $f_1(\tilde{x})$, удовлетворяют условиям

- 1) $P_1(S, \tilde{a}) \leq 3(\varepsilon + 2P_1(S_1, \tilde{a}))$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$;
- 2) $P_0(S, \tilde{a}) \leq (\varepsilon + P_0(S_1, \tilde{a}))^3$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся леммой 4.

1) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$, то по лемме 4 (случай 1) вероятность ошибки на выходе схемы S удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} P_1(S, \tilde{a}) &\leq 3\varepsilon + 3P_1(S_1, \tilde{a}) + 3P_1^2(S_1, \tilde{a}) = 3\varepsilon + 3P_1(S_1, \tilde{a})(1 + P_1(S_1, \tilde{a})) \\ &\leq 3\varepsilon + 6P_1(S_1, \tilde{a}) = 3(\varepsilon + 2P_1(S_1, \tilde{a})). \end{aligned}$$

2) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$, то по лемме 4 (случай 4) вероятность ошибки на выходе схемы S удовлетворяет условию

$$P_0(S, \tilde{a}) \leq \varepsilon^3 + 3P_0(S_1, \tilde{a})\varepsilon^2 + 3P_0^2(S_1, \tilde{a})\varepsilon + P_0^3(S_1, \tilde{a}) = (\varepsilon + P_0(S_1, \tilde{a}))^3.$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть S – произвольная схема, реализующая неконстантную булеву функцию $f(\tilde{x})$, такова, что вход ее выходного элемента E – инвертора – соединен с выходом некоторой подсхемы S_1 (рис. 3). Обозначим $P_1(S_1, \tilde{a})$ и $P_0(S_1, \tilde{a})$ вероятности ошибок на выходе схемы S_1 на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S .

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S равны

- 1) $P_1(S, \tilde{a}) = \varepsilon + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon)$, если набор $\tilde{a}$ является нулевым для f , т.е. $f(\tilde{a}) = 0$;
- 2) $P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon)$, если набор $\tilde{a}$ является единичным для f , т.е. $f(\tilde{a}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок на выходе схемы S , удовлетворяющей условиям леммы.

1) Если набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_1(S, \tilde{a}) = P_0(S_1, \tilde{a})(1 - \varepsilon) + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))\varepsilon = \varepsilon + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon).$$

Рис. 3

2) Если набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_0(S, \tilde{a}) = (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))\varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - \varepsilon) = \varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon).$$

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $f(\tilde{x})$ – произвольная булева функция, S – схема, реализующая функцию $f(\tilde{x})$. Обозначим через $P_1(S, \tilde{a})$ и $P_0(S, \tilde{a})$ вероятности ошибок на выходе схемы S на входном наборе $\tilde{a}$. Тогда по схеме S можно построить схему $\varphi(S)$ (рис. 4), реализующую функцию $f(\tilde{x})$, вероятности ошибок на выходе которой удовлетворяют условиям

- 1) $P_1(\varphi(S), \tilde{a}) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + P_1(S, \tilde{a}))^3$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$;
- 2) $P_0(\varphi(S), \tilde{a}) \leq (4\varepsilon + 6P_0(S, \tilde{a}))^3$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\tilde{x})$ – булева функция, а схема S – произвольная схема, ее реализующая. Построим схему D (рис. 4). Для этого возьмем три экземпляра схемы S , выходы которых соединим с входами конъюнктора. Очевидно, схема D реализует функцию $f(\tilde{x})$. Если $P_1(S, \tilde{a})$ и $P_0(S, \tilde{a})$ – вероятности ошибок на выходе схемы S на входном наборе $\tilde{a}$, то вероятности ошибок на выходе схемы D по лемме 3 удовлетворяют условиям

- 1) $P_1(D, \tilde{a}) \leq (\varepsilon + P_1(S, \tilde{a}))^3$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$;
- 2) $P_0(D, \tilde{a}) \leq 3(\varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a}))$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$.

