Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Шананина, Модели CR-многообразий типа $(1, K)$ при $3 \leq K \leq 7$ и их автоморфизмы, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 452–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:33:01

УДК 517.55

МОДЕЛИ CR-МНОГООБРАЗИЙ ТИПА $(1, K)$ ПРИ $3 \leq K \leq 7$ И ИХ АВТОМОРФИЗМЫ

Е. Н. Шананина

Строятся модели, аналогичные касательной квадрике, для поверхностей с одномерной комплексной касательной. Показано, что основные свойства касательной квадрики для таких моделей сохраняются. Найдены алгебры и группы их автоморфизмов.

Библиография: 5 названий.

Введение. В изучении вещественных поверхностей в комплексном пространстве большую роль играет касательная к поверхности квадрика (это было отмечено, например, в [1]). Она обладает рядом полезных свойств (см. [1], [2]):

- 1) если квадрика невырождена в смысле [1], то группа ее автоморфизмов конечномерна;
- 2) каждый росток по модулю кубических эквивалентен какой-то квадрике;
- 3) квадрика однородна, т.е. группа автоморфизмов действует транзитивно;
- 4) алгебра инфинитезимальных автоморфизмов невырожденной квадрики состоит из полей с полиномиальными коэффициентами, чья степень не превышает 2; группа автоморфизмов в этом случае состоит из бирациональных отображений ограниченной степени;
- 5) квадрика обладает следующим экстремальным свойством: размерность группы произвольной поверхности мажорируется размерностью группы ее касательной квадрики.

Но условие невырожденности квадрики накладывает ограничение на коразмерность: $K \leq N^2$ (здесь K – коразмерность поверхности, N – комплексная размерность комплексной части касательного пространства; поверхность является CR-многообразием типа (N, K)). Хотелось бы иметь модель, аналогичную квадрике, и в случае большей коразмерности. Нами рассматриваются такие поверхности с $N = 1$. Случай $(1, 2)$ был рассмотрен в [3], где построена модель – $(1, 2)$ -кубика. Мы рассмотрим случаи $(1, K)$ при $3 \leq K \leq 7$ и построим аналогичные модели. В п. 1 уравнения, задающие поверхность, в общем случае приводятся к виду

$$v^1 = |z|^2 + O(3), \quad v^2 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z + O(4), \quad v^3 = 2|z|^2 \operatorname{Im} z + O(4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-96185.

(в пространстве $\{(z, w) : \operatorname{Im} w^j = v^j, \operatorname{Re} w^j = u^j\}$; $O(n)$ здесь обозначает члены веса $\geq n$; вес $z, \bar{z}$ задается равным 1, а веса остальных мономов зададим ниже из естественных соображений).

При $K = 4$ к ним добавляется

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + \lambda |z|^4 + O(5).$$

При $K = 5$ последние два уравнения приводятся к одному из двух видов:

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + \lambda_4 |z|^4 + O(5), \quad v^5 = 2 \operatorname{Im} z^3 \bar{z} + \lambda_5 |z|^4 + O(5)$$

(обычный тип) или

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + O(5), \quad v^5 = |z|^4 + O(5)$$

(вырожденный тип). При $K = 6$ последние три уравнения

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + O(5), \quad v^5 = 2 \operatorname{Im} z^3 \bar{z} + O(5), \quad v^6 = |z|^4 + O(5),$$

а при $K = 7$ к ним добавляется

$$v^7 = 2 \operatorname{Re}(\alpha z^4 \bar{z} + \beta z^3 \bar{z}^2 + u^1 z^2 \bar{z}) + O(6).$$

Отбрасывая в уравнениях старшие члены, получим требуемые модели. В п. 2 мы найдем алгебры их автоморфизмов и получим, что группы автоморфизмов порождаются преобразованиями вида $z \mapsto z + a$, $z \mapsto bz$ (и соответствующими преобразованиями w) и $w^j \mapsto w^j + c$ (здесь $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{C}$, если $K = 3, 6, 5$ при обычном типе с $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$; $b \in \mathbb{R}$ в остальных случаях).

Как следствие получено, что при $K = 3, 6$ все модели эквивалентны, при $K = 4$ эквивалентность определяется параметром λ , при $K = 5$ – выбором обычного или вырожденного типа и при обычном типе – параметрами λ_4, λ_5 ; при $K = 7$ – параметрами α, β .

