Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Гогян, О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по подсистемам системы Хаара и о ω -квази-гриди базисах, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 18–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:28:32

УДК 517.51

О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по подсистемам системы Хаара и о ω -квази-гриди базисах

С. Гогян

В настоящей работе в $L^1(0, 1)$ описаны все квази-гриды подсистемы системы Хаара. Также изучается вопрос о том, как нужно перенормировать систему Хаара, чтобы она стала квази-гриды базисом.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – базис в банаховом пространстве X , и пусть $\inf_{k \in \mathcal{N}} \|\psi_k\|_X > 0$. Для каждого элемента $f \in X$ имеем

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f, \Psi) \psi_k, \quad (1)$$

где $c_k(f, \Psi) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Положим $\Lambda_0 = \emptyset$ и для каждого $m \geq 1$ индуктивным методом построим множества $\Lambda_m \subset \mathcal{N}$, удовлетворяющие условиям

$$\#\Lambda_m = m, \quad \Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m, \quad \min_{k \in \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)| \geq \max_{k \notin \Lambda_m} |c_k(f, \Psi)|. \quad (2)$$

Множества Λ_m могут определяться неоднозначно. Через $D(f)$ обозначим множество всех таких последовательностей $\{\Lambda_m\}$. Для любого $\Lambda = \{\Lambda_m\} \in D(f)$ положим

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi) = G_m(f, \Psi, \Lambda) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Полином $G_m(f, \Psi)$ известен как m -членное жадное приближение элемента f по системе Ψ , а этот метод приближения – жадным алгоритмом (см., например, [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Базис $\Psi = \{\psi_k\}$ называется *квази-гриды базисом* в X , если для любого элемента $f \in X$ существует $\Lambda \in D(f)$, для которого выполняется условие

$$\|G_m(f, \Psi, \Lambda)\|_X \leq C \cdot \|f\|_X \quad (3)$$

при некотором C , независимом от f и m .

В работе [2] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА А. *Базис Ψ является квази-гриди базисом в X тогда и только тогда, когда для любых $f \in X$ и $\Lambda \in D(f)$ имеет место*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f - G_m(f, \Psi, \Lambda)\|_X = 0.$$

Очевидно, что нормированный безусловный базис является квази-гриди базисом. В работе [1] показано, что если Ψ является квази-гриди базисом, то условие (3) выполняется для всех $\Lambda \in D(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подсистему $F \subset \Psi$ назовем *квази-гриди системой* в X , если F является квази-гриди базисом в $\text{span}\{F\}$.

В работах [3] и [4] был рассмотрен алгоритм, где условие (2) было заменено более слабым условием. Для любых $0 < t \leq 1$ и $f \in X$ обозначим через Λ_m^t множество m натуральных чисел, удовлетворяющее условию

$$\min_{k \in \Lambda_m^t} \|c_k(f, \Psi)\|_X \geq t \max_{k \notin \Lambda_m^t} \|c_k(f, \Psi)\|_X,$$

и положим

$$G_m^t(f) = G_m^t(f, \Psi) = \sum_{k \in \Lambda_m^t} c_k(f, \Psi) \psi_k.$$

Заметим, что при $t = 1$ получается жадный алгоритм. В работе [4] (см. также [5]) было доказано, что для квази-гриди базисов последовательность $\{G_m^t(f)\}$ сходится к f .

ТЕОРЕМА В. *Пусть Ψ – квази-гриди базис в банаховом пространстве X . Тогда для любых $0 < t \leq 1$ и $f \in X$ имеет место*

$$G_m^t(f, \Psi) \rightarrow f \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty.$$

ТЕОРЕМА В'. *Пусть Ψ – квази-гриди базис в банаховом пространстве X . Тогда для фиксированного $0 < t \leq 1$ и для любых $m \in \mathcal{N}$ и $f \in X$ имеет место следующее неравенство:*

$$\|G_m^t(f, \Psi)\|_X \leq C(t) \|f\|_X.$$

Заметим, что $G_m(f)$ и $G_m^t(f)$ зависят от норм элементов базиса Ψ . В работе [4] было доказано, что любой базис может быть перенормирован таким образом, чтобы он стал квази-гриди базисом, а именно, доказана

ТЕОРЕМА С. *Пусть Ψ – базис в банаховом пространстве X . Тогда система $\{(2^n / \|\psi_n\|_X) \psi_n\}$ является квази-гриди базисом в X .*

В теории жадных алгоритмов наибольший интерес представляет случай, когда базис Ψ нормирован. Это соответствует тому, что $G_m(f)$ состоит из m членов из разложения (1) с наибольшими значениями $\|c_n(f, \Psi) \psi_n\|_X$.

Пусть Ψ – базис, но не квази-гриди базис. Возникает вопрос, можно ли выбрать алгоритм, близкий к жадному, который сходился бы для всех $f \in X$? В поисках ответа на данный вопрос рассмотрим следующий алгоритм.

