Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Мамедов, Неклассический аналог задачи Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 251–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 02:57:44

Неклассический аналог задачи Гурса

для одного трехмерного уравнения со старшей производной

И. Г. Мамедов

В данной статье выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании задачи Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной пятого порядка с L_p -коэффициентами на основе сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра.

Библиография: 24 названия.

DOI: 10.4213/mzm8569

За последние десятилетие существенно повысился интерес к многомерным краевым задачам для дифференциальных уравнений с частными производными [1]–[5]. К настоящему времени усилиями многих математиков задачи Гурса для многомерных уравнений со старшей производной развивались в работах [6]–[10] и др. В частности, был разработан новый вариант классического метода Римана, оказавшийся более приспособленным для выделения случаев решения ряда задач в явном виде. По указанным результатам в 2001 г. выпущена монография Жегалова и Миронова [11].

1. Постановка задачи. В этой работе рассматривается трехмерная начально-краевая задача для гиперболического уравнения с L_p -коэффициентами и со старшей производной $D^\alpha u(x)$ пятого порядка.

Рассмотрим уравнение

$$(V^\alpha u)(x) \equiv D^\alpha u(x) + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta(x) D^\beta u(x) = \varphi^\alpha(x), \quad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2, 2)$, мультииндексы β имеют три компоненты, отношение подчиненности $\beta < \alpha$ означает, что β получен из α уменьшением по меньшей мере одной компоненты; $D = \partial/\partial x$ – оператор обобщенного дифференцирования в смысле Соболева; $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ – искомая функция, определенная на G ; $a_\beta(x)$ – заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3$, где $G_k = (0, h_k)$, $1 \leq k \leq 3$; $\varphi^\alpha(x)$ – заданная функция из $L_p(G)$.

Уравнение (1) является гиперболическим уравнением, которое обладает тремя действительными характеристиками $x_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq 3$, первая, из которых простая, а вторая и третья – двукратные. Поэтому уравнение (1) в некотором смысле можно рассматривать также как псевдопараболическое уравнение [12]–[15]. Это

уравнение возникает, например, при изучении вопросов фильтрации жидкости в средах с пористостью [16], влагопереноса в почвогрунтах [17]–[18], моделировании процессов фильтрации при поглощении влаги корнями растений [19; с. 261] и др.

В этой работе уравнение (1) исследовано в неклассическом случае, когда коэффициенты $a_\beta(x)$ являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$a_\beta \in L_{\bar{p}(\beta)},$$

$$\bar{p}_k(\beta) = \begin{pmatrix} \infty, & \beta_k = \alpha_k, \\ p, & \beta_k < \alpha_k, \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

При наложенных условиях решение $u(x)$ уравнения (1) будем искать в пространстве Соболева

$$W_p^\alpha(G) \equiv \{u(x) : D^\beta u(x) \in L_p(G), \beta \leq \alpha\},$$

где $1 \leq p \leq \infty$. Норму в анизотропном пространстве $W_p^\alpha(G)$ будем определять равенством

$$\|u(x)\|_{W_p^\alpha(G)} = \sum_{\beta \leq \alpha} \|D^\beta u(x)\|_{L_p(G)}.$$

Многочисленные теоретические и прикладные проблемы приводят к необходимости разработки гиперболических и псевдопараболических уравнений, встречающихся в ряде исследований, в частности, в задачах теории фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереносе в почвогрунтах и т.д. Вместе с тем, работы, выполненные в этом направлении, показывают, что исследования этих прикладных задач требует достаточно углубленных попыток в области обобщения класса так называемых задач Гурса.

Для уравнения (1) условия Гурса классического вида можно задать в виде

$$u|_{x_k=0} = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq 3,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|_{x_k=0} = \psi_k, \quad k = 2, 3, \quad (2)$$

где φ_k, ψ_k – заданные измеримые функции на G .

