Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Иофина, О порядке приближения средними Рисса по мультипликативным системам на классах $E_X[\varepsilon]$, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 508–523

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:53:32

О порядке приближения средними Рисса по мультипликативным системам на классах $E_X[\varepsilon]$

Т. В. Иофина

В работе находится порядок приближения средними Рисса ряда Фурье по мультипликативной системе класса функций с заданной мажорантой последовательности наилучших приближений. В одних случаях приближения средними Рисса и наилучшие приближения рассматриваются в одном пространстве, а в других приближения средними Рисса рассматриваются в пространствах с более сильной нормой.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел такая, что $2 \leq p_n \leq N$ при $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x_n < p_n. \quad (1)$$

Представление (1) единственно, если для $x = k/m_j$, $0 < k < m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x, y \in [0, 1)$ вида (1) положим

$$x \oplus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{m_n}, \quad z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n), \quad z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}.$$

Аналогично определяется обратная операция $x \ominus y$.

Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k_i < p_i, \quad (2)$$

и $x \in [0, 1)$ имеет разложение (1), то по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00097-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4383.2010.1).

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, называемая *системой Виленкина*, ортонормирована и полна в $L^1[0, 1)$. Кроме того, при фиксированном $x \in [0, 1)$ для почти всех $y \in [0, 1)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \quad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}.$$

Эти свойства можно найти в [1; §§ 1.5, 2.8]. Пусть $f \in L^1[0, 1)$. Коэффициенты Фурье, частная сумма Фурье и ядро Дирихле по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)} dt, & n \in \mathbb{Z}_+; \\ S_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\chi_k(x), & n \in \mathbb{N}; \\ D_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), & n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Известно, что $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0, 1/m_n)}(x)$, где X_E – индикатор множества E . Кроме того, для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0, 1)$ имеет место неравенство $D_n(x) \leq N/x$ (см. [2; гл. 4, § 3]). Отсюда легко следует, что

$$\int_0^1 |D_n(x)|^p dx \leq \int_0^{1/n} n^p dx + \int_{1/n}^1 \left(\frac{N}{x}\right)^p dx = O(n^{p-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < \infty. \quad (3)$$

Если ввести **P**-ичную свертку равенством

$$f * g(x) = \int_0^1 f(t)g(x \ominus t) dt$$

для $f, g \in L^1[0, 1)$, то имеем $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$, $x \in [0, 1)$.

В работе будет также рассматриваться ядро Фейера по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^\infty$:

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{D_k(x)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По определению средние Рисса функции $f \in L^1[0, 1)$ суть

$$z_{n,k}(f)(x) = \widehat{f}(0) + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i^k}{n^k}\right) \widehat{f}(i)\chi_i(x), \quad \text{где } k, n \in \mathbb{N}.$$

Пространство $L^p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из измеримых на $[0, 1)$ функций таких, что

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Пространство $C^*[0, 1)$ содержит все измеримые на $[0, 1)$ функции f такие, что

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1)} |f(t)| < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_\infty = 0.$$

Везде далее при $p = \infty$ запись $f \in L^p[0, 1)$ означает $f \in C^*[0, 1)$. Максимальная функция $M(f)$ для $f \in L^1[0, 1)$ определяется равенством

$$M(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |S_{m_n}(f)(x)|.$$

Если $\|f\|_H := \|M(f)\|_1 < \infty$, то f принадлежит $\mathbf{P}$ -ичному пространству Харди $H(\mathbf{P}, [0, 1))$. Подробней об этих пространствах в двоичном случае ($p_i \equiv 2$) см. [3; гл. 3].

Через $\text{osc}(f, [a, b))$ обозначим $\sup_{x, y \in [a, b)} |f(x) - f(y)|$, а через $I_j^{(n)}$ – полуинтервал $[(j-1)/m_n, j/m_n)$, $1 \leq j \leq m_n$. Введем p -флуктуационные суммы $\kappa_p(f, 0) = \text{osc}(f, [0, 1))$ и

$$\kappa_p(f, n) = \left(\sum_{j=1}^{m_n} (\text{osc}(f, I_j^{(n)})^p \right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По определению $V_p(f)_n = \sup_{k \geq n} \kappa_p(f, k)$. Множество ограниченных на $[0, 1)$ функций $f \in B[0, 1)$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} V_p(f)_n = 0$, обозначается через $MC_p[0, 1)$ и является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{MC_p} = \max(V_p(f)_0, \|f\|_\infty)$$

(см. [4]). Ясно, что $\|f\|_{MC_p} \geq \|f\|_\infty$. Далее через $X[0, 1)$ будем обозначать одно из следующих пространств: $L^p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $C^*[0, 1)$, $H(\mathbf{P}, [0, 1))$, $MC_p[0, 1)$, $1 < p < \infty$.