Пусть $\omega = \{\omega_n\}$ – убывающая последовательность положительных чисел. Обозначим

$$G_m^{(\omega)}(f) = G_m^{(\omega)}(f, \Psi) = G_m\left(f, \left\{ \frac{\psi_n}{\|\psi_n\| \omega_n} \right\}\right). \quad (4)$$

Согласно определению $G_m^{(\omega)}(f)$ состоит из m членов разложения (1) с наибольшими значениями $\omega_n \cdot \|\psi_n c_n(f, \Psi)\|_X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что базис $\{\psi_n\}$ является ω -квази-гриди базисом в банаховом пространстве X , если система $\{\psi_n/\|\psi_n\|\omega_n\}$ является квази-гриди базисом в X .

Теорема C может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА C'. Любой базис Ψ является ω -квази-гриди базисом при $\omega_n = 2^{-n}$.

2. Основные результаты. В настоящей работе мы рассмотрим жадный алгоритм в $L^1(0, 1)$ по системе Хаара. Напомним ее определение. Поскольку значения функций в точках разрыва для нас несущественны, изменим эти значения для облегчения определения. Положим $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = [0, 1]$ и для любого $i = 0, 1, 2, \dots$ и $1 \leq k \leq 2^i$ обозначим

$$\Delta_{2^i+k} = \Delta_i^{(k)} = \left[\frac{k-1}{2^i}, \frac{k}{2^i} \right). \quad (5)$$

Легко проверить, что $\Delta_n = \Delta_{2n-1} \cup \Delta_{2n}$ и $m(\Delta_{2n-1}) = m(\Delta_{2n}) = m(\Delta_n)/2$ для всех $n > 1$, где $m(A)$ есть лебегова мера множества A . Далее положим $h_1 = h_0^{(0)} \equiv 1$, и для всех $n = 2^i + k$; $k = 1, 2, \dots, 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ определим

$$h_n(t) = h_i^{(k)}(t) = h_{\Delta_n}(t) = \begin{cases} 2^i & \text{при } t \in \Delta_{2n-1}, \\ -2^i & \text{при } t \in \Delta_{2n}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\int_0^1 h_n(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 |h_n(t)| dt = 1. \quad (6)$$

Система $\mathcal{H} = \{h_n\}$ есть нормированная в $L^1(0, 1)$ система Хаара. Множество $P_0 = \{h_0^{(0)}, h_0^{(1)}\}$ называется *нулевой пачкой*, а множество $P_i = \{h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, \dots, h_i^{(2^i)}\}$ называется *i -й пачкой* системы Хаара. Коэффициенты $c_n(f)$ определяются по следующим формулам:

$$c_1(f) = \int_0^1 f(t) dt, \quad c_n(f) = \int_{\Delta_{2n-1}} f(t) dt - \int_{\Delta_{2n}} f(t) dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (7)$$

Об эффективности жадного алгоритма в $L^p(0, 1)$ при $1 < p < +\infty$ по системе Хаара мы отсылаем читателя к работе [3]. Здесь только отметим, что в $L^p(0, 1)$ при $1 < p < +\infty$ система Хаара является безусловным базисом; следовательно, для любой функции $f \in L^p(0, 1)$ жадный алгоритм по нормированной в $L^p(0, 1)$ системе Хаара сходится к f . Но ситуация другая в $L^1(0, 1)$. В работе [6] было отмечено, что система Хаара не является квази-гриди базисом в $L^1(0, 1)$. Аналогичный результат для общей системы Хаара был получен в работе [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Скажем, что подсистема Хаара $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ содержит цепь длиной H , если существуют числа $k_1, k_2, \dots, k_H \in \mathcal{M}$ такие, что

$$\Delta_{k_1} \supset \Delta_{k_2} \supset \dots \supset \Delta_{k_H}, \quad |\Delta_{k_i}| = 2|\Delta_{k_{i+1}}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, H-1.$$

Через $H(\mathcal{M})$ обозначим наибольшее натуральное число, для которого в $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ содержится цепь длиной $H(\mathcal{M})$. Если в $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ содержится цепь любой длины, то положим $H(\mathcal{M}) = \infty$.

В [7] были описаны подсистемы системы Хаара, которые являются квази-гриди системами в $L^1(0, 1)$.

ТЕОРЕМА D. Пусть $\{m_i\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда и только тогда $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{m_i}$ является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$, когда при некотором натуральном H в системе $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{m_i}$ не содержится цепь длиной H .

В настоящей работе описаны все последовательности $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ для которых подсистема системы Хаара $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Тогда и только тогда система $\{h_i\}_{i \in \mathcal{M}}$ является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$, когда $H(\mathcal{M}) < \infty$.

Далее в настоящей работе описаны все последовательности $\omega = \{\omega_n\}$, для которых система Хаара является ω -квази-гриди базисом в $L^1(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 2. Система Хаара является ω -квази-гриди базисом в $L^1(0, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$V(\omega) = \sup_{m > n} \left(\frac{m}{n} : \frac{\omega_m}{\omega_n} > \frac{1}{2} \right) < +\infty. \quad (8)$$

СЛЕДСТВИЕ. Для любого числа $\alpha > 0$ система Хаара является ω -квази-гриди базисом в $L^1(0, 1)$ при $\omega_n = n^{-\alpha}$ и не является им при $\omega_n = (\log_2 n)^{-\alpha}$.