Очевидно, что в (2) функции φ_k, ψ_k кроме условий

$$\varphi_1 \in W_p^{(\alpha_2, \alpha_3)}(G_2 \times G_3), \quad \varphi_2, \psi_2 \in W_p^{(\alpha_1, \alpha_3)}(G_1 \times G_3), \quad \varphi_3, \psi_3 \in W_p^{(\alpha_1, \alpha_2)}(G_1 \times G_2)$$

должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_1|_{x_2=0} &= \varphi_2|_{x_1=0}, & \psi_2|_{x_1=0} &= \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}, \\ \varphi_1|_{x_3=0} &= \varphi_3|_{x_1=0}, & \psi_3|_{x_2=0} &= \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}, \\ \varphi_3|_{x_2=0} &= \varphi_2|_{x_3=0}, & \psi_3|_{x_1=0} &= \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}, \\ \psi_2|_{x_3=0} &= \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= \left. \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}, \end{aligned} \quad (3)$$

которые являются условиями согласования.

Введем подмножества мультииндексов

$$\begin{aligned} M_{123} &: \{\beta_1 = 0, \beta_2 \leq 1, \beta_3 \leq 1\}, & M_{23} &: \{\beta_1 = 1, \beta_2 \leq 1, \beta_3 \leq 1\}, \\ M_{13} &: \{\beta_1 = 0, \beta_2 = 2, \beta_3 \leq 1\}, & M_{12} &: \{\beta_1 = 0, \beta_2 \leq 1, \beta_3 = 2\}, \\ M_1 &: \{\beta_2 = \beta_3 = 2, \beta_1 = 0\}, & M_2 &: \{\beta_1 = 1, \beta_2 \leq 1, \beta_3 = 2\}, \\ M_3 &: \{\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \beta_3 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Наличие условий согласования (3) в постановке задачи (1), (2) означает, что условиями (2) задана также некоторая излишняя информация о решении этой задачи. Поэтому возникает вопрос о нахождении краевых условий, которые не содержат излишней информации о решении и не требуют выполнения никаких дополнительных условий типа согласования. В связи с этим рассмотрим следующие неклассические начально-краевые условия:

$$\begin{cases} V^\beta u \equiv D^\beta u|_{x_1=x_2=x_3=0} = \varphi^\beta, & \beta \in M_{123}, \\ (V_{kr}^\beta u)(x_i) \equiv D^\beta u|_{x_k=x_r=0} = \varphi_{kr}^\beta(x_i), & \beta \in M_{kr}, \quad k < r, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad i \neq k, \quad i \neq r, \\ (V_k^\beta u)(x_i, x_j) \equiv D^\beta u|_{x_k=0} = \varphi_k^\beta(x_i, x_j), & \beta \in M_k, \\ & 1 \leq k \leq 3, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad i \neq k, \quad j \neq k. \end{cases} \quad (4)$$

Если функция $u \in W_p^\alpha(G)$ является решением трехмерной задачи Гурса классического вида (1), (2), то она является также решением задачи (1), (4) для φ^β , φ_{kr}^β , φ_k^β , определяемых следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \varphi^{(0,0,0)} &= \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0), \\ \varphi^{(0,1,0)} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_3=0} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=0} = \psi_2(0), \\ \varphi^{(0,0,1)} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \Big|_{x_2=x_3=0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_3=0} = \psi_3(0), \\ \varphi^{(0,1,1)} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_3=0} = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=0} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{x_2=x_3=0}, \\ \varphi_{23}^{(1,0,0)}(x_1) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \Big|_{x_2=0}, \\ \varphi_{23}^{(1,1,0)}(x_1) &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_2=0}, \\ \varphi_{23}^{(1,0,1)}(x_1) &= \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=0}, \\ \varphi_{23}^{(1,1,1)}(x_1) &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_2=0}, \\ \varphi_{13}^{(0,2,0)}(x_2) &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0}, \\ \varphi_{13}^{(0,2,1)}(x_2) &= \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x_2^2 \partial x_3} \Big|_{x_3=0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{12}^{(0,0,2)}(x_3) &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2} \Big|_{x_1=0}, \\ \varphi_{12}^{(0,1,2)}(x_3) &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3^2} \Big|_{x_2=0},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi_3^{(1,2,0)}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2^2}, & \varphi_3^{(1,2,1)}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \\ \varphi_1^{(0,2,2)}(x_2, x_3) &= \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x_2^2 \partial x_3^2}, \\ \varphi_2^{(1,0,2)}(x_1, x_3) &= \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3^2}, & \varphi_2^{(1,1,2)}(x_1, x_3) &= \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_3^2}.\end{aligned}$$