Пусть

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k : a_k \in \mathbb{C} \right\}, \quad E_n(f)_X = \inf \{ \|f - t_n\|_X : t_n \in \mathcal{P}_n \},$$

где $X[0, 1)$ – одно из указанных выше пространств. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – убывающая к нулю положительная последовательность, тогда

$$E_X(\varepsilon) = \{f \in X[0, 1) : E_n(f)_X \leq \varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

При $X = L^p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, будем обозначать $E_X(\varepsilon)$ через $E_p(\varepsilon)$ и $E_n(f)_X$ через $E_n(f)_p$.

Пусть $r > 0$,

$$T_l^{(r)}(x) = \sum_{i=1}^{m_l-1} i^r \chi_i(x), \quad l \in \mathbb{N},$$

и для $f \in X[0, 1)$ существует $g \in X[0, 1)$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|T_l^{(r)} * f - g\|_X = 0.$$

Тогда f имеет сильную производную $g = I^{(r)}f$ порядка r в $X[0, 1)$. При $r = 0$ по определению $I^{(0)}f = f$ (см. [5]). Множество функций $f \in X[0, 1)$, для которых существует $I^{(r)}f \in X[0, 1)$, обозначим через $W^r X[0, 1)$.

Целью настоящей работы является распространение ряда результатов Ильясова [6], [7] на мультипликативные системы ограниченного типа. Сначала мы найдем точный порядок приближения средними Рисса по системе $\{\chi_i\}_{i=0}^\infty$ в метрике

$MC_p[0, 1)$ или $C^*[0, 1)$ для функций из классов $E_p(\varepsilon)$ или $E_H(\varepsilon)$ при некоторых условиях на $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$. В работе [7] рассматривалась аналогичная задача для тригонометрических рядов Фурье и равномерной нормы. Затем определяется порядок величины $\sup\{\|f - z_{n,k}(f)\|_X : f \in E_X(\varepsilon)\}$ для пространств $L^p[0, 1)$, $1 < p \leq \infty$, и $H(\mathbf{P}, [0, 1))$. Аналогичная задача для $p = 1$ пока остается открытой, в отличие от тригонометрического случая (см. [6]).

Будем писать $A_n \asymp B_n$, если существуют C_1, C_2 такие, что $C_1 A_n < B_n < C_2 A_n$.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 [8; с. 246]. Пусть $f \in L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$, и ряд $\sum_{n=1}^\infty n^{1/p-1} E_n(f)_p$ сходится. Тогда f совпадает почти всюду с функцией $g \in MC_p[0, 1)$ и

$$E_n(g)_{MC_p} \leq C_1 \left(n^{1/p} E_n(f)_p + \sum_{i=n+1}^\infty i^{1/p-1} E_i(f)_p \right).$$

ЛЕММА 2. 1) Пусть $r > 0$, $t_n \in \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in X[0, 1)$. Тогда

$$\|I^{(r)}(t_n)\|_X \leq C n^r \|t_n\|_X.$$

2) Пусть $r > 0$, $f \in X[0, 1)$ и сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty n^{r-1} E_n(f)_X$. Тогда существует $I^{(r)}f \in X[0, 1)$ и

$$E_n(I^{(r)}f)_X \leq C \left(n^r E_n(f)_X + \sum_{i=n}^\infty i^{r-1} E_i(f)_X \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть леммы доказана в [4; лемма 5] для $X = MC_p$, $1 < p < \infty$, при этом доказательство использует оценку $\|T_l^{(r)}\|_1$ и неравенство вида $\|f * g\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_1$, которое верно для всех остальных $X[0, 1)$ (см. [3; глава 4, лемма 1] в двоичном случае). Поэтому результат 1) справедлив для всех $X[0, 1)$. Вторая часть леммы доказана для $n = m_k$, $k \in \mathbb{N}$, и $X = MC_p$, $1 < p < \infty$, в [4; теорема 3]. Доказательство проводится по схеме Бернштейна с использованием 1), поэтому оно переносится на любые n и $X[0, 1)$.

В работах Блюмина [9], [10] установлены следующие оценки приближения линейными средними рядов Фурье по системе $\{\chi_i\}_{i=0}^\infty$.