Построим схему $\varphi(S)$. Для этого возьмем три экземпляра схемы D , выходы которых соединим с входами дизъюнктора. Вероятности ошибок на выходе схемы $\varphi(S)$, по лемме 6 удовлетворяют условиям

- 1) $P_1(\varphi(S), \tilde{a}) \leq 3(\varepsilon + 2P_1(D, \tilde{a})) \leq 3(\varepsilon + 2(\varepsilon + P_1(S, \tilde{a}))^3) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + P_1(S, \tilde{a}))^3$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$;
- 2) $P_0(\varphi(S), \tilde{a}) \leq (\varepsilon + P_0(D, \tilde{a}))^3 \leq (\varepsilon + 3(\varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a})))^3 \leq (4\varepsilon + 6P_0(S, \tilde{a}))^3$, если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$.

Лемма 8 доказана.

Рис. 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Проводится индукцией по числу n – числу существенных переменных функций.

При $n = 0$ имеем константы 0 и 1.

Моделируя формулу $\bar{x} \& x \& x$, построим схему S_1 из двух элементов, реализующую константу 0. Нетрудно проверить, что $P(S_1) \leq 2\varepsilon$.

Моделируя формулу $\bar{x} \vee x \vee x$, построим схему S_2 из двух элементов, реализующую константу 1. Нетрудно проверить, что $P(S_2) \leq 2\varepsilon$. Основание индукции проверено.

Пусть утверждение теоремы верно для всех булевых функций, зависящих не более чем от $n - 1$ переменных.

Индуктивный переход выполняется следующим образом: сначала строится схема $\tilde{S}$, реализующая произвольную булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, на основе разложения функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f = x_n \& x_n \& f_1 \vee x_n \& x_n \& f_1 \vee \bar{x}_n \& \bar{x}_n \& f_0,$$

где функции $f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$.

Обозначим через A (рис. 5) подсхему схемы $\tilde{S}$, выход которой является выходом схемы $\tilde{S}$, а на входы подаются значения x_n , $f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$.

Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – входной набор схемы $\tilde{S}$. Схема $\tilde{S}$ функционирует следующим образом:

Рис. 5

- если подсхема A схемы $\tilde{S}$ исправна и $a_n = 0$, то схема $\tilde{S}$ реализует ту же функцию, что и схема S'' , независимо от работы подсхемы S' , реализующей функцию f_1 ;
- если подсхема A схемы $\tilde{S}$ исправна и $a_n = 1$, то схема $\tilde{S}$ реализует ту же функцию, что и схема S' , независимо от работы подсхемы S'' , реализующей функцию f_0 .

Вычислим вероятности ошибок на выходе схемы $\tilde{S}$, учитывая, что функции f_0 и f_1 согласно индуктивному предположению можно реализовать схемами, ненадежность которых не больше $3\varepsilon + \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

Рассмотрим два случая: переменная x_n принимает значение 0 или 1.

1. Пусть $x_n = 0$. Найдем вероятности ошибок на выходе схемы $\tilde{S}$, используя вероятности ошибок на выходе подсхем, из которых состоит схема $\tilde{S}$, на соответствующих входных наборах.

1.1. Вычислим вероятности ошибок на выходе подсхемы, состоящей из элемента E_1 и схемы S' , используя лемму 1:

- при поступлении на входы элемента E_1 набора (000) вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (случай 1 леммы 1)

$$P_1 \leq \varepsilon^3 + \varepsilon^2(3\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 \leq \varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$;

- при поступлении на входы элемента E_1 набора (001) вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (случай 2 леммы 1)

$$P_1 \leq \varepsilon^2 + \varepsilon^3(3\varepsilon + \varepsilon^2) = \varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^5 \leq 2\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

1.2. Оценим вероятности ошибок на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_2 , E_3 и схемы S'' , учитывая, что вероятность ошибки на выходе элемента E_2 не более ε , а вероятность ошибки на выходе схемы S'' не более $3\varepsilon + \varepsilon^2$. Для вычислений воспользуемся доказательством леммы 1 при условии, что два входа элемента E_3 соединены с выходом элемента E_2 . Это значит, что если элемент E_2 ошибается, то эта ошибка проходит на два входа элемента E_3 . В результате получим