В работе также доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Существует линейный оператор $T: L^1(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1)$ такой, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ выполняются следующие условия:

- 1) $m(x : f(x) > \lambda) = m(x : Tf(x) > \lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$,
- 2) жадный алгоритм функции Tf в $L^1(0, 1)$ по системе Хаара сходится к Tf .

3. Определения и вспомогательные утверждения. Через $\|f\|_{\Delta}$ обозначим L^1 -норму функции f на интервале Δ , т.е.

$$\|f\|_{\Delta} = \int_{\Delta} |f(t)| dt \quad (9)$$

и используем запись $\|f\|$ в случае $\Delta = [0, 1]$. Обозначим

$$c_k(f) = c_k(f, \mathcal{H}), \quad \text{sp}(f) = \{k \in \mathcal{N}, c_k(f) \neq 0\}.$$

Напомним, что система Хаара имеет следующее свойство монотонности: из $m > n$ следует, что $\|S_m(f)\| \geq \|S_n(f)\|$, где

$$S_m(f) = \sum_{i=1}^m c_i(f) h_i. \quad (10)$$

Из (7) непосредственно следует, что

$$\|f\|_{\Delta_k} \geq |c_n(f)| \quad \text{при} \quad \Delta_n \subseteq \Delta_k.$$

ЛЕММА 1. Пусть функция $f \in L^1(0, 1)$ такова, что $\max\{|c_i(f)| : i \in \mathcal{N}\} \leq 1$. Тогда для любого натурального числа n имеет место следующее неравенство:

$$\|S_{n-1}(f)\|_{\Delta_n} \leq 1. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – номер пачки функции h_n . Тогда $|\Delta_n| = 2^{-k}$. Функция $S_{n-1}(f)$ постоянна на интервале Δ_n , а ее абсолютное значение на этом интервале не превосходит $1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть функции $f, g \in L^1(0, 1)$ таковы, что $\max\{|c_i(f)| : i \in \mathcal{N}\} \leq 1$ и функция g постоянна на интервале Δ_m . Тогда

$$\|g\|_{\Delta_m} - \|f + g\|_{\Delta_m} \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из постоянности g на Δ_m следует, что $\|g\|_{\Delta_m} = \|S_{m-1}(g)\|_{\Delta_m}$. Следовательно, согласно лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \|g\|_{\Delta_m} - \|f + g\|_{\Delta_m} &= \|S_{m-1}(g)\|_{\Delta_m} - \|f + g\|_{\Delta_m} \\ &\leq \|S_{m-1}(g)\|_{\Delta_m} - \|S_{m-1}(f + g)\|_{\Delta_m} \leq \|S_{m-1}(f)\|_{\Delta_m} \leq 1. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ и для любого интервала $\Delta = [a, b)$ определим операторы

$$\begin{aligned} L_1(f, \Delta)(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{при } x \notin \left[\frac{a+b}{2}, b\right), \\ f\left(x - \frac{b-a}{2}\right) & \text{при } x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right), \end{cases} \\ L_2(f, \Delta)(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{при } x \notin \left[a, \frac{a+b}{2}\right), \\ f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) & \text{при } x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Фактически, оператор L_1 “копирует” функцию из левой половины интервала Δ на правую половину, а оператор L_2 наоборот. Для любых $f, g \in L^1(0, 1)$ с $\|f + g\| > 0$ и для любого интервала Δ положим

$$L((f, g), \Delta) = \begin{cases} (L_1(f, \Delta), L_1(g, \Delta)), & \text{если } \|L_1(f + g, \Delta)\| > 0 \\ \text{и } \frac{\|f\|}{\|f + g\|} \leq \frac{\|L_1(f, \Delta)\|}{\|L_1(f + g, \Delta)\|}, \\ (L_2(f, \Delta), L_2(g, \Delta)) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будем писать $[a, b) + r = [a + r, b + r)$.

ЛЕММА 3. Пусть $f, g \in L^1(0, 1)$ и $n \geq 2$ таковы, что

- i) $c_n(f) = c_n(g) = 0$;
- ii) $\text{sp}(f) \cap \text{sp}(g) = \emptyset$;
- iii) $\|f\| > 0, \|f + g\| > 0$.

Пусть $(f', g') = L(f, g, \Delta_n)$, и пусть

$$j = \begin{cases} 2n - 1, & \text{если } f' = L_2(f, \Delta_n), \ g' = L_2(g, \Delta_n), \\ 2n, & \text{если } f' = L_1(f, \Delta_n), \ g' = L_1(g, \Delta_n). \end{cases}$$