ЛЕММА 3. 1) Пусть $\{a_{\nu,i}\}_{\nu,i=1}^\infty$ – нижнетреугольная матрица ($a_{\nu,i} = 0$ при $\nu > i$), $a_{0,i} = 1$ для всех i и $f \in L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$; тогда

$$\left\| f - \sum_{\nu=0}^i a_{\nu,i} \widehat{f}(\nu) \chi_\nu \right\|_p \leq C(p) \left(\left(\sum_{j=0}^n \rho_{m_j}^\beta(i) (E_{m_j}(f)_p)^\beta \right)^{1/\beta} + E_i(f)_p \right), \quad (4)$$

где

$$m_n \leq i < m_{n+1}, \quad \rho_{m_j}(i) = \sum_{\nu=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_{\nu,i} - a_{\nu+1,i}| + |1 - a_{m_{j+1}-1,i}|, \quad \beta = \min(p, 2).$$

2) Пусть $f \in X[0, 1)$, матрица $\{a_{\nu,i}\}_{\nu,i=1}^\infty$ такая же, как и в 1), $n \in [m_r, m_{r+1})$,

$$\Phi_i = \left\| \sum_{j=0}^i a_{ji} \chi_j \right\|_1, \quad \gamma(s, i) = \left\| \sum_{j=1}^{m_s-1} (1 - a_{ji}) \chi_j \right\|_1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left\| f - \sum_{j=0}^n a_{ji} \widehat{f}(j) \chi_j \right\|_X \leq (1 + \Phi_n) E_n(f)_X + 2 \sum_{s=0}^r \gamma(s+1, n) E_{m_s}(f)_X. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0, 1]$, $\beta = \min(p, 2)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|f - z_{n,k}(f)\|_p \leq C n^{-k} \left(\sum_{i=1}^n i^{\beta k - 1} E_i^\beta(f)_p \right)^{1/\beta}. \quad (6)$$

2) Пусть $f \in X[0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|f - z_{n,k}(f)\|_X \leq C n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_i(f)_X. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем (6). Для средних Рисса имеем в обозначениях леммы 3 $a_{\nu,i} = 1 - (\nu/i)^k$, если $0 \leq \nu \leq i$ и $a_{\nu,i} = 0$, если $\nu > i$.

Тогда при $m_n \leq i < m_{n+1}$, $j \leq n$,

$$\begin{aligned} \rho_{m_j}(i) &= \sum_{\nu=m_j}^{m_{j+1}-1} |\nu^k - (\nu+1)^k| i^{-k} + |(m_{j+1}-1)|^k i^{-k} \\ &\leq C_1 \sum_{\nu=m_j}^{m_{j+1}-1} \nu^{k-1} i^{-k} + m_{j+1}^k i^{-k} \leq C_2 m_{j+1}^k i^{-k} \leq C_2 N^k m_j^k i^{-k}. \end{aligned}$$

Применяя (4) из леммы 3, имеем

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{\nu=0}^{i-1} \left(1 - \frac{\nu^k}{i^k} \right) \widehat{f}(\nu) \chi_\nu \right\|_p &\leq C_3 \left(\left(\sum_{j=0}^n (m_j^k i^{-k})^\beta (E_{m_j}(f)_p)^\beta \right)^{1/\beta} + E_i(f)_p \right) \\ &\leq C_3 \left(i^{-k} \left(\sum_{j=0}^n m_j^{k\beta-1} m_j E_{m_j}^\beta(f)_p \right)^{1/\beta} + E_i(f)_p \right). \end{aligned}$$

Используя монотонность $E_n(f)_p$, находим, что

$$m_j^{k\beta} E_{m_j}^\beta(f)_p \leq C_4 \sum_{l=m_{j-1}}^{m_j-1} l^{k\beta-1} E_l^\beta(f)_p,$$

откуда легко получаем оценку (6).

2) Будем использовать оценку (5) леммы 3. Для оценки величины

$$\gamma(s+1; r) = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{m_{s+1}-1} \left(1 - 1 + \left(\frac{i}{r} \right)^k \right) \chi_i(x) \right| dx = r^{-k} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{m_{s+1}-1} i^k \chi_i(x) \right| dx$$

применим лемму 2, согласно которой

$$\gamma(s+1, r) \leq C_5 r^{-k} (m_{s+1})^k \left\| \sum_{i=1}^{m_{s+1}-1} \chi_i \right\|_1 \leq 2C_5 m_{s+1}^k r^{-k}.$$

С другой стороны, по аналогу результата Фомина (см. [2; глава 4, теорема 4.21]), если при некотором $\eta \in [1, 2]$ выполняется неравенство

$$r^{1-1/\eta} \left(\sum_{i=1}^{r-1} |a_{r,i-1} - a_{r,i}|^\eta + |a_{r,r-1}|^\eta \right)^{1/\eta} \leq C, \quad r \in \mathbb{N},$$

то величины Φ_r из леммы 3 ограничены. Далее,

$$\begin{aligned} & r^{1-1/\eta} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \left| \left(\frac{i-1}{r} \right)^k - \left(\frac{i}{r} \right)^k \right|^\eta + \left| 1 - \left(\frac{r-1}{r} \right)^k \right|^\eta \right)^{1/\eta} \\ &= r^{1-1/\eta} \left(r^{-k\eta} \sum_{i=1}^r \left(i^k - (i-1)^k \right)^\eta \right)^{1/\eta} \leq C_6 r^{1-1/\eta-k} \left(\sum_{i=1}^r i^{(k-1)\eta} \right)^{1/\eta} \\ &\leq C_7 r^{1-1/\eta-k} (r^{(k-1)\eta+1})^{1/\eta} = C_7. \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (5) и снова используя монотонность $E_n(f)_X$, доказываем неравенство (7).