- при поступлении на входы элемента E_3 набора (111), вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 4 леммы 1)

$$P_0 \leq 3\varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon(3\varepsilon + \varepsilon^2) = 7\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \leq 8\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$;

- при поступлении на входы элемента E_3 набора (110), вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 3 леммы 1)

$$P_1 \leq \varepsilon + \varepsilon^4 + 3\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3(3\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\varepsilon^4 + \varepsilon^5 \leq 5\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

1.3. Оценим вероятности ошибок на выходе схемы $\tilde{S}$, состоящей из элементов E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , схем S' и S'' , учитывая, что вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элемента E_1 и схемы S' , не более $2\varepsilon^2$ (пункт 1.1 доказательства), а вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_2 , E_3 и схемы S'' удовлетворяет условию: $P_0 \leq 8\varepsilon$ и $P_1 \leq 5\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$ (пункт 1.2 доказательства). Для вычислений воспользуемся доказательством леммы 4, при условии, что два входа элемента E_4 соединены с выходом элемента E_1 . Это значит, что если в подсхеме, состоящей из элемента E_1 и схемы S' , произошла ошибка, то эта ошибка проходит на два входа элемента E_4 . В результате получим

- при поступлении на входы элемента E_4 набора (000), вероятность ошибки на выходе схемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 1 леммы 4)

$$P_1 \leq 3\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon + 2\varepsilon^2 \cdot 5\varepsilon = 8\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 10\varepsilon^3 \leq 9\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$;

- при поступлении на входы элемента E_4 набора (001), вероятность ошибки на выходе схемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 2 леммы 4)

$$P_0 \leq \varepsilon + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2 \cdot \varepsilon^3 + 8\varepsilon \cdot 2\varepsilon^2 \cdot \varepsilon^2 = 9\varepsilon + 18\varepsilon^5 \leq 10\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

Таким образом, вероятности ошибок на выходе схемы $\tilde{S}$ при $x_n = 0$ удовлетворяют условиям $P_1 \leq 9\varepsilon$, $P_0 \leq 10\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

2. Пусть $x_n = 1$. Найдем вероятности ошибок на выходе схемы $\tilde{S}$, используя вероятности ошибок на выходе подсхем, из которых состоит схема $\tilde{S}$, на соответствующих входных наборах.

2.1. Вычислим вероятности ошибок на выходе подсхемы, состоящей из элемента E_1 и схемы S' , используя лемму 1:

- при поступлении на входы элемента E_1 набора (110), вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (случай 3 леммы 1):

$$P_1 \leq \varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon^2 = 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$;

- при поступлении на входы элемента E_1 набора (111), вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (случай 4 леммы 1):

$$P_0 \leq 3\varepsilon + 3\varepsilon + \varepsilon^2 = 6\varepsilon + \varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

2.2. Оценим вероятности ошибок на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_2 , E_3 и схемы S'' , учитывая, что вероятность ошибки на выходе элемента E_2 не более ε , а вероятность ошибки на выходе схемы S'' не более $3\varepsilon + \varepsilon^2$. Для вычислений воспользуемся доказательством леммы 1, при условии, что два входа элемента E_3 соединены с выходом элемента E_2 . Это значит, что если элемент E_2 ошибается, то эта ошибка проходит на два входа элемента E_3 . В результате получим

- при поступлении на входы элемента E_3 набора (000), вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 1 леммы 1)

$$P_1 \leq \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + (3\varepsilon + \varepsilon^2)\varepsilon^2 + \varepsilon(3\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 + \varepsilon^4 \leq 5\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$;

- при поступлении на входы элемента E_3 набора (001), вероятность ошибки на выходе подсхемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 2 леммы 1)

$$P_1 \leq \varepsilon^2 + \varepsilon + (3\varepsilon + \varepsilon^2)\varepsilon^3 + (3\varepsilon + \varepsilon^2)\varepsilon^2 = \varepsilon + \varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 + 4\varepsilon^4 + \varepsilon^5 \leq 2\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