Тогда

- 1) $c_n(f') = c_n(g') = 0$;
- 2) если $\Delta_k \not\subseteq \Delta_j$, то $c_{\Delta_k}(f') = c_{\Delta_k}(f)$ и $c_{\Delta_k}(g') = c_{\Delta_k}(g)$;
- 3) если $\Delta_k \subseteq \Delta_j$, то $c_{\Delta_k}(f') = c_{\Delta_k \pm m(\Delta_j)}(f)$ и $c_{\Delta_k}(g') = c_{\Delta_k \pm m(\Delta_j)}(g)$, где знак “+” соответствует случаю $j = 2n - 1$, а знак “−” соответствует случаю $j = 2n$;
- 4) $\text{sp}(f') \cap \text{sp}(g') = 0$;
- 5) $\|f'\| > 0, \|f' + g'\| > 0$;
- 6) $\|f\|/\|f + g\| \leq \|f'\|/\|f' + g'\|$;
- 7) $H(\text{sp}(f' + g')) \leq H(\text{sp}(f + g))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1)–6) данной леммы были доказаны в работе [8] (см. лемму 3). Докажем утверждение пункта 7). Пусть $\Delta_{\alpha_1} \supset \Delta_{\alpha_2} \supset \dots \supset \Delta_{\alpha_r}$ является цепью в $\{h_i\}_{i \in \text{sp}(f' + g')}$. Покажем, что в $\{h_i\}_{i \in \text{sp}(f + g)}$ содержится цепь длиной r . Имеем

$$c_{\alpha_1}(f' + g') \neq 0, \quad c_{\alpha_2}(f' + g') \neq 0, \quad \dots, \quad c_{\alpha_r}(f' + g') \neq 0.$$

Согласно утверждению пункта 1) имеем $c_n(f' + g') \neq 0$, поэтому возможны два случая.

Случай 1: $\Delta_{\alpha_r} \not\subseteq \Delta_j$. Тогда $\Delta_{\alpha_i} \not\subseteq \Delta_j$ для всех $1 \leq i \leq r$. С учетом утверждения пункта 2) получим, что

$$c_{\alpha_i}(f + g) = c_{\alpha_i}(f' + g') \neq 0 \quad \text{для всех } 1 \leq i \leq r.$$

Следовательно, $\Delta_{\alpha_1} \supset \Delta_{\alpha_2} \supset \dots \supset \Delta_{\alpha_r}$ является цепью в $\{h_i\}_{i \in \text{sp}(f + g)}$.

Случай 2: $\Delta_{\alpha_1} \subseteq \Delta_j$. Определим числа $\tilde{\alpha}_i, 1 \leq i \leq r$ из условий

$$\Delta_{\tilde{\alpha}_i} = \Delta_{\alpha_i} \pm m(\Delta_j),$$

где знак “+” соответствует случаю $j = 2n - 1$, а знак “−” соответствует случаю $j = 2n$. Из утверждения пункта 3) следует, что

$$c_{\tilde{\alpha}_i}(f + g) = c_{\alpha_i}(f' + g') \neq 0 \quad \text{для всех } 1 \leq i \leq r,$$

и поэтому $\Delta_{\tilde{\alpha}_1} \supset \Delta_{\tilde{\alpha}_2} \supset \dots \supset \Delta_{\tilde{\alpha}_r}$ является цепью в $\{h_i\}_{i \in \text{sp}(f + g)}$. Лемма 4 доказана.

4. Подсистема Хаара как квази-гриды система. Пусть $\mathcal{M}$ – последовательность натуральных чисел. Скажем, что интервал $\Delta_n, n \notin \mathcal{M}$, имеет k -й уровень в $\mathcal{M}$, если

$$\#\{i > 1 : i \notin \mathcal{M}, \Delta_n \subseteq \Delta_i\} = k.$$

Заметим, что если $H(\mathcal{M}) < \infty$, то

- 1) любой интервал i -го уровня является объединением не более чем $2^{H(\mathcal{M})+1}$ интервалов $(i + 1)$ -го уровня;
- 2) все интервалы i -го уровня не пересекаются, а их объединение дает интервал $[0, 1)$.

ЛЕММА 4. Пусть полином p и функция $q \in L^1(0, 1)$ таковы, что

- 1) $\text{sp}(p) \cap \text{sp}(q) = \emptyset$,
- 2) $H(\text{sp}(p+q)) < \infty$,
- 3) $1 \notin \text{sp}(p+q)$, $2 \notin \text{sp}(p+q)$,
- 4) $|c_i(p)| \geq |c_j(q)|$ для всех $i \in \text{sp}(p)$ и $j \in \text{sp}(q)$.

Тогда

$$\frac{\|p\|}{\|p+q\|} \leq 2^{H(\text{sp}(p+q))+2}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма очевидна в случае $q = 0$. Рассмотрим случай $\|q\| > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\max_{j \in \mathcal{N}} |c_j(q)| = 1$. Для краткости положим $H = H(\text{sp}(p+q))$.

Интервалы i -го уровня в $\text{sp}(p+q)$ обозначим через $\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}, \dots, \delta_i^{(d_i)}$. Заметим, что из условия 3) следует, что $\delta_1^{(1)} = [0, 1)$ и $d_1 = 1$. Через k обозначим наименьшее натуральное число, для которого полином p постоянен на всех интервалах $\delta_k^{(j)}$, $1 \leq j \leq d_k$. Определим функции p' и q' следующим образом:

$$(p', q') = L(L(\dots L(L((p, q), \delta_{k-1}^{(1)}), \delta_{k-1}^{(2)}), \dots), \delta_{k-1}^{(d_{k-1})}), \delta_{k-2}^{(1)}, \delta_{k-2}^{(2)}), \dots), \delta_1^{(1)}).$$