Легко доказать, что верно и обратное. Иначе говоря, если функция $u \in W_p^\alpha(G)$ является решением задачи (1), (4), то она является также решением задачи (1), (2), для следующих функций φ_k , $1 \leq k \leq 3$, ψ_2 , ψ_3 :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_2, x_3) &= \sum_{\beta \in M_{123}} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \varphi^\beta + \sum_{\beta \in M_{13}} x_3^{\beta_3} \int_0^{x_2} (x_2 - \tau_2) \varphi_{13}^\beta(\tau_2) d\tau_2 \\ &\quad + \sum_{\beta \in M_{12}} x_2^{\beta_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_{12}^\beta(\tau_3) d\tau_3 \\ &\quad + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_2 - \tau_2)(x_3 - \tau_3) \varphi_1^{(0,2,2)}(\tau_2, \tau_3) d\tau_2 d\tau_3,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x_1, x_3) &= \varphi^{(0,0,0)} + x_3 \varphi^{(0,0,1)} + \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,0,0)}(\tau_1) d\tau_1 + x_3 \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,0,1)}(\tau_1) d\tau_1 \\ &\quad + \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_{12}^{(0,0,2)}(\tau_3) d\tau_3 \\ &\quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_2^{(1,0,2)}(\tau_1, \tau_3) d\tau_1 d\tau_3,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x_1, x_2) &= \varphi^{(0,0,0)} + x_2 \varphi^{(0,1,0)} + \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,0,0)}(\tau_1) d\tau_1 + x_2 \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,1,0)}(\tau_1) d\tau_1 \\ &\quad + \int_0^{x_2} (x_2 - \tau_2) \varphi_{13}^{(0,2,0)}(\tau_2) d\tau_2 \\ &\quad + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_2 - \tau_2) \varphi_3^{(1,2,0)}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(x_1, x_3) &= \varphi^{(0,1,0)} + x_3 \varphi^{(0,1,1)} + \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,1,0)}(\tau_1) d\tau_1 + x_3 \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,1,1)}(\tau_1) d\tau_1 \\ &\quad + \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_{12}^{(0,1,2)}(\tau_3) d\tau_3 \\ &\quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_2^{(1,1,2)}(\tau_1, \tau_3) d\tau_1 d\tau_3,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\psi_3(x_1, x_2) = \varphi^{(0,0,1)} + x_2 \varphi^{(0,1,1)} + \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,0,1)}(\tau_1) d\tau_1 + x_2 \int_0^{x_1} \varphi_{23}^{(1,1,1)}(\tau_1) d\tau_1$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{x_2} (x_2 - \tau_2) \varphi_{13}^{(0,2,1)}(\tau_2) d\tau_2 \\
& + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_2 - \tau_2) \varphi_3^{(1,2,1)}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1, d\tau_2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что при этом функции (5)–(9) обладают одним важным свойством, связанным с тем, что для них условия согласования (3) выполняются автоматическим образом при всех φ^β , φ_{kr}^β , φ_k^β , обладающих указанными выше свойствами. Поэтому равенства (5)–(9) можно рассматривать также как общий вид всех функций

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_2, x_3) & \in W_p^{(\alpha_2, \alpha_3)}(G_2 \times G_3), \\
\varphi_2(x_1, x_3) & \in W_p^{(\alpha_1, \alpha_3)}(G_1 \times G_3), \\
\varphi_3(x_1, x_2) & \in W_p^{(\alpha_1, \alpha_2)}(G_1 \times G_2), \\
\psi_2(x_1, x_3) & \in W_p^{(\alpha_1, \alpha_3)}(G_1 \times G_3), \\
\psi_3(x_1, x_2) & \in W_p^{(\alpha_1, \alpha_2)}(G_1 \times G_2),
\end{aligned}$$

удовлетворяющих условиям согласования (3).

Итак, трехмерные задачи Гурса классического вида (1), (2) и вида (1), (4) в общем случае эквивалентны. Однако трехмерная неклассическая начально-краевая задача (1), (4) по постановке более естественна, чем задача (1), (2). Это связано с тем, что в постановке задачи (1), (4) на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуется. Поэтому задачу (1), (4) можно рассматривать как задачу Гурса неклассического типа [20].