ЛЕММА 4 [6]. Пусть $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — убывающая к 0 последовательность неотрицательных действительных чисел, $\Delta\varepsilon_i^p = \varepsilon_i^p - \varepsilon_{i+1}^p$, тогда последовательность

$$a_n = \left(\sum_{i=n}^\infty \frac{(i-n+1)\Delta\varepsilon_i^p}{(i+1)^p} \right)^{1/p}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $0 < a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $n^{p-1}a_n^p \leq \varepsilon_n^p$;
- 3) для $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p < \infty$ имеем

$$n^{-kp} \sum_{i=1}^n i^{kp-1} \varepsilon_i^p \leq C_4(k, p) \left(n^{-kp} \sum_{i=1}^n a_i^p i^{kp+p-2} + \sum_{i=n+1}^\infty a_i^p i^{p-2} \right).$$

Первое утверждение леммы 5 и правая часть следующего ниже неравенства установлены в [11] для $p = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, откуда следует его справедливость для всех $1 < p < \infty$.

ЛЕММА 5. Пусть $b_i \in \mathbb{C}$ для $i \in \mathbb{Z}_+$ и $\sum_{i=0}^\infty |b_i|^2 < \infty$. Тогда ряд $\sum_{i=0}^\infty b_i \chi_{m_i}(x)$ сходится п.в. и для любого $p > 1$ справедливо неравенство

$$C_1 \left(\sum_{i=0}^\infty |b_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=0}^\infty b_i \chi_{m_i} \right\|_p \leq C_2 \left(\sum_{i=0}^\infty |b_i|^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства левого неравенства воспользуемся неравенством Ватари [12]

$$C_3 \|f\|_p \geq \left\| \left(|\widehat{f}(0)|^2 + \sum_{n=0}^\infty |S_{m_{n+1}}(f) - S_{m_n}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p,$$

которое справедливо для $f \in L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Для $f = \sum_{i=0}^\infty b_i \chi_{m_i}(x)$ ясно, что $|S_{m_{n+1}}(f) - S_{m_n}(f)| = |b_n \chi_{m_n}| = |b_n|$, откуда легко следует нужное неравенство.

Последняя лемма является аналогом неравенства Харди и доказана Чао [13] (см. также [14; с. 186, теорема 6.3]).

ЛЕММА 6. Пусть $f \in H(\mathbf{P}, [0, 1))$, тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(i)|}{i} \leq C \|f\|_H.$$

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L^p[0, 1)$, $1 < p < \infty$, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r+1/p-1} E_n(f)_p < \infty.$$

Тогда f совпадает почти всюду с функцией g такой, что существует $I^{(r)}g \in MC_p[0, 1)$ и

$$\|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_{MC_p} \leq C_2 \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r+1/p-1} E_i(f)_p + n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{r+1/p-1} E_i(f)_p \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} E_n(f)_p$, поэтому по лемме 1 функция f эквивалентна функции $g \in MC_p[0, 1)$ и

$$E_n(g)_{MC_p} \leq C_1 \left(n^{1/p} E_n(f)_p + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{1/p-1} E_i(f)_p \right).$$

Для доказательства существования $I^{(r)}g$ при $r > 0$ оценим сумму ряда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} i^{r-1} E_i(g)_{MC_p} &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{r-1} i^{1/p} E_i(f)_p + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} j^{1/p-1} E_j(f)_p \right) i^{r-1} \right) \\ &= C_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{r+1/p-1} E_i(f)_p + \sum_{j=1}^{\infty} j^{1/p-1} E_j(g)_p \sum_{i=1}^j i^{r-1} \right) \\ &\leq C_2 \sum_{i=1}^{\infty} i^{r+1/p-1} E_i(f)_p < \infty. \end{aligned}$$

По лемме 2 существует $I^{(r)}g \in MC_p[0, 1)$ и

$$E_n(I^{(r)}g)_{MC_p} \leq C_3 \left(n^r E_n(g)_{MC_p} + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r-1} E_i(f)_{MC_p} \right).$$

Поскольку $1/p - 1 < 0$, то $i^{1/p-1} \leq n^{1/p-1}$ при $i \geq n$. Используя лемму 1 и меняя порядок суммирования, получаем при $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(I^{(r)}g)_{MC_p} \leq C_3 \left(n^r n^{1/p} E_n(f)_p + n^r \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{1/p-1} E_i(f)_p \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r-1} \left(i^{1/p} E_i(f)_p + \sum_{j=i+1}^{\infty} j^{1/p-1} E_j(f)_p \right) \\
& \leq C_3 \left(n^{r+1/p} E_n(f)_p + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r+1/p-1} E_i(f)_p \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r-1+1/p} E_i(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^j i^{r-1} j^{1/p-1} E_j(f)_p \right) \\
& \leq C_4 \left(n^{r+1/p} E_n(f)_p + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r+1/p-1} E_i(f)_p \right).
\end{aligned}$$