2.3. Оценим вероятности ошибок на выходе схемы $\tilde{S}$, состоящей из элементов E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , схем S' и S'' , учитывая, что вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элемента E_1 и схемы S' удовлетворяет условию: $P_1 \leq 4\varepsilon + \varepsilon^2$ и $P_0 \leq 6\varepsilon + \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$ (пункт 2.1 доказательства), а вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_2 , E_3 и схемы S'' , не более 2ε при $\varepsilon \in (0; 1/400]$ (пункт 2.2 доказательства). Для вычислений воспользуемся доказательством леммы 4, при условии, что два входа элемента E_4 соединены с выходом элемента E_1 . Это значит, что если в подсхеме, состоящей из элемента E_1 и схемы S' , произошла ошибка, то эта ошибка проходит на два входа элемента E_4 . В результате получим

- при поступлении на входы элемента E_4 набора (000), вероятность ошибки на выходе схемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 1 леммы 4)

$$P_1 \leq 3\varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon + (4\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot 2\varepsilon = 9\varepsilon + 9\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 \leq 10\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$;

- при поступлении на входы элемента E_4 набора (110), вероятность ошибки на выходе схемы удовлетворяет условию (из доказательства случая 3 леммы 4)

$$P_0 \leq \varepsilon^2 + 6\varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \varepsilon^3 + (6\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot 2\varepsilon^2 = 6\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 + 4\varepsilon^4 \leq 7\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

Таким образом, вероятности ошибок на выходе схемы $\tilde{S}$ при $x_n = 1$ удовлетворяют условиям: $P_1 \leq 10\varepsilon$, $P_0 \leq 7\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

Два рассмотренных случая (1 и 2) позволяют сделать вывод, что для схемы $\tilde{S}$ на соответствующих входных наборах переменных вероятности ошибок на выходе удовлетворяют условиям: $P_1 \leq 10\varepsilon$, $P_0 \leq 10\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

Повысим надежность схемы $\tilde{S}$ с помощью схемы $\varphi(\tilde{S})$. Для построения схемы $\varphi(\tilde{S})$ используем схему $\varphi(S)$ из леммы 8, в которой подсхемы S заменим подсхемами $\tilde{S}$. По лемме 8 вероятности ошибок на выходе схемы $\varphi(\tilde{S})$ удовлетворяют условиям:

$$P_1(\varphi(\tilde{S})) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + P_1(\tilde{S}))^3, \quad P_0(\varphi(\tilde{S})) \leq (4\varepsilon + 6P_0(\tilde{S}))^3.$$

Поскольку $P_1(\tilde{S}), P_0(\tilde{S}) \leq 10\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$, то

$$P_1(\varphi(\tilde{S})) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + 10\varepsilon)^3 = 3\varepsilon + 6(11)^3\varepsilon^3 = 3\varepsilon + 7986\varepsilon^3 \leq 3\varepsilon + 20\varepsilon^2 \leq 3.1\varepsilon,$$

$$P_0(\varphi(\tilde{S})) \leq (4\varepsilon + 60\varepsilon)^3 = (64)^3\varepsilon^3 = 262144\varepsilon^3 \leq 2\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

Применив еще раз лемму 8, осуществим следующий шаг итерации: по схеме $\varphi(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^2(\tilde{S})$, реализующую функцию f , вероятности ошибок на выходе которой удовлетворяют условиям:

$$P_1(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + P_1(\varphi(\tilde{S})))^3, \quad P_0(\varphi^2(\tilde{S})) \leq (4\varepsilon + 6P_0(\varphi(\tilde{S})))^3.$$

Поскольку $P_1(\varphi(\tilde{S})) \leq 3.1\varepsilon$, $P_0(\varphi(\tilde{S})) \leq 2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$, то

$$P_1(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + 3.1\varepsilon)^3 = 3\varepsilon + 6(4.1)^3\varepsilon^3 \leq 3\varepsilon + 414\varepsilon^3 \leq 3\varepsilon + 2\varepsilon^2,$$

$$P_0(\varphi^2(\tilde{S})) \leq (4\varepsilon + 6 \cdot 2\varepsilon)^3 = (16)^3\varepsilon^3 \leq 4096\varepsilon^3 \leq 11\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$.