1. Преобразование уравнений. Пусть M – гладкая вещественная поверхность в $\mathbb{C}^{K+1}$, $\xi \in M$, $\dim_{\mathbb{C}} T_{\xi}^{\mathbb{C}} M = 1$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} T_{\xi} M = K$; поверхность M в окрестности ξ в некоторых координатах (z, w) с центром в точке ξ задана уравнениями $v = F(z, \bar{z}, u)$, где $w = (w^1, \dots, w^K) = (u^1 + i v^1, \dots, u^K + i v^K)$, F – гладкая вещественнозначная вектор-функция в окрестности ξ , причем в нуле и F , и dF равны 0 (если M – порождающее в точке ξ , то это возможно). При этом $T_0 M = \{v = 0\}$, $T_0^{\mathbb{C}} M = \{w = 0\}$. Компонента тейлоровского разложения F степени 1 по z , степени 1 по $\bar{z}$ и степени 0 по u имеет вид $Az\bar{z}$, где $A \in \mathbb{R}^K$. Если $A \neq 0$, то после линейной замены по w можно считать, что $A = (1, 0, \dots, 0)$. Члены при z^p и $\bar{z}^p$ имеют вид $B_p z^p$ и $\bar{B}_p \bar{z}^p$ соответственно. После замены $z \mapsto z$, $w \mapsto w + i \sum_p B_p z^p$ они становятся равными 0. Введем градуировку, задавая веса переменных: $[z] = 1$, $[w^1] = [u^1] = 2$; $w^2, \dots, w^K$ будут иметь вес ≥ 3 . Теперь уравнения поверхности имеют вид

$$v^1 = |z|^2 + O(3), \quad v^j = 2|z|^2 \operatorname{Re} \chi_j z + 2u^1 \operatorname{Re} \tau_j z + O(4), \quad j = 2, \dots, K. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Квадратичной заменой координат поверхность (1) приводится к виду

$$v^1 = |z|^2 + O(3), \quad v^j = 2|z|^2 \operatorname{Re} \tilde{\chi}_j z + O(4), \quad j = 2, \dots, K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дается заменой $z \mapsto z$, $w^1 \mapsto w^1$, $w^j \mapsto w^j + 2i\tau_j w^1 z$.

Если $K \geq 3$ и найдутся $\tilde{\chi}_{j_1}, \tilde{\chi}_{j_2}$ такие, что $\tilde{\chi}_{j_1} : \tilde{\chi}_{j_2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, то линейным преобразованием по w и прибавлением многочлена от z добиваемся вида

$$\begin{aligned} v^1 &= |z|^2 + O(3), \quad v^2 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z + O(4), \quad v^3 = 2|z|^2 \operatorname{Im} z + O(4), \\ v^j &= 2|z|^2 \operatorname{Re} \mu_j z^2 + \lambda_j |z|^4 + 2u^1 \operatorname{Re} \nu_j z^2 + 2u^2 \operatorname{Re} \alpha_{2j} z + 2u^3 \operatorname{Re} \alpha_{3j} z \\ &\quad + \beta_j (u^1)^2 + \gamma_j u^1 |z|^2 + O(5), \quad j = 4, \dots, K, \end{aligned} \quad (2)$$

где $[w^2] = [u^2] = [w^3] = [u^3] = 3$, $[w^j] = [u^j] \geq 4$ при $j \geq 4$.

ЛЕММА 2. При $K \geq 4$ кубической заменой координат поверхность (2) приводится к виду

$$\begin{aligned} v^1 &= |z|^2 + O(3), \quad v^2 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z + O(4), \quad v^3 = 2|z|^2 \operatorname{Im} z + O(4), \\ v^j &= 2|z|^2 \operatorname{Re} \tilde{\mu}_j z^2 + \tilde{\lambda}_j |z|^4 + O(5), \quad j = 4, \dots, K, \quad \tilde{\lambda}_j \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\mu}_j \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дается заменой

$$\begin{aligned} z &\mapsto z, \quad w^1 \mapsto w^1, \quad w^2 \mapsto w^2, \quad w^3 \mapsto w^3, \\ w^j &\mapsto w^j + 2i\nu_j w^1 z^2 + 2i\alpha_{2j} w^2 z + 2i\alpha_{3j} w^3 z + \left(i\beta_j - \frac{\gamma_j}{2}\right)(w^1)^2, \quad j = 4, \dots, K. \end{aligned}$$

Рассмотрим модель Q , которая задается уравнениями

$$\begin{aligned} v^1 &= |z|^2, \quad v^2 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z, \quad v^3 = 2|z|^2 \operatorname{Im} z, \\ v^j &= 2 \operatorname{Re} \tilde{\mu}_j z^3 \bar{z} + \tilde{\lambda}_j |z|^4, \quad j = 4, \dots, K, \quad \tilde{\lambda}_j \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\mu}_j \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $K = 3$, назовем Q невырожденной моделью, касательной к M . При $4 \leq K \leq 6$ назовем Q невырожденной моделью, касательной к M , если v^j , $j = 4, \dots, K$, линейно независимы как многочлены от $z, \bar{z}$ и $\tilde{\mu} \neq 0$.