Согласно неравенству (7) верна оценка

$$\|\phi - z_{n,k}(\phi)\|_{MC_p} \leq C_5 n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_i(\phi)_{MC_p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_{MC_p} \\
& \leq C_5 n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_i(I^{(r)}g)_{MC_p} \\
& \leq C_6 \left(n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \left(i^{r+1/p} E_i(f)_p + \sum_{j=i+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p \right) \right) \\
& \leq C_6 \left(n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1+r+1/p} E_i(f)_p + n^{-k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n i^{k-1} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p \right. \\
& \quad \left. + n^{-k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\infty} i^{k-1} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p \right) \\
& \leq C_7 \left(n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1+r+1/p} E_i(f)_p \right. \\
& \quad \left. + n^{-k} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i^{k-1} \right) j^{r+1/p-1} E_j(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p \right) \\
& \leq C_8 \left(n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1+r+1/p} E_i(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} E_j(f)_p \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ и убывающая к нулю последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r+1/p-1} \varepsilon_n < +\infty$. Тогда любая функция $f \in E_p(\varepsilon)$ эквивалентна $g \in W^r MC_p[0, 1)$ и при этом

$$\sup\{\|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_{MC_p} : f \in E_p(\varepsilon)\} \asymp \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r+1/p-1} \varepsilon_i + n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k+r+1/p-1} \varepsilon_i. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы и оценка сверху в (8) следуют из теоремы 1. Для доказательства оценки снизу в (8) рассмотрим $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n$, где

$$a_n = \sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) = \sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-1} \Delta \varepsilon_i.$$

Применяя преобразование Абеля и (3), получаем при $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E_n(g)_p &= \left\| \sum_{j=n}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} i^{1/p-1} \Delta \varepsilon_i \right) \chi_j \right\|_p = \left\| \sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-1} \Delta \varepsilon_i \sum_{j=1}^i \chi_j \right\|_p \\ &\leq C_1 \sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-1} \Delta \varepsilon_i i^{1-1/p} = C_1 \varepsilon_n, \end{aligned}$$

т.е. $g/C_1 \in E_p(\varepsilon)$. Так как $\|\cdot\|_{MC_p} \geq \|\cdot\|_{\infty}$, будем оценивать снизу равномерную норму. Имеем

$$\begin{aligned} &\|I^{(r)}(g) - z_{n,k}(I^{(r)}(g))\|_{\infty} \\ &= |I^{(r)}(g)(0) - z_{n,k}(I^{(r)}(g))(0)| = \sum_{i=1}^n i^r \frac{i^k}{n^k} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^r a_i \\ &= n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k+r} \sum_{j=i}^{\infty} j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^r \sum_{j=i}^{\infty} j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j \\ &= n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k+r} \left(\sum_{j=i}^n + \sum_{j=n+1}^{\infty} \right) j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j \sum_{i=n+1}^j i^r \\ &\geq C_2 \left(n^{-k} \sum_{j=1}^n j^{r+k+1/p} \Delta \varepsilon_j + n^{-k} n^{r+k+1} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^j i^r j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j - \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^n i^r j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j \right) \\ &= C_2 (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 - \Sigma_4). \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что $\Sigma_4 \leq \Sigma_3$ и из убывания $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ вытекает оценка $\sum_{i=[n/2]}^n i^{r+k} n^{-k} a_i \geq C_3 n^{r+1} a_n$, откуда

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &\leq C_4 n^{r+1} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1} \Delta \varepsilon_j \\ &\leq C_5 n^{r+1} a_n \leq C_6 \sum_{i=[n/2]}^n \frac{i^{r+k}}{n^k} a_i \leq \|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_{\infty} \end{aligned} \tag{10}$$

(см. начало (9)). Значит, $\|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_\infty$ оценивается снизу через $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$. Применяя преобразование Абеля, имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 &\geq C_7 \left(n^{-k} \sum_{j=1}^n (j^{r+k+1/p} - (j-1)^{r+k+1/p}) \varepsilon_j - n^{r+1/p} \varepsilon_{n+1} \right. \\ &\quad \left. + n^{r+1} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p} \Delta \varepsilon_j \right) \\ &\geq C_8 n^{-k} \sum_{j=1}^n j^{r+k+1/p-1} \varepsilon_j - C_7 n^{r+1/p} \varepsilon_{n+1} + C_8 \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1/p-1} \varepsilon_j. \end{aligned}$$