Согласно лемме 3 имеем

$$\frac{\|p\|}{\|p+q\|} \leq \frac{\|p'\|}{\|p'+q'\|}, \quad \|p'\| > 0 \quad (13)$$

$$\text{sp}(p') \cap \text{sp}(q') = \emptyset, \quad \{1, 2\} \cap \text{sp}(p'+q') = \emptyset, \quad (14)$$

$$\min\{|c_i(p')| : c_i(p') \neq 0\} \geq 1 \geq \max\{|c_i(q')| : i \in \mathcal{N}\}, \quad (15)$$

$$H(\text{sp}(p'+q')) \leq H(\text{sp}(p+q)). \quad (16)$$

Интервалы i -го уровня (в $\text{sp}(p'+q')$) обозначим через $\tilde{\delta}_i^{(1)}, \tilde{\delta}_i^{(2)}, \dots, \tilde{\delta}_i^{(c_i)}$. Полином p' постоянен на всех интервалах $\tilde{\delta}_k^{(j)}$, $1 \leq j \leq c_k$. Из конструкции построения p' и q' следует, что если на некотором интервале Δ с уровнем $i \leq k$ (в $\text{sp}(p'+q')$) полином p' не постоянен, то $L_1(p', \Delta) = L_2(p', \Delta) = p'$ и $L_1(q', \Delta) = L_2(q', \Delta) = q'$.

Докажем, что для любого интервала $\tilde{\delta}_i^{(s)}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq s \leq c_i$, имеет место

$$\|p'\|_{\tilde{\delta}_i^{(s)}} \leq 2^{H+2} \|p'+q'\|_{\tilde{\delta}_i^{(s)}} + 1, \quad \text{если } p' \text{ постоянна на } \tilde{\delta}_i^{(s)}, \quad (17)$$

$$\|p'\|_{\tilde{\delta}_i^{(s)}} \leq 2^{H+2} \|p'+q'\|_{\tilde{\delta}_i^{(s)}} - 2^{H+1} \quad \text{в противном случае.} \quad (18)$$

Доказательство приведем индукцией по i . Предположим $i = k$. Определим j из условия $\Delta_j = \tilde{\delta}_k^{(s)}$. Имеем, что p' постоянен на Δ_j . С учетом монотонности системы Хаара и леммы 1 получим, что

$$\begin{aligned} \|p'\|_{\Delta_j} &= \|S_{j-1}(p')\|_{\Delta_j} \leq \|S_{j-1}(p'+q')\|_{\Delta_j} + \|S_{j-1}(q')\|_{\Delta_j} \\ &\leq \|p'+q'\|_{\Delta_j} + \|S_{j-1}(q')\|_{\Delta_j} \leq 2^{H+2} \|p'+q'\|_{\Delta_j} + 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Предположим, что (17) и (18) справедливы при некотором $1 < i \leq k$ и докажем их для $i-1$. Пусть $1 \leq s \leq c_{i-1}$. Определим число j из условия $\Delta_j = \tilde{\delta}_{i-1}^{(s)}$. В случае, когда полином p' постоянен на интервале Δ_j , неравенство (17) получается

аналогично случаю $i = k$. Рассмотрим случай, когда p' не постоянен на интервале Δ_j . Поскольку $L_1(p', \Delta_n) = L_2(p', \Delta_n) = p'$ и $L_1(q', \Delta_n) = L_2(q', \Delta_n) = q'$, можно утверждать, что p' не постоянен на Δ_{2j-1} и

$$\|p'\|_{\Delta_{2j-1}} = \frac{\|p'\|_{\Delta_j}}{2}, \quad \|p' + q'\|_{\Delta_{2j-1}} = \frac{\|p' + q'\|_{\Delta_j}}{2}. \quad (20)$$

Из непостоянности p' на Δ_{2j-1} следует, что при некотором α с $\Delta_\alpha \subseteq \Delta_{2j-1}$ имеем $c_\alpha(p') \neq 0$. Принимая во внимание (11), (14) и (15), получим, что

$$\|p' + q'\|_{\Delta_{2j-1}} \geq 1. \quad (21)$$

Интервал Δ_{2j-1} можно представить в виде суммы интервалов i -го уровня, количество которых согласно (16) не превосходит 2^H , т.е.

$$\Delta_{2j-1} = \tilde{\delta}_i^{(\beta_1)} \cup \tilde{\delta}_i^{(\beta_2)} \cup \dots \cup \tilde{\delta}_i^{(\beta_r)}, \quad r \leq 2^H. \quad (22)$$

Для всех интервалов правой части (22) имеет место либо (17), либо (18). Через b обозначим количество интервалов, на которых справедлив (18). Рассмотрим два случая.