2. Некоторые структурные свойства пространства Соболева $W_p^\alpha(G)$ и операторный вид трехмерной задачи Гурса. Задачу (1), (4) мы будем исследовать методом операторных уравнений и при этом будем следовать схеме работы [21].

Предварительно задачу (1), (4) запишем в виде операторного уравнения

$$Vu = \varphi, \tag{10}$$

где V есть векторный оператор, определяемый посредством равенства

$$\begin{aligned}
V = (\{V^\beta, \beta \in M_{123}\}, \{\varphi_{kr}^\beta, \beta \in M_{kr}, k < r\}, \{V_k^\beta, \beta \in M_k, 1 \leq k \leq 3\}, V^\alpha): \\
W_p^\alpha(G) \rightarrow E_p^\alpha
\end{aligned}$$

а φ есть заданный векторный элемент вида

$$\varphi = (\{\varphi^\beta, \beta \in M_{123}\}, \{\varphi_{kr}^\beta, \beta \in M_{kr}, k < r\}, \{\varphi_k^\beta, \beta \in M_k, 1 \leq k \leq 3\}, \varphi^\alpha)$$

из пространства

$$E_p^\alpha \equiv R \times L_p(G_i) \times L_p(G_i \times G_j) \times L_p(G);$$

здесь будем предполагать, что

$$\begin{cases} \beta \in M_{kr}, & k < r, i \neq k, i \neq r, 1 \leq i \leq 3, \\ \beta \in M_k, & 1 \leq k \leq 3, i \neq k, j \neq k, 1 \leq i < j \leq 3. \end{cases}$$

Заметим, что в пространстве E_p^α норму будем определять естественным образом, при помощи равенства

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{E_p^\alpha} = & \sum_{\beta \in M_{123}} \|\varphi^\beta\|_R + \sum_{\beta \in M_{kr}} \|\varphi_{kr}^\beta(x_i)\|_{L_p(G_i)} \\ & + \sum_{\beta \in M_k} \|\varphi_k^\beta(x_i, x_j)\|_{L_p(G_i \times G_j)} + \|\varphi^\alpha(x)\|_{L_p(G)}. \end{aligned}$$

Задачу (1), (4) будем исследовать при помощи интегральных представлений специального вида для функций $u(x) \in W_p^\alpha(G)$ в виде

$$\begin{aligned} u(x) = (Qb)(x) = & \sum_{\beta \in M_{123}} b^\beta \prod_{k=1}^3 x_k^{\beta_k} + \sum_{\substack{\beta \in M_{kr} \\ i \neq k, r}} x_k^{\beta_k} x_r^{\beta_r} \int_0^{x_i} (x_i - \tau_i)^{\beta_i-1} b_{kr}^\beta(\tau_i) d\tau_i \\ & + \sum_{\substack{\beta \in M_k \\ k \neq i, j}} x_k^{\beta_k} \int_0^{x_i} \int_0^{x_j} (x_i - \tau_i)^{\beta_i-1} (x_j - \tau_j)^{\beta_j-1} b_k^\beta(\tau_i, \tau_j) d\tau_i d\tau_j \\ & + \int_0^x \prod_{k=2}^3 (x_k - \tau_k) b^\alpha(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

посредством единственного элемента

$$b = (\{b^\beta, \beta \in M_{123}\}, \{b_{kr}^\beta, \beta \in M_{kr}, k < r\}, \{b_k^\beta, \beta \in M_k, 1 \leq k \leq 3\}, b^\alpha) \in E_p^\alpha.$$

При этом существуют положительные постоянные M_1^0 и M_2^0 такие, что для любой $b \in E_p^\alpha$

$$M_1^0 \|b\|_{E_p^\alpha} \leq \|(Qb)(x)\|_{W_p^\alpha(G)} \leq M_2^0 \|b\|_{E_p^\alpha}. \quad (12)$$