Поскольку в силу преобразования Абеля, (9) и (10) находим, что

$$\begin{aligned} n^{r+1/p} \varepsilon_{n+1} &= n^{r+1/p} \sum_{i=n}^{\infty} \Delta \varepsilon_i = n^{r+1/p} \sum_{i=n}^{\infty} i^{1-1/p} \Delta a_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} i^{r+1} \Delta a_i \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (i^{r+1} - (i-1)^{r+1}) a_i + n^{r+1} a_n \\ &\leq C_9 \sum_{i=n+1}^{\infty} i^r a_i + n^{r+1} a_n \leq C_{10} \|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_\infty, \end{aligned}$$

то $\|I^{(r)}(g) - z_{n,k}(I^{(r)}(g))\|_\infty$ оценивается снизу через правую часть (8). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 2 имеем

$$\sup\{\|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_\infty; f \in E_p(\varepsilon)\} \asymp \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{r+1/p-1} \varepsilon_i + n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k+r+1/p-1} \varepsilon_i. \quad (8')$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть убывающая к нулю последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\sum_{n=1}^\infty n^r \varepsilon_n < +\infty$. Тогда любая функция $f \in E_1(\varepsilon)$ (соответственно $f \in E_H(\varepsilon)$) эквивалентна (соответственно равна почти всюду) $g \in W^r C^*[0, 1]$ и при этом

$$\sup\{\|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_\infty; f \in E_1(\varepsilon)\} \asymp \sum_{i=n+1}^{\infty} i^r \varepsilon_i + n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k+r} \varepsilon_i, \quad (11)$$

$$\sup\{\|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_\infty; f \in E_H(\varepsilon)\} \asymp \sum_{i=n+1}^{\infty} i^r \varepsilon_i + n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k+r} \varepsilon_i. \quad (11')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_H$, то в (11) и (11') оценку сверху достаточно доказать для $L_1[0, 1]$, а оценку снизу – для $H(\mathbf{P}, [0, 1])$. Оценка сверху доказывается с помощью (7) аналогично теореме 1, только вместо леммы 1 используется следующая теорема вложения: пусть $f \in L^1[0, 1]$ и $\sum_{n=1}^\infty E_n(f)_1 < \infty$, тогда f совпадает почти всюду с $f_0 \in C^*[0, 1]$ и

$$E_n(f)_\infty \leq C_1(nE_n(f)_1 + \sum_{i=n+1}^{\infty} E_i(f)_1)$$

(см. близкий результат в [2; глава 4, теорема 4.20 б)). Для доказательства оценки снизу рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x))(\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}).$$

Так как $\|D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x)\|_H = \|D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x)\|_1 \leq 2$, то

$$\|g - S_{m_n}(g)\|_H \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) \|D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x)\|_H \leq 2\varepsilon_{m_{n+1}}$$

и, тем более, $E_{m_n}(g)_H \leq 2\varepsilon_{m_{n+1}}$. Если $i \in [m_n, m_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$E_i(g)_H \leq E_{m_n}(g)_H \leq 2\varepsilon_{m_{n+1}} \leq 2\varepsilon_i.$$

Таким образом, $g/2 \in E_H(\varepsilon)$.

Рассмотрим

$$I^{(r)}g = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\varepsilon_{m_i} \sum_{j=m_{i-1}}^{m_j-1} j^r \chi_j.$$

Если $n \in [m_l, m_{l+1})$, то имеем (см. (9))

$$\begin{aligned} & \|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_{\infty} \\ &= n^{-k} \left(\sum_{i=1}^l (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) \sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} j^{k+r} + \sum_{j=m_l}^n j^{k+r} (\varepsilon_{m_{l+1}} - \varepsilon_{m_{l+2}}) \right) \\ &+ \sum_{j=n+1}^{m_{l+1}-1} j^r (\varepsilon_{m_{l+1}} - \varepsilon_{m_{l+2}}) + \sum_{i=l+2}^{\infty} (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) \sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} j^r \\ &\geq C_2 \left(n^{-k} \sum_{i=1}^{l+1} (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) \sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} j^{k+r} + \sum_{i=l}^{\infty} (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) \sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} j^r \right), \quad (12) \end{aligned}$$

поскольку $N^{-k} \leq j^k n^{-k} \leq N^k$ при $j, n \in [m_l, m_{l+1})$. Так как $m_i/m_{i-1} \geq 2$, то легко видеть, что

$$\sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} j^r \geq C_3 m_i^{r+1} \quad \text{и} \quad \sum_{j=m_{i-1}}^{m_i-1} j^{k+r} \geq C_3 m_i^{k+r+1}. \quad (13)$$