Случай 1: $b > 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|p'\|_{\Delta_{2j-1}} &= \sum_{m=1}^r \|p'\|_{\tilde{\delta}_i^{(\beta_m)}} \leq 2^{H+2} \sum_{m=1}^r \|p' + q'\|_{\tilde{\delta}_i^{(\beta_m)}} - b \cdot 2^{H+1} + (r - b) \\ &\leq 2^{H+2} \|p' + q'\|_{\Delta_{2j-1}} - 2^H. \end{aligned}$$

С учетом (20) получим, что

$$\|p'\|_{\Delta_j} \leq 2^{H+2} \|p' + q'\|_{\Delta_j} - 2^{H+1}.$$

Случай 2: $b = 0$. В этом случае p' постоянен на всех интервалах правой части (22). Поэтому согласно лемме 2

$$\|p'\|_{\Delta_{2j-1}} - \|p' + q'\|_{\Delta_{2j-1}} = \sum_{m=1}^r (\|p'\|_{\tilde{\delta}_i^{(\beta_m)}} - \|p' + q'\|_{\tilde{\delta}_i^{(\beta_m)}}) \leq \sum_{m=1}^r 1 = r \leq 2^H. \quad (23)$$

Комбинируя неравенства (21) и (23), получим

$$\begin{aligned} \|p'\|_{\Delta_{2j-1}} - 2^{H+2} \|p' + q'\|_{\Delta_{2j-1}} &= \|p'\|_{\Delta_{2j-1}} - \|p' + q'\|_{\Delta_{2j-1}} - (2^{H+2} - 1) \|p' + q'\|_{\Delta_{2j-1}} \\ &\leq 2^H + 1 - 2^{H+2} \leq -2^H. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (20), получим, что

$$\|p'\|_{\Delta_j} \leq 2^{H+2} \|p' + q'\|_{\Delta_j} - 2^{H+1}.$$

Предположение индукции доказано.

Из (14) следует, что $\tilde{\delta}_1^{(1)} = [0, 1)$, а из (13) следует, что p' не постоянен на $[0, 1)$. Следовательно,

$$\frac{\|p\|}{\|p + q\|} \leq \frac{\|p'\|}{\|p' + q'\|} \leq 2^{H+2}.$$

Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность. Пусть $H(\mathcal{M}) < \infty$. Из удаления системы конечного числа элементов свойство квази-гриди базисности не изменяется. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что $\{1, 2\} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Пусть $f \in \overline{\text{span}\{h_n\}_{n \in \mathcal{M}}}$, $\Lambda \in D(f)$ и $m \in \mathcal{N}$. Полином $G_m(f)$ и функция $f - G_m(f)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и поэтому

$$\frac{\|G_m(f)\|}{\|f\|} \leq 2^{H(\mathcal{M})+2}.$$

Необходимость. Доказательство необходимости условия $H(\mathcal{M}) < \infty$ ничем не отличается от доказательства отношения $1) \Rightarrow 4)$ теоремы 1 из [7].

5. Система Хаара как ω -квази-гриди базис. Пусть $\mathcal{J}_E$ – характеристическая функция множества E , а $\{r_n\}$ – система Радемахера

$$r_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} h_n^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $\alpha = \{\alpha_n\}$ – возрастающая последовательность целых чисел и $\alpha_1 = 0$. Для $i \geq 0$, $1 \leq j \leq 2^i$ положим $\alpha_i^{(j)} = \alpha_{2^i+j}$. Определим линейный оператор $T = T_\alpha$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Th_1 &= h_1, & Th_2 &= r_{\alpha_2}, \\ Th_{i+1}^{(2j-1)} &= 2 \cdot \mathcal{J}_{\{Th_i^{(j)} > 0\}} \cdot r_{i+1+\alpha_{i+1}^{(2j-1)}}, & Th_{i+1}^{(2j)} &= 2 \cdot \mathcal{J}_{\{Th_i^{(j)} < 0\}} \cdot r_{i+1+\alpha_{i+1}^{(2j)}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что при $\{\alpha_i\} = \{0\}$ имеем $\{Th_i\} = \{h_i\}$. Положим $\tilde{\Delta}_i^{(j)} = \text{supp}(Th_i^{(j)})$. Индукцию по i легко проверить, что

$$\begin{aligned} m(\tilde{\Delta}_i^{(j)}) &= \frac{1}{2^i}, & \tilde{\Delta}_i^{(j)} &= \tilde{\Delta}_{i+1}^{(2j-1)} \cup \tilde{\Delta}_{i+1}^{(2j)}, \\ Th_i^{(j)}(t) &= \begin{cases} 2^i, & \text{если } t \in \tilde{\Delta}_{i+1}^{(2j-1)}, \\ -2^i, & \text{если } t \in \tilde{\Delta}_{i+1}^{(2j)}, \\ 0 & \text{для остальных } t, \end{cases} \\ Th_i^{(j)} &= \frac{1}{2^{\alpha_i^{(j)}}} \sum_{k=1}^{2^{\alpha_i^{(j)}}} h_{i+\alpha_i^{(j)}}^{(s_{i,j,k})} & \text{для некоторых } s_{i,j,k}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$m(x : f(x) > \lambda) = m(x : Tf(x) > \lambda) \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{R},$$

и, следовательно,

$$\|Tf\| = \|f\|. \quad (25)$$

ЛЕММА 5. Пусть $\delta_1 = \Delta_{i_1+\alpha_{i_1}}^{(s_{i_1,j_1,k_1})}$ и $\delta_2 = \Delta_{i_2+\alpha_{i_2}}^{(s_{i_2,j_2,k_2})}$ для некоторых $i_1, i_2 \geq 0$,