Очевидно, что оператор $Q: E_p^\alpha \rightarrow W_p^\alpha(G)$ является линейным ограниченным оператором. Неравенство (12) показывает, что оператор Q имеет также ограниченный обратный оператор, определенный на пространстве $W_p^\alpha(G)$. Следовательно, оператор Q задает гомеоморфизм между банаховыми пространствами E_p^α и $W_p^\alpha(G)$. Поэтому решение уравнения (10) эквивалентно решению уравнения

$$VQb = \varphi. \quad (13)$$

Уравнения (13) будем называть *каноническим видом* уравнения (10). Кроме того, формула (11) показывает, что любая функция $u \in W_p^\alpha(G)$ имеет следы

$$\begin{aligned} \{D^\beta u|_{x_1=x_2=x_3=0}, \beta \in M_{123}\}, \quad \{D^\beta u|_{x_k=x_r=0}, \beta \in M_{kr}, k < r\}, \\ \{D^\beta u|_{x_k=0}, \beta \in M_k, 1 \leq k \leq 3\} \end{aligned}$$

и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^\alpha(G)$ в

$$R, \quad L_p(G_i), \quad L_p(G_i \times G_j)$$

соответственно. Далее, для этих следов справедливы также равенства

$$\begin{aligned} D^\beta u|_{x_1=x_2=x_3=0} &= b^\beta, & \beta \in M_{123}, \\ D^\beta u|_{x_k=x_r=0} &= b_{kr}^\beta(x_i), & \beta \in M_{kr}, \quad k < r, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad i \neq k, \quad i \neq r, \\ D^\beta u|_{x_k=0} &= b_k^\beta(x_i, x_j), & \beta \in M_k, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad i \neq k, \quad j \neq k. \end{aligned}$$

3. Эквивалентное интегральное уравнение. Задачу (1), (4) мы будем изучать при помощи интегрального представления (11) функций $u \in W_p^\alpha(G)$. Формула (11) показывает, что функция $u \in W_p^\alpha(G)$, удовлетворяющая условиям (4), имеет вид

$$u(x) = g_0(x) + \int_G R_0(\tau; x) D^\alpha u(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} g_0(x) = & \sum_{\beta \in M_{123}} \varphi^\beta \prod_{k=1}^3 x_k^{\beta_k} + \sum_{\substack{\beta \in M_{kr} \\ i \neq k, r}} x_k^{\beta_k} x_r^{\beta_r} \int_0^{x_i} (x_i - \tau_i)^{\beta_i - 1} \varphi_{kr}^\beta(\tau_i) d\tau_i \\ & + \sum_{\substack{\beta \in M_k \\ k \neq i, j}} x_k^{\beta_k} \int_0^{x_i} \int_0^{x_j} (x_i - \tau_i)^{\beta_i - 1} (x_j - \tau_j)^{\beta_j - 1} \varphi_k^\beta(\tau_i, \tau_j) d\tau_i d\tau_j, \\ R_0(\tau; x) = & \prod_{k=2}^3 (x_k - \tau_k) \prod_{k=1}^3 \theta(x_k - \tau_k), \end{aligned}$$

причем $\theta(\xi)$ является функцией Хевисайда на R , т.е.

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Тогда после замены $u = g_0 + \hat{u}$, где

$$\hat{u}(x) = \int_G R_0(\tau; x) D^\alpha u(\tau) d\tau,$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$(V^\alpha \hat{u})(x) = \hat{L}(x), \quad (14)$$

где

$$\hat{L} = \varphi^\alpha - V^\alpha g_0.$$

Очевидно, что производные функции $\hat{u}$ можно вычислить посредством равенств

$$\begin{aligned} D^\beta \hat{u}(x) = & \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_1 - \tau_1)^{\alpha_1 - (\beta_1 + 1)} (x_2 - \tau_2)^{\alpha_2 - (\beta_2 + 1)} (x_3 - \tau_3)^{\alpha_3 - (\beta_3 + 1)} \\ & \times D^\alpha u(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad \text{при } \beta \in M_{123}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^\beta \hat{u}(x) = & \int_0^{x_k} \int_0^{x_r} (x_k - \tau_k)^{\alpha_k - (\beta_k + 1)} (x_r - \tau_r)^{\alpha_r - (\beta_r + 1)} \left(D^\alpha u(x) \Big|_{\substack{x_k = \tau_k \\ x_r = \tau_r}} \right) d\tau_k d\tau_r \\ & \text{при } \beta \in M_{kr}, \quad k < r; \end{aligned}$$