При $K = 4$ и $\mu \neq 0$ линейной заменой z, w можно добиться выполнения $\mu = 1$, т.е. следующего вида последнего уравнения:

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + \lambda |z|^4$$

при том же виде остальных уравнений.

При $K = 5$ линейной заменой w последние два уравнения Q приводятся к одному из двух видов:

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + \lambda_4 |z|^4, \quad v^5 = 2 \operatorname{Im} z^3 \bar{z} + \lambda_5 |z|^4 \quad (4)$$

(обычный тип) или

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z}, \quad v^5 = |z|^4$$

(вырожденный тип).

При $K = 6$ последние три уравнения Q можно записать следующим образом:

$$v^4 = 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z}, \quad v^5 = 2 \operatorname{Im} z^3 \bar{z}, \quad v^6 = |z|^4.$$

Зададим веса $[w^4] = [u^4] = [w^5] = [w^6] = [u^5] = [u^6] = 4$. Ниже рассмотрим случаи $K = 3$ и $K = 4, 5, 6, \bar{\mu} \neq 0$ и покажем, что в этих случаях Q является аналогом касательной квадрики. При этом найдем явно алгебру ее автоморфизмов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для невырожденных моделей при $K < 7$ однородность можно увидеть из тех же соображений, что и в предложении 7 из [3] (делается замена $z \mapsto z + a$, $w \mapsto w + b$, где $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$, и в уравнениях поверхности (3) появляются члены меньшего веса; линейными комбинациями и прибавлением к w многочленов от z уравнения последовательно приводятся к исходному виду). Конечномерность алгебры и группы для них можно получить и не находя алгебру явно. Так же, как в [4] для квадрики, из соотношений, определяющих касательную плоскость, можно получить систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и воспользоваться теоремой об экспоненциальном представлении решения [5].

Теперь о случае $K = 7$. Пусть уравнение поверхности приведено к виду

$$\begin{aligned} v^1 &= |z|^2 + F_3^1 + \dots, & v^2 &= 2|z|^2 \operatorname{Re} z + F_4^2 + \dots, & v^3 &= 2|z|^2 \operatorname{Im} z + F_4^3 + \dots, \\ v^4 &= 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + F_5^4 + \dots, & v^5 &= 2 \operatorname{Im} z^3 \bar{z} + F_5^5 + \dots, \\ v^6 &= |z|^4 + F_5^6 + \dots, & v^7 &= F_5^7 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

($[w^7] = [u^7] = 5$). Привести его к такому виду, чтобы $\tilde{F}_5^7$ не содержала u , не удастся. Действительно, пусть обратимым голоморфным преобразованием $z \mapsto f(z, w)$, $w \mapsto g(z, w)$ M переводится в поверхность $\tilde{M}$ такого же вида, причем $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$. Для определенности можем считать

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = 1,$$

так как замена $z \mapsto az$, $a \neq 0$, на наличие u не влияет, а при

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = 0$$

получаем вырождение. Разложим f, g по весовым компонентам и подставим в (5) для $\tilde{M}$. Для $j = 1, \dots, 6$ получим $g_{[w^j]}^j = w^j$, $g_m^j = 0$ при $m < [w^j]$. В весе 5 в последнем уравнении получим

$$\begin{aligned} g_5^7 &= a(w^1)^2 z + b_2 w^2 z^2 + b_3 w^3 z^2 + c w^1 z^3 + d_3 w^1 w^2 + d_2 w^1 w^3 \\ &\quad + e_4 w^4 z + e_5 w^5 z + e_6 w^6 z + s z^5 + r w^7, \\ \operatorname{Re}(i g_5^7 + \tilde{F}_5^7(f, g)) &= 0. \end{aligned}$$