Третий шаг итерации позволяет построить схему $\varphi^3(\tilde{S})$, вероятности ошибок на выходе которой удовлетворяют условиям

$$P_1(\varphi^3(\tilde{S})) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + P_1(\varphi^2(\tilde{S})))^3, \quad P_0(\varphi^3(\tilde{S})) \leq (4\varepsilon + 6P_0(\varphi^2(\tilde{S})))^3.$$

Поскольку $P_1(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 3\varepsilon + 2\varepsilon^2$, $P_0(\varphi^2(\tilde{S})) \leq 11\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0; 1/400]$, то

$$P_1(\varphi^3(\tilde{S})) \leq 3\varepsilon + 6(\varepsilon + 3\varepsilon + 2\varepsilon^2)^3 = 3\varepsilon + 6(4\varepsilon + 2\varepsilon^2)^3 \leq 3\varepsilon + 386\varepsilon^3 \leq 3\varepsilon + \varepsilon^2,$$

$$P_0(\varphi^3(\tilde{S})) \leq (4\varepsilon + 6 \cdot 11\varepsilon^2)^3 = (4\varepsilon + 66\varepsilon^2)^3 \leq 75\varepsilon^3 \leq \varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$. Схема $\varphi^3(\tilde{S})$ искомая, так как

$$P(\varphi^3(\tilde{S})) \leq \max\{3\varepsilon + \varepsilon^2, \varepsilon^2\} = 3\varepsilon + \varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/400]$, т.е. $C = \varphi^3(\tilde{S})$. Теорема 1 доказана.

Нижние оценки ненадежности схем. В теореме 2 содержится утверждение о нижней оценке ненадежности схем.

Напомним, что $K(n)$ – это множество булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вида $f(\tilde{x}) = x_i^a$ (где $i = 1, 2, \dots, n, a \in \{0; 1\}$) и константы 0 и 1.

Очевидно, что функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно реализовать абсолютно надежно, а функции $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ – с ненадежностью ε (используя один инвертор на каждую из функций $x_1, x_2, \dots, x_n$). Константы 0 и 1 можно реализовать с ненадежностью, асимптотически равной ε^3 при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. пример 1).

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим вспомогательную лемму 9.

ЛЕММА 9 [2]. Пусть f – произвольная булева функция, отличная от константы, и S – любая схема ее реализующая. Пусть подсхема B схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию f' с ненадежностью $P(B) \leq 1/2$. Обозначим p^1 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 0$. Аналогично p^0 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 1$.

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют условиям

$$P_1(S, \tilde{a}) \geq p^1, \quad \text{если } f(\tilde{a}) = 0, \quad P_0(S, \tilde{a}) \geq p^0, \quad \text{если } f(\tilde{a}) = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [2]. Из леммы 9 следует, что $P(S) \geq \max\{p^0, p^1\}$.

ПРИМЕР 1. Константы 0 и 1 можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной ε^3 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Моделируя формулу $\bar{x} \& x \& x$, построим схему S_1 из двух элементов, реализующую константу 0. Нетрудно проверить, что $P(S_1) \leq 2\varepsilon$. Возьмем три экземпляра схемы S_1 и соединим их выходы с входами конъюнктора. Ненадежность построенной схемы $S_1^{(1)}$ (случай 1 леммы 1) удовлетворяет неравенству

$$P(S_1^{(1)}) \leq \varepsilon^3 + (6\varepsilon)\varepsilon^2 + (12\varepsilon^2)\varepsilon + 8\varepsilon^3 = 27\varepsilon^3.$$

Аналогично (взяв три экземпляра схемы $S_1^{(1)}$ и конъюнктор) построим схему $S_1^{(2)}$, для которой (случай 1 леммы 1)

$$P(S_1^{(2)}) \leq \varepsilon^3 + 3 \cdot 27\varepsilon^5 + 3 \cdot 27^2\varepsilon^7 + 27^3\varepsilon^9 \leq \varepsilon^3 + 81\varepsilon^5 + 2187\varepsilon^7 + 19683\varepsilon^9 \leq \varepsilon^3 + \varepsilon^4$$

при $\varepsilon \in (0; 1/100]$.