$$D^\beta \hat{u}(x) = \int_0^{x_k} (x_k - \tau_k)^{\alpha_k - (\beta_k + 1)} (D^\alpha u(x) \Big|_{x_k = \tau_k}) d\tau_k \quad \text{при } \beta \in M_k, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Теперь старшую производную рассмотрим как неизвестную функцию, иначе говоря, произведем замену $D^\alpha u(x) = b(x)$. Тогда уравнение (14) можно записать в виде

$$(Nb)(x)$$

$$\begin{aligned} \equiv b(x) + & \sum_{\beta \in M_{123}} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_1 - \tau_1)^{\alpha_1 - (\beta_1 + 1)} (x_2 - \tau_2)^{\alpha_2 - (\beta_2 + 1)} \\ & \times (x_3 - \tau_3)^{\alpha_3 - (\beta_3 + 1)} a_\beta(x) b(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{\beta \in M_{kr} \\ k < r}} \int_0^{x_k} \int_0^{x_r} (x_k - \tau_k)^{\alpha_k - (\beta_k + 1)} (x_r - \tau_r)^{\alpha_r - (\beta_r + 1)} a_\beta(x) \left(b(x) \Big|_{\substack{x_k = \tau_k \\ x_r = \tau_r}} \right) d\tau_k d\tau_r \\
 & + \sum_{\substack{\beta \in M_k \\ 1 \leq k \leq 3}} \int_0^{x_k} (x_k - \tau_k)^{\alpha_k - (\beta_k + 1)} a_\beta(x) (b(x)|_{x_k = \tau_k}) d\tau_k = \widehat{L}(x), \quad x \in G. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Оператор N уравнения (15) линеен. Используя условия, наложенные на коэффициенты a_β , можно доказать, что этот оператор является ограниченным оператором из $L_p(G)$ в $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если задача (1), (4) для любого

$$\varphi = (\{\varphi^\beta, \beta \in M_{123}\}, \{\varphi_{kr}^\beta, \beta \in M_{kr}, k < r\}, \{\varphi_k^\beta, \beta \in M_k, 1 \leq k \leq 3\}, \varphi^\alpha) \in E_p^\alpha,$$

имеет единственное решение $u(x) \in W_p^\alpha(G)$ такое, что

$$\|u\|_{W_p^\alpha(G)} \leq \widetilde{M}_1 \|\varphi\|_{E_p^\alpha},$$

то будем говорить, что оператор V задачи (1), (4) (или уравнения (10)) *задает гомеоморфизм из $W_p^\alpha(G)$ на E_p^α или задача (1), (4) везде корректно разрешима.* Здесь $\widetilde{M}_1$ – постоянная, не зависящая от φ .

Очевидно, что если оператор V задачи (1), (4) задает гомеоморфизм из $W_p^\alpha(G)$ на E_p^α , то существует ограниченный обратный оператор

$$V^{-1}: E_p^\alpha \rightarrow W_p^\alpha(G).$$

В теории дифференциальных уравнений особое значение имеет вопрос о выявлении классов задач, операторы которых осуществляют гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств. Такие гомеоморфизмы выявлены в работах Березанского и Ройтберга [22], Ахиева [23], Житарашу [24] и др. для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными.

Оператор N является вольтерровым оператором относительно точки $(0, 0, 0)$. Это означает, что если функции $b_1, b_2 \in L_p(G)$ в области

$$G_x = (0, x_1) \times (0, x_2) \times (0, x_3)$$

удовлетворяют условию

$$b_1(\tau) = b_2(\tau),$$

то выполняется также условие

$$(Nb_1)(\tau) = (Nb_2)(\tau)$$

почти для всех $\tau \in G_x$, где $x \in G$ – произвольная точка.