Используя (12), (13) и преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} & \|I^{(r)}g - z_{n,k}(I^{(r)}g)\|_{\infty} \\ &\geq C_4 n^{-k} \sum_{i=1}^{l+1} (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) m_i^{k+r+1} + C_5 \sum_{i=l+1}^{\infty} (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) m_i^{r+1} \\ &\geq C_4 n^{-k} \left(\sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_{m_i} (m_i^{k+r+1} - m_{i-1}^{k+r+1}) - \varepsilon_{m_{l+2}} m_{l+1}^{k+r+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_5 \left(\sum_{i=l+1}^{\infty} \varepsilon_{m_i} (m_i^{r+1} - m_{i-1}^{r+1}) + \varepsilon_{m_l} m_{l-1}^{r+1} \right) \\
& \geq 2^{-1} C_4 n^{-k} \left(\sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_{m_i} m_i^{k+r+1} \right) - C_4 \varepsilon_{m_{l+2}} m_{l+1}^{k+r+1} n^{-k} \\
& \quad + 2^{-1} C_5 \sum_{i=l+1}^{\infty} \varepsilon_{m_i} m_i^{r+1} + C_5 \varepsilon_{m_{l+1}} m_l^{r+1} \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{14}$$

Если мы уменьшим константу C_4 так, чтобы $C_5 \geq N^{k+r+1} C_4$, то $C_5 \varepsilon_{m_{l+1}} m_l^{r+1} \geq C_4 \varepsilon_{m_{l+2}} m_{l+1}^{k+r+1} n^{-k}$, т.е. $I_2 + I_4 \geq 0$. Наконец, из монотонности ε_j при $n \in [m_l, m_{l+1})$ находим, что

$$\sum_{j=1}^n j^{k+r} \varepsilon_j \leq \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_{m_{i-1}} \sum_{i=m_{i-1}}^{m_i-1} j^{k+r} \leq C_6 \sum_{i=1}^{l+1} m_i^{k+r+1} \varepsilon_{m_i}. \tag{15}$$

Здесь C_6 зависит от $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$. Аналогично имеем

$$\sum_{i=l}^{\infty} m_i^{r+1} \varepsilon_{m_i} \geq C_7 \sum_{j=n+1}^{\infty} j^r \varepsilon_j. \tag{16}$$

Поскольку $m_l^{r+1} \varepsilon_{m_l} \leq N^k n^{-k} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_{m_i} m_i^{k+r-1}$, то, подставляя (15) и (16) в (14), получаем оценку снизу в (11'). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$, $\beta = \min(2, p)$, $n \in \mathbb{N}$ и $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность. Тогда

$$\sup\{\|f - z_{n,k}(f)\|_p; f \in E_p(\varepsilon)\} \asymp n^{-k} \left(\sum_{i=1}^n i^{\beta k-1} \varepsilon_i^{\beta} \right)^{1/\beta}. \tag{17}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из неравенства (6) следствия 1. Для получения оценки снизу при $1 < p \leq 2$ рассмотрим функцию $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, где a_n определены в лемме 4. Пользуясь неравенством Пэли (см. [15; теорема 6.3.2]), имеем

$$\begin{aligned}
\|g(x) - z_{n,k}(g)(x)\|_p &= \left\| \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^k a_i \chi_i(x) + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \chi_i(x) \right\|_p \\
&\geq C_1 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^{pk} a_i^p i^{p-2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^p i^{p-2} \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

В силу 3) из леммы 4 получаем

$$\|g(x) - z_{n,k}(g)(x)\|_p \geq C_2 n^{-k} \left(\sum_{i=1}^n i^{kp-1} \varepsilon_i^p \right)^{1/p}.$$

С другой стороны, так как $a_n \downarrow 0$, то согласно [15; теорема 1]

$$E_n(g)_p \leq C_3 \left(n^{1-1/p} a_n + \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \right)^{1/p} \right). \quad (18)$$

Из леммы 4 следует, что $n^{1-1/p} a_n \leq \varepsilon_n$, а из определения a_n выводим неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i-n+1)}{(i+1)^p} \Delta \varepsilon_i^p \sum_{k=n}^i k^{p-2} \leq C_4 \sum_{i=n}^{\infty} (i+1)^{1-p} \Delta \varepsilon_i^p (i+1)^{p-1} = C_4 \varepsilon_n^p.$$

Подставляя эту оценку в (18), получаем, что $E_n(g)_p \leq C_5 \varepsilon_n$, откуда следует оценка снизу в (17).