С другой стороны, пусть S – произвольная схема, реализующая константу 0. Выделим в ней выходной элемент E . Каким бы он ни был в рассматриваемом базисе (см. леммы 2, 5, 7), для него $p^1 \geq \varepsilon^3$. Следовательно, $P(S) \geq \varepsilon^3$. Поэтому схема $S_1^{(2)}$ является асимптотически оптимальной и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной ε^3 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заменив в предыдущих рассуждениях конъюнкторы на дизъюнкторы, получим тот же результат для константы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $f(\tilde{x})$ – булева функция, удовлетворяющая условиям теоремы, а S – произвольная схема, ее реализующая. Поскольку $f(\tilde{x}) \notin K(n)$, схема S содержит хотя бы один элемент. Обозначим E_1 – элемент, содержащий выход схемы S . Возможны три случая.

1. Выходной элемент E_1 является инвертором. Так как по условию теоремы схема S реализует функцию $f(\tilde{x}) \notin K(n)$, то схема S содержит, кроме элемента E_1 , по крайней мере, еще один элемент E_2 . Возможно несколько случаев.

1.1. Вход инвертора E_1 соединен с выходом конъюнктора E_2 . По лемме 2 (случай 4) и лемме 7 вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1 и E_2 , при поступлении на ее входы набора (111) равна

$$P_1 = \varepsilon + (3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3)(1 - 2\varepsilon) = 4\varepsilon - 9\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 = p^1.$$

При $\varepsilon \leq 1/10$ ненадежность рассматриваемой подсхемы не больше $1/2$. Применима лемма 9, поэтому (см. замечание 1)

$$P(S) \geq 4\varepsilon - 9\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4.$$

Поскольку неравенство

$$4\varepsilon - 9\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$$

верно при $\varepsilon \in (0; 1/10]$, утверждение теоремы справедливо.

1.2. Вход инвертора E_1 соединен с выходом дизъюнктора E_2 . Этот случай рассматривается аналогично п. 1.1.

1.3. Вход инвертора E_1 соединен с выходом другого инвертора E_2 . Так как по условию теоремы схема S реализует функцию $f \notin K(n)$, схема S содержит кроме элементов E_1 и E_2 , по крайней мере, еще один элемент E_3 . Возможно несколько случаев.

1.3.1. Элемент E_3 является конъюнктором. Используя пункт 1.1 доказательства и лемму 7, найдем вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1 , E_2 и E_3 при поступлении на ее входы набора (111):

$$P_0 = \varepsilon + (4\varepsilon - 9\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4)(1 - 2\varepsilon) = 5\varepsilon - 17\varepsilon^2 + 25\varepsilon^3 - 16\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5.$$

Следовательно,

$$p^0 = 5\varepsilon - 17\varepsilon^2 + 25\varepsilon^3 - 16\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5.$$

При $\varepsilon \in (0; 1/10]$ ненадежность рассматриваемой подсхемы не больше $1/2$. Применима лемма 9, поэтому (см. замечание 1)

$$P(S) \geq 5\varepsilon - 17\varepsilon^2 + 25\varepsilon^3 - 16\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5.$$

Поскольку неравенство

$$5\varepsilon - 17\varepsilon^2 + 25\varepsilon^3 - 16\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5 \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$$

верно при $\varepsilon \in (0; 1/10]$, утверждение теоремы справедливо.

1.3.2. Элемент E_3 является дизъюнктором. Этот случай рассматривается аналогично п. 1.3.1.

1.3.3. Элемент E_3 является инвертором. По лемме 7 вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1 , E_2 и E_3 при поступлении на ее входы значения (1), равна

$$P_1 = \varepsilon + (2\varepsilon - 2\varepsilon^2)(1 - 2\varepsilon) = 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 = p^1.$$

При $\varepsilon \in (0; 1/10]$ ненадежность рассматриваемой подсхемы не больше $1/2$. Применима лемма 9, поэтому (см. замечание 1)

$$P(S) \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/10]$, т.е. утверждение теоремы справедливо.