Сразу получаем $s = 0$, $r \in \mathbb{R}$; поэтому можем считать $r = 1$ (на наличие u преобразование $w^7 \mapsto rw^7$ не влияет). Полагая равными 0 коэффициенты при членах, содержащих u , т.е. при

$$(u^1)^2 z, u^1 z^3, u^1 z^2 \bar{z}, u^1 u^2, u^1 u^3, u^2 z^2, u^3 z^2, u^2 |z|^2, u^3 |z|^2, u^4 z, u^5 z, u^6 z$$

в $\tilde{F}_5^7$, получаем систему из двадцати линейных уравнений на восемнадцать вещественных параметров. В общем случае она неразрешима. Однако можно заметить, что если коэффициент при $u^1 z^2 \bar{z}$ в F_5^7 не равен 0, то последнее уравнение полиномиальным преобразованием четвертой степени приводится к виду

$$v^7 = 2 \operatorname{Re}(\alpha z^4 \bar{z} + \beta z^3 \bar{z}^2 + u^1 z^2 \bar{z}) + O(6).$$

Поверхность вида

$$\begin{aligned} v^1 &= |z|^2, & v^2 &= 2|z|^2 \operatorname{Re} z, & v^3 &= 2|z|^2 \operatorname{Im} z, \\ v^4 &= 2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z}, & v^5 &= 2 \operatorname{Im} z^3 \bar{z}, & v^6 &= |z|^4, & v^7 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha z^4 \bar{z} + \beta z^3 \bar{z}^2 + u^1 z^2 \bar{z}) \end{aligned} \quad (6)$$

также назовем *невыврожденной моделью, касательной к M* . Она по-прежнему будет обладать модельными свойствами. Однородность получается также. Действительно, при заменах $z \mapsto z + a$, $w \mapsto w + b$, где $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$, в уравнениях (6) появляются члены меньшего веса. Как и выше, первые шесть уравнений последовательно приводятся к исходному виду. К w^7 применяем преобразования из лемм 1 и 2 (там появились члены, содержащие u) и прибавляем линейную комбинацию w^j ($j < 7$) и многочлен от z .

Но при $K = 7$ не удастся с помощью теоремы об экспоненциальном представлении получить конечномерность: система с постоянными коэффициентами не получается как раз из-за наличия u в уравнениях. В этом случае конечномерность группы получим, явно найдя алгебру.

2. Алгебра автоморфизмов. Вычислим $\operatorname{Aut} Q_0$. Пусть вещественное векторное поле

$$X = 2 \operatorname{Re} \left(f(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j \leq K} g^j(z, w) \frac{\partial}{\partial w^j} \right)$$

принадлежит этой алгебре. Это означает, что f, g^j голоморфны в окрестности нуля и удовлетворяют на Q соотношениям, определяющим касательную плоскость:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(ig^1 + 2\bar{z}f) &= 0, & \operatorname{Re}(ig^2 + (2\bar{z}^2 + 4|z|^2)f) &= 0, \\ \operatorname{Re}(ig^3 + (2i\bar{z}^2 - 4i|z|^2)f) &= 0, \\ \operatorname{Re}(ig^j + (2\bar{\mu}_j \bar{z}^3 + 6\mu_j z^2 \bar{z} + 4\lambda_j z \bar{z}^2)f) &= 0, & j &= 4, 5, 6, & \lambda_j \in \mathbb{R}, & \mu_j \in \mathbb{C}, \\ \operatorname{Re}(ig^7 + (8\alpha z^3 \bar{z} + 6\beta z^2 \bar{z}^2 + 4u^1 z \bar{z} + 2\bar{\alpha} \bar{z}^4 + 4\bar{\beta} \bar{z}^3 z + 2u^1 \bar{z}^2)f + (z^2 \bar{z} + \bar{z}^2 z)g^1) &= 0, \\ \alpha, \beta &\in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя разложения вида

$$\varphi(z, w) = \varphi(z, u) + \sum_{j=1}^K \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} i v^j + \dots, \quad \varphi(z, u) = \sum_q \varphi_q(u) z^q,$$

будем выделять в (7) коэффициенты при $z^m \bar{z}^n$ (эта же техника использовалась в работах [1], [3]). Вычисления здесь опускаем из-за их громоздкости. В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Алгебра автоморфизмов невырожденной модели выглядит следующим образом.*

При $K = 3$

$$\begin{aligned} f &= A + iB + (D + iE)z, \quad g^1 = C_1 + 2(B + iA)z + 2Dw^1, \\ g^2 &= C_2 + 2(B + iA)z^2 + 4Aw^1 + 3Dw^2 - Ew^3, \\ g^3 &= C_3 + 2(A - iB)z^2 + 4Bw^1 + Ew^2 + 3Dw^3. \end{aligned}$$