$1 \leq j_1 \leq 2^{i_1}$, $1 \leq j_2 \leq 2^{i_2}$, $1 \leq k_1 \leq 2^{\alpha_{i_1}^{(j_1)}}$, $1 \leq k_2 \leq 2^{\alpha_{i_2}^{(j_2)}}$. Тогда

$$1) \quad \delta_1 \subset \delta_2 \Rightarrow \Delta_{i_1}^{(j_1)} \subset \Delta_{i_2}^{(j_2)};$$

$$2) \Delta_{i_1}^{(j_1)} = \Delta_{i_2}^{(j_2)} \Rightarrow m(\delta_1) = m(\delta_2);$$

$$3) \delta_1 = \delta_2 \Leftrightarrow \Delta_{i_1}^{(j_1)} = \Delta_{i_2}^{(j_2)}, k_1 = k_2;$$

$$4) \text{ если } \delta_1 \subset \delta_2 \text{ и } m(\delta_1) = m(\delta_2)/2, \text{ то } \Delta_{i_1}^{(j_1)} \subset \Delta_{i_2}^{(j_2)} \text{ и } m(\Delta_{i_1}^{(j_1)}) = m(\Delta_{i_2}^{(j_2)})/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что $\Delta_{i_1}^{(j_1)} \not\subseteq \Delta_{i_2}^{(j_2)}$. Тогда либо $\Delta_{i_2}^{(j_2)} \subsetneq \Delta_{i_1}^{(j_1)}$, либо $\Delta_{i_1}^{(j_1)} \cap \Delta_{i_2}^{(j_2)} = \emptyset$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай 1: $\Delta_{i_2}^{(j_2)} \subsetneq \Delta_{i_1}^{(j_1)}$. В этом случае имеем $i_1 < i_2$. Из монотонности последовательности $\{\alpha_n\}$ следует, что $\alpha_{i_1}^{(j_1)} \leq \alpha_{i_2}^{(j_2)}$. Отсюда заключаем, что

$$m(\delta_1) = 2^{-i_1 - \alpha_{i_1}^{(j_1)}} > 2^{-i_2 - \alpha_{i_2}^{(j_2)}} = m(\delta_2).$$

Случай 2: $\Delta_{i_1}^{(j_1)} \cap \Delta_{i_2}^{(j_2)} = \emptyset$. Тогда имеем, что $\tilde{\Delta}_{i_1}^{(j_1)} \cap \tilde{\Delta}_{i_2}^{(j_2)} = \emptyset$. Но это невозможно из-за соотношений $\delta_1 \subset \tilde{\Delta}_{i_1}^{(j_1)}$ и $\delta_2 \subset \tilde{\Delta}_{i_2}^{(j_2)}$.

Утверждения 2) и 3) непосредственно следуют из определений δ_1 , δ_2 и из утверждения пункта 1).

4) Пусть $\delta_1 \subset \delta_2$ и $m(\delta_1) = m(\delta_2)/2$. Это означает, что

$$i_1 + \alpha_{i_1}^{(j_1)} = i_2 + \alpha_{i_2}^{(j_2)} + 1. \quad (26)$$

Из утверждений пунктов 2) и 3) следует, что $\Delta_{i_1}^{(j_1)} \subsetneq \Delta_{i_2}^{(j_2)}$, и поэтому $i_1 > i_2$. Принимая во внимание соотношение (26) и монотонность последовательности $\{\alpha_n\}$, заключаем, что $i_1 = i_2 + 1$. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточность. Пусть последовательность $\{\omega_n\}$ удовлетворяет условию (8). Без ограничения общности можно полагать, что $\omega_1 = 1$. Для $i \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, 2^i$ положим

$$\alpha_{2^i+j} = \alpha_i^{(j)} = [-\log_2 \omega_{2^i+j}], \quad \omega_i^{(j)} = \omega_{2^i+j}, \quad (27)$$

и определим линейный оператор T согласно (24). Тогда для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ имеем

$$Tf = T\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^i} c_i^{(j)}(f) h_i^{(j)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^i} \frac{c_i^{(j)}(f)}{2^{\alpha_i^{(j)}}} \sum_{k=1}^{2^{\alpha_i^{(j)}}} h_{i+\alpha_i^{(j)}}^{(s_{i,j,k})}, \quad (28)$$

где согласно лемме 5 каждая функция системы Хаара участвует не более, чем в одном слагаемом. Пусть для некоторого натурального r интервалы

$$\Delta_{i_1+\alpha_{i_1}^{(j_1)}}^{(s_{j_1,j_1,k_1})} \supset \Delta_{i_2+\alpha_{i_2}^{(j_2)}}^{(s_{j_2,j_2,k_2})} \supset \dots \supset \Delta_{i_r+\alpha_{i_r}^{(j_r)}}^{(s_{j_r,j_r,k_r})}$$

образуют цепь в $\text{sp}(Tf)$. Тогда имеем, что

$$i_r + \alpha_{i_r}^{(j_r)} = i_1 + \alpha_{i_1}^{(j_1)} + r - 1. \quad (29)$$

Из утверждения пункта 4) леммы 5 следует, что

$$m(\Delta_{i_1}^{(j_1)}) = 2m(\Delta_{i_2}^{(j_2)}) = \dots = 2^{r-1}m(\Delta_{i_r}^{(j_r)}).$$