2. Выходной элемент E_1 является конъюнктором. По лемме 2 (случай 4) для него вероятность ошибки на выходе при поступлении на входы набора (111) равна

$$P_0 = 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 = p^0.$$

При $\varepsilon \in (0; 1/10]$ применима лемма 9, поэтому (см. замечание 1)

$$P(S) \geq 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \geq 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2.$$

3. Выходной элемент E_1 является дизъюнктором. По лемме 5 (случай 1) для него вероятность ошибки на выходе при поступлении на входы набора (000) равна

$$P_1 = 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 = p^1.$$

При $\varepsilon \in (0; 1/10]$ применима лемма 9, поэтому (см. замечание 1)

$$P(S) \geq 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \geq 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2.$$

Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 следует, что любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, $f \notin K(n)$, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Число функций в классе $K(n)$ равно $2n+2$ и мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

Сложность асимптотически оптимальных по надежности схем. Теорема 3 содержит утверждение о сложности асимптотически оптимальных по надежности схем. Для доказательства теоремы 3 используем лемму 10.

ЛЕММА 10 [2; теорема 4.1.2]. Пусть B – произвольный полный базис, k – сложность минимальной схемы S_h , реализующей функцию штрих Шеффера $x_1 \mid x_2$ с ненадежностью $P(S_h) \leq \mu$. Тогда при $\mu \in (0; 1/600k]$ произвольную булеву функцию от n переменных $f(\tilde{x})$ можно реализовать схемой S такой, что $L(S) \lesssim 56 \cdot k \cdot 2^n/n$ и $P(S) \leq 7k\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Построим схему S_h из двух элементов, реализующую функцию $x_1 \mid x_2$, моделируя формулу $x_1 \& x_2 \& x_2$. Очевидно, что вероятность ошибки на выходе схемы S_h не превосходит 4ε , поэтому $\mu \in (0; 4\varepsilon]$, $k = 2$. Применяя лемму 10, из блоков S_h построим такую схему S , для которой $L(S) \lesssim 112 \cdot 2^n/n$ и $P(S) \leq 56\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/2400]$.

Используя лемму 8, из блоков S построим схему $\varphi(S)$, для которой

$$L(\varphi(S)) \lesssim 112 \cdot 9 \cdot \frac{2^n}{n} + 3 \lesssim 1008 \cdot \frac{2^n}{n},$$

$$P(\varphi(S)) \leq \max\{3\varepsilon + 6 \cdot (\varepsilon + 56\varepsilon)^3; (4\varepsilon + 6 \cdot 56\varepsilon)^3\} = \max\{3\varepsilon + 6 \cdot 57^3 \cdot \varepsilon^3; 340^3 \varepsilon^3\} \\ \leq \max\{3\varepsilon + \varepsilon^2; 32\varepsilon^2\} \leq 3\varepsilon + \varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/1\,200\,000]$.

Схема $\varphi(S)$ является искомой, т.е. $T = \varphi(S)$. Теорема 3 доказана.

Таким образом, доказано, что в базисе $\{x_1 \& x_2 \& x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах функциональных элементов все булевы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) равной: ε^3 – для констант 0 и 1, ε – для функций $\bar{x}_i$, 3ε – для функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0, 1, \bar{x}_i, x_i$, где ε – вероятность ошибки на каждом входе функционального элемента, $i = 1, \dots, n$. Функции x_i , $i = 1, \dots, n$, можно реализовать абсолютно надежно. Сложность оптимальных по надежности схем по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Нейман, “Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент”, *Автоматы*, ИЛ, М., 1956, 68–139.
- [2] М. А. Алехина, *Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем*, Монография, ИИЦ ПГУ, Пенза, 2006.
- [3] В. В. Чугунова, *Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на входах элементов*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Пенза, 2007.
- [4] М. А. Алехина, “О надежности схем в базисе $\{\bigvee_{i=1}^k x_i, \bigwedge_{i=1}^k x_i, \bar{x}\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов”, *Изв. вузов. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки*, 2007, № 1, 18–27.

В. В. Чугунова

Пензенский государственный университет

E-mail: burchug@sura.ru

Поступило

04.12.2006