При $K = 4$

$$\begin{aligned} f &= A + iB + Dz, \quad g^1 = C_1 + 2(B + iA)z + 2Dw^1, \\ g^2 &= C_2 + 2(B + iA)z^2 + 4Aw^1 + 3Dw^2, \quad g^3 = C_3 + 2(A - iB)z^2 + 4Bw^1 + 3Dw^3, \\ g^4 &= C_4 + 2(B + iA)z^3 + (2\lambda + 3)Aw^2 + (2\lambda - 3)Bw^3 + 4Dw^4. \end{aligned}$$

При $K = 5$ и обычном типе

$$\begin{aligned} f &= A + iB + (D + iE)z, \quad g^1 = C_1 + 2(B + iA)z + 2Dw^1, \\ g^2 &= C_2 + 2(B + iA)z^2 + 4Aw^1 + 3Dw^2 - Ew^3, \\ g^3 &= C_3 + 2(A - iB)z^2 + 4Bw^1 + Ew^2 + 3Dw^3, \\ g^4 &= C_4 + 2(B + iA)z^3 + (2\lambda_4 + 3)Aw^2 + (2\lambda_4 - 3)Bw^3 + 4Dw^4 - 2Ew^5, \\ g^5 &= C_5 + 2(A - iB)z^3 + (2\lambda_5A + 3B)w^2 + (2\lambda_5B + 3A)w^3 + 2Ew^4 + 4Dw^5 \end{aligned}$$

(здесь $E = 0$ всегда, кроме случая $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$).

При $K = 5$ и вырожденном типе

$$\begin{aligned} f &= A + iB + Dz, \quad g^1 = C_1 + 2(B + iA)z + 2Dw^1, \\ g^2 &= C_2 + 2(B + iA)z^2 + 4Aw^1 + 3Dw^2, \quad g^3 = C_3 + 2(A - iB)z^2 + 4Bw^1 + 3Dw^3, \\ g^4 &= C_4 + 2(B + iA)z^3 + 3Aw^2 - 3Bw^3 + 4Dw^4, \quad g^5 = C_5 + 2Aw^2 + 2Bw^3 + 4Dw^5. \end{aligned}$$

При $K = 6$

$$\begin{aligned} f &= A + iB + (D + iE)z, \quad g^1 = C_1 + 2(B + iA)z + 2Dw^1, \\ g^2 &= C_2 + 2(B + iA)z^2 + 4Aw^1 + 3Dw^2 - Ew^3, \\ g^3 &= C_3 + 2(A - iB)z^2 + 4Bw^1 + Ew^2 + 3Dw^3, \\ g^4 &= C_4 + 2(B + iA)z^3 + 3Aw^2 - 3Bw^3 + 4Dw^4 - 2Ew^5, \\ g^5 &= C_5 + 2(A - iB)z^3 + 3Bw^2 + 3Aw^3 + 2Ew^4 + 4Dw^5, \\ g^6 &= C_6 + 2Aw^2 + 2Bw^3 + 4Dw^6. \end{aligned}$$

При $K = 7$

$$\begin{aligned}
 f &= A + iB + Dz, \quad g^1 = C_1 + 2(B + iA)z + 2Dw^1, \\
 g^2 &= C_2 + 2(B + iA)z^2 + 4Aw^1 + 3Dw^2, \\
 g^3 &= C_3 + 2(A - iB)z^2 + 4Bw^1 + 3Dw^3, \\
 g^4 &= C_4 + 2(B + iA)z^3 + 3Aw^2 - 3Bw^3 + 4Dw^4, \\
 g^5 &= C_5 + 2(A - iB)z^3 + 3Bw^2 + 3Aw^3 + 4Dw^5, \\
 g^6 &= C_6 + 2Aw^2 + 2Bw^3 + 4Dw^6, \\
 g^7 &= C_7 + 2\alpha(B + iA)z^4 + 2(B + iA)w^1z^2 + 2(w^1)^2A + C_1w^2 \\
 &\quad + (\operatorname{Re}(4\alpha + 2\beta - 1)A + \operatorname{Im}(2\beta - 4\alpha + i)B)w^4 \\
 &\quad + (-\operatorname{Im}(4\alpha + 2\beta + i)A + \operatorname{Re}(2\beta - 4\alpha - 1)B)w^5 \\
 &\quad + (6\operatorname{Re}\beta A + (2 - 6\operatorname{Im}\beta)B)w^6 + 5Dw^7.
 \end{aligned}$$

Здесь A, B, C_j, D, E – произвольные вещественные постоянные.