Пусть $2 < p < \infty$. Рассмотрим функцию $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon_{m_i}^2 - \varepsilon_{m_{i+1}}^2)^{1/2} \chi_{m_i}(x)$. Согласно лемме 5 при $n \in (m_j, m_{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\begin{aligned} E_n(g)_p &\leq \left\| \sum_{i=j+1}^{\infty} (\varepsilon_{m_i}^2 - \varepsilon_{m_{i+1}}^2)^{1/2} \chi_{m_i} \right\|_p \\ &\leq C_6 \left(\sum_{i=j+1}^{\infty} (\varepsilon_{m_i}^2 - \varepsilon_{m_{i+1}}^2) \right)^{1/2} = C_6 \varepsilon_{m_{j+1}} \leq C_6 \varepsilon_n, \end{aligned}$$

т.е. $g/C_6 \in E_p(\varepsilon)$. Также по лемме 5 при $n \in (m_j, m_{j+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} \|f - z_{n,k}(f)\|_p &\geq C_7 \left(\sum_{i=0}^j \left(\frac{m_i}{n} \right)^{2k} |\widehat{g}(m_i)|^2 + \sum_{i=j+1}^{\infty} |\widehat{g}(m_i)|^2 \right)^{1/2} \\ &= C_7 \left(\sum_{i=0}^j m_i^{2k} n^{-2k} (\varepsilon_{m_i}^2 - \varepsilon_{m_{i+1}}^2) + \sum_{i=j+1}^{\infty} (\varepsilon_{m_i}^2 - \varepsilon_{m_{i+1}}^2) \right)^{1/2} \\ &= C_7 \left(n^{-2k} \sum_{i=1}^j (m_i^{2k} - m_{i-1}^{2k}) \varepsilon_{m_i}^2 + n^{-2k} \varepsilon_{m_0}^2 + \varepsilon_{m_{j+1}}^2 \left(1 - \frac{m_j^{2k}}{n^{2k}} \right) \right)^{1/2} \\ &\geq C_8 n^{-k} \left(\sum_{i=0}^j m_i^{2k} \varepsilon_{m_i}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поскольку $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена и $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает, то легко видеть, что

$$\|f - z_{n,k}(f)\|_p \geq C_2 n^{-k} \left(\sum_{l=1}^{m_{j+1}-1} \varepsilon_l^2 l^{2k-1} \right)^{1/2} \geq C_9 n^{-k} \left(\sum_{l=1}^n \varepsilon_l^2 l^{2k-1} \right)^{1/2},$$

что доказывает оценку снизу в (17) при $p > 2$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство теоремы 4 во многом аналогично доказательству теоремы 1 в [6]. Это связано с тем, что оценка вида (18) справедлива и для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, а также с одинаковым поведением лакунарных рядов по тригонометрической и мультипликативным системам (см. лемму 5).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ и $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – убывающая к нулю последовательность. Тогда

$$\sup\{\|f - z_{n,k}(f)\|_H : f \in E_H(\varepsilon)\} \asymp n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \varepsilon_i, \quad (19)$$

$$\sup\{\|f - z_{n,k}(f)\|_\infty : f \in E_\infty(\varepsilon)\} \asymp n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \varepsilon_i. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки сверху в (19) и (20) вытекают из неравенства (7) следствия 1. Для доказательства оценки снизу в (20) рассмотрим функцию $g(x) = \sum_{i=1}^\infty (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \chi_i(x)$. Тогда

$$E_n(g)_\infty \leq \sum_{i=n}^\infty (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \|\chi_i\|_\infty = \varepsilon_n.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|g - z_{n,k}(g)\|_\infty &= n^{-k} \sum_{i=1}^n i^k (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \sum_{i=n+1}^\infty (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \\ &= n^{-k} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (i^k - (i-1)^k) - n^{-k} \varepsilon_{n+1} n^k + \varepsilon_{n+1} \geq C_1 n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \varepsilon_i, \end{aligned}$$

что доказывает оценку снизу в (20).

Для вывода оценки снизу в (19) рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{i=1}^\infty (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) (D_{m_i}(x) - D_{m_{i+1}}(x)).$$

Как показано при доказательстве теоремы 3, $g/2 \in E_H(\varepsilon)$. С другой стороны, используя лемму 6, имеем

$$\|g(x) - z_{n,k}(g)(x)\|_H \geq C_2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^{k-1}}{n^k} |\widehat{g}(i)| + \sum_{i=n}^\infty i^{-1} |\widehat{g}(i)| \right).$$

Пусть $n \in [m_j, m_{j+1})$. Тогда по определению g находим, что

$$\begin{aligned} &\|g(x) - z_{n,k}(g)(x)\|_H \\ &\geq C_2 \left(\sum_{l=1}^j \sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1} \frac{i^{k-1}}{n^k} (\varepsilon_{m_l} - \varepsilon_{m_{l+1}}) + \sum_{i=m_j}^{n-1} \frac{i^{k-1}}{n^k} (\varepsilon_{m_{j+1}} - \varepsilon_{m_{j+2}}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=n}^{m_{j+1}-1} i^{-1} (\varepsilon_{m_{j+1}} - \varepsilon_{m_{j+2}}) + \sum_{l=j+2}^\infty \sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1} i^{-1} (\varepsilon_{m_l} - \varepsilon_{m_{l+1}}) \right) \\ &= C_2 (I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \end{aligned}$$

Так как $i/n \geq m_j