Следовательно, имеем, что $i_r = i_1 + r - 1$. Учитывая (29), получим $\alpha_{i_r}^{(j_r)} = \alpha_{i_1}^{(j_1)}$. Это означает, что

$$\frac{\omega_{i_r}^{(j_r)}}{\omega_{i_1}^{(j_1)}} > \frac{1}{2}.$$

С учетом (8) и равенства $i_r = i_1 + r - 1$ получаем, что

$$V(\omega) \geq \frac{2^{i_r} + j_r}{2^{i_1} + j_1} > 2^{r-2}.$$

То есть в $\text{sp}(Tf)$ не имеется цепи длиной больше $\log_2 V(\omega) + 2$. Согласно теореме 1 это означает, что система $\{h_n\}_{n \in \text{sp}(Tf)}$ является квази-гриди системой в $L^1(0, 1)$. Следовательно, с учетом теоремы В можем утверждать, что

$$G_n^{1/2}(Tf) \rightarrow Tf \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

С учетом линейности оператора T , (27) и (28) получим, что

$$\frac{1}{2} |c_{i+\alpha_i^{(j)}}^{(s_{i,j,k})}(Tf)| \leq |\omega_i^{(j)} c_i^{(j)}(f)| \leq |c_{i+\alpha_i^{(j)}}^{(s_{i,j,k})}(Tf)|$$

для всех $i \geq 0$, $1 \leq j \leq 2^i$, $1 \leq k \leq 2^{\alpha_i^{(j)}}$. Заметим, что при некоторой реализации $G_n^{1/2}(Tf)$ и для некоторой последовательности возрастающих натуральных чисел $\{m_n\}$ имеем

$$T(G_n^{(\omega)}(f)) = G_{m_n}^{1/2}(Tf).$$

С учетом (30) и (25) окончательно получим, что

$$\|f - G_n^{(\omega)}(f)\| = \|Tf - T(G_n^{(\omega)}(f))\| = \|Tf - G_{m_n}^{1/2}(Tf)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Необходимость. Пусть $V(\omega) = \infty$. Положим $\{\varphi_n\} = \{h_n/\omega_n\}$. Для любого натурального $M \in \mathbb{N}$ выберем m и n такие, чтобы имели место следующие соотношения:

$$m > 2^{2M+1}n, \quad \frac{\omega_m}{\omega_n} > 0.5.$$

Положим $k = [\log_2 n] + 1$ и

$$f = \sum_{i=0}^{2M} \chi_{k+i}^{(1)} = \sum_{i=0}^{2M} \chi_{2^{k+i}+1} = \sum_{i=0}^{2M} b_i \varphi_{2^{k+i}+1},$$

где $b_i = \omega_{2^{k+i}+1}$. Заметим, что

$$\frac{\omega_n}{2} \leq b_i \leq \omega_n$$

для всех $0 \leq i \leq 2M$. Следовательно, для некоторой реализации $\{G_m^{1/2}(f, \{\varphi_n\})\}$ имеем

$$G_{M+1}^{1/2}(f, \{\varphi_n\}) = \sum_{i=0}^M b_{2i} \varphi_{2^{k+2i}+1} = \sum_{i=0}^M \chi_{k+2i}^{(1)}.$$

Легко проверить, что $\|f\| < 2$ и $\|G_{M+1}^{1/2}(f, \{\varphi_n\})\| > M/4$. Следовательно,

$$\frac{\|G_{M+1}^{1/2}(f, \{\varphi_n\})\|}{\|f\|} > \frac{M}{8}.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что оператор T , построенный при доказательстве теоремы 2, удовлетворяет требованиям теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “A remark on greedy approximation in Banach spaces”, *East J. Approx.*, **5**:3 (1999), 365–379.
- [2] P. Wojtaszczyk, “Greedy algorithm for general biorthogonal systems”, *J. Approx. Theory*, **107**:2 (2000), 293–314.
- [3] V. N. Temlyakov, “The best m -term approximation and greedy algorithms”, *Adv. Comput. Math.*, **8**:3 (1998), 249–265.
- [4] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Greedy approximation with regard to bases and general minimal systems”, *Serdica Math. J.*, **28**:4 (2002), 305–328.
- [5] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Convergence of greedy approximation. I. General systems”, *Studia Math.*, **159**, 2003, 143–160.
- [6] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, P. Wojtaszczyk, “On approximate l_1 systems in Banach spaces”, *J. Approx. Theory*, **114**, 2002, 214–241.
- [7] S. Gogyan, “Greedy algorithm with regard to Haar subsystems”, *East J. Approx.*, **11**:2 (2005), 221–236.
- [8] S. Gogyan, “On convergence of weak thresholding greedy algorithm in $L^1(0, 1)$ ”, *J. Approx. Theory*, **161**:1 (2009), 49–64.

С. Гогян

Институт математики НАН Республики Армении

E-mail: gogyan@instmath.sci.am

Поступило

09.12.2009