Алгебра инфинитезимальных автоморфизмов модели Q состоит из полей с полиномиальными коэффициентами, степень которых не превышает 4 (не превышает 3 в случае $K = 3$).

Группа порождается преобразованиями вида $z \mapsto z + a$ и соответствующими преобразованиями w (прибавление к w^j членов меньшего веса); $z \mapsto bz$ и соответствующими линейными преобразованиями w ; $w \mapsto w + c$ (определяются c^j). Здесь $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{C}$, если $K = 3, 6, 5$ при обычном типе с $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$; $b \in \mathbb{R}$ в остальных случаях. Таким образом, модель Q однородна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно заметить, что все преобразования из группы полиномиальны степени не выше 2 в случае $K = 3$, не выше 3 в случае $K = 4, 5, 6$, не выше 4 в случае $K = 7$.

Покажем, что $\dim \operatorname{Aut} Q \geq \dim \operatorname{Aut} M_\xi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если M и $\widetilde{M}$ – поверхности с невырожденными касательными моделями, заданные уравнениями

$$\begin{aligned}
 v^1 &= |z|^2 + F_3^1 + \dots, \quad v^2 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z + F_4^2 + \dots, \quad v^3 = 2|z|^2 \operatorname{Im} z + F_4^3 + \dots, \\
 v^j &= 2|z|^2 \operatorname{Re} \mu_j z^2 + \lambda_j |z|^4 + F_5^j + \dots, \quad j = 4, 5, 6, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \mu_j \in \mathbb{C}, \\
 v^7 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha z^4 \bar{z} + \beta z^3 \bar{z}^2 + u^1 z^2 \bar{z}) + F_6^7 + \dots, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 v^1 &= |z|^2 + \widetilde{F}_3^1 + \dots, \quad v^2 = 2|z|^2 \operatorname{Re} z + \widetilde{F}_4^2 + \dots, \quad v^3 = 2|z|^2 \operatorname{Im} z + \widetilde{F}_4^3 + \dots, \\
 v^j &= 2|z|^2 \operatorname{Re} \mu_j z^2 + \lambda_j |z|^4 + \widetilde{F}_5^j + \dots, \quad j = 4, 5, 6, \\
 v^7 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha z^4 \bar{z} + \beta z^3 \bar{z}^2 + u^1 z^2 \bar{z}) + \widetilde{F}_6^7 + \dots
 \end{aligned}$$

(несколько последних уравнений может не быть), $z \mapsto f(z, w)$, $w \mapsto g(z, w)$ – биголоморфное в окрестности нуля отображение, оставляющее нуль на месте

и переводящее росток M в $\widetilde{M}$, то при фиксированных $M, \widetilde{M}$ и фиксированном значении

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) \quad (8)$$

такое отображение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти дословно повторяет доказательство предложения 4 из [3].

СЛЕДСТВИЕ 1. $\dim \operatorname{Aut} Q \geq \dim \operatorname{Aut} M_\xi$, $\dim \operatorname{Aut}_0 Q \geq \dim \operatorname{Aut}_\xi M_\xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе неравенство следует из того, что единственный параметр в $\operatorname{Aut}_\xi M_\xi$ – это (8); а первое неравенство – из второго и однородности модели Q .

Итак, мы получили, что аналогия между Q и касательной квадрикой является достаточно полной. В заключение сформулируем очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (классификация невырожденных моделей Q). При $K = 3, 6$ все невырожденные модели Q эквивалентны.

При $K = 4$ эквивалентность определяется параметром λ .

При $K = 5$ эквивалентность определяется выбором типа и в случае обычного типа (4) параметрами λ_4 и λ_5 .

При $K = 7$ эквивалентность определяется параметрами α, β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получим, предположив, что модели эквивалентны, и разложив отображающие функции по весовым компонентам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белошадка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.
- [2] Туманов А. Е. Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 3. С. 651–659.
- [3] Белошадка В. К. CR-многообразия типа $(1, 2)$ как многообразия “сверхвысокой” коразмерности // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 2. Р. 399–404.
- [4] Белошадка В. К. Конечномерность группы автоморфизмов вещественно аналитической поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 2. С. 437–442.
- [5] Паламонов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

16.03.1999

Исправленный вариант

24.09.1999