Используя вольтерровость оператора N , при помощи, например, метода последовательных приближений можно доказать, что уравнение (15) для любой правой части $\widehat{L} \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b \in L_p(G)$, где $1 \leq p \leq \infty$, и это решение удовлетворяет условию

$$\|b\|_{L_p(G)} \leq \widetilde{M}_2 \|\widehat{L}\|_{L_p(G)},$$

где $\widetilde{M}_2$ – постоянная, не зависящая от $\widehat{L}$. Далее, очевидно, что если $\varphi^\alpha \in L_p(G)$, то $\widehat{L} \in L_p(G)$. Кроме того, если $b \in L_p(G)$ есть решение уравнения (15), то решение задачи (1), (4) можно найти при помощи равенства

$$u(x) = \int_0^x b(\tau) R_0(\tau; x) d\tau.$$

Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА. *Оператор задачи (1), (4) задает гомеоморфизм из $W_p^\alpha(G)$ на E_p^α .*

Выводы. Рассматриваемое уравнение (1) с неклассическими краевыми условиями (4) было названо *задачей Гурса неклассического типа*. Такая постановка задачи обладает рядом преимуществ:

- 1) в этой постановке не требуется никаких дополнительных условий согласования;
- 2) именно такая постановка порождает гомеоморфизм между двумя банаховыми пространствами $W_p^\alpha(G)$ и E_p^α ;
- 3) эту задачу можно рассматривать как задачу, сформулированную по следам в пространстве Соболева $W_p^\alpha(G)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Жегалов, Е. А. Уткина, “Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной”, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, № 11, 77–81.
- [2] Е. А. Уткина, “Об одной краевой задаче со смещениями в четырехмерном пространстве”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 4, 50–55.
- [3] Е. А. Уткина, “Об одной трёхмерной задаче Гурса”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **12**, СамГТУ, Самара, 2001, 30–35.
- [4] О. М. Джохадзе, “О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения вольтерры первого рода”, *Дифференц. уравнения*, **42:3** (2006), 385–394.
- [5] B. Midodashvili, “Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **138** (2005), 43–54.
- [6] О. А. Кощеева, “О построении функции Римана для уравнения Бианки в n -мерном пространстве”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 9, 40–46.
- [7] А. Н. Миронов, “О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **46:2** (2010), 266–272.
- [8] В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, “Задача Гурса в четырехмерном пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **32:10** (1996), 1429–1430.
- [9] В. А. Севастьянов, “Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 5, 69–73.
- [10] Е. А. Уткина, “Задача со смещениями для трехмерного уравнения Бианки”, *Дифференц. уравнения*, **46:4** (2010), 535–539.
- [11] В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*, Казанское мат. об-во, Казань, 2001.
- [12] А. П. Солдатов, М. Х. Шхануков, “Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка”, *Докл. АН СССР*, **297:3** (1987), 547–552.
- [13] О. М. Джохадзе, “Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка”, *Матем. заметки*, **74:4** (2003), 517–528.

- [14] В. И. Жегалов, Е. А. Уткина, “Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 10, 73–76.
- [15] И. Г. Мамедов, “Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:1 (2009), 99–110.
- [16] М. Х. Шхануков, “О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах”, *Дифференц. уравнения*, **18**:4 (1982), 689–699.
- [17] А. М. Нахушев, “Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги”, *Докл. АН СССР*, **242**:5 (1978), 1008–1011.
- [18] В. А. Водахова, “Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса”, *Дифференц. уравнения*, **18**:2 (1982), 280–285.
- [19] А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995.
- [20] И. Г. Мамедов, “Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева”, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, № 2, 54–64.
- [21] I. G. Mamedov, “Generalization of multipoint boundary-value problems of Bitsadze–Samarski and Samarski–Ionkin type for fourth order loaded hyperbolic integro-differential equations and their operator generalization”, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, **23** (2005), 77–84.
- [22] Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, “Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач”, *Укр. матем. журн.*, **19**:5 (1967), 3–32.
- [23] С. С. Ахиев, “Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления”, *Докл. АН СССР*, **271**:2 (1983), 265–269.
- [24] Н. В. Житарашу, “Теорема о полном наборе изоморфизмов в L_2 -теории модельных начальных параболических краевых задач”, *Дифференциальные уравнения и их варианты*, Математические исследования, **88**, Штиинца, Кишинев, 1986, 40–59.

И. Г. Мамедов

Институт кибернетики им. акад. А. Гусейнова НАН

Азербайджана, г. Баку

E-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru

Поступило

18.08.2009

Исправленный вариант

20.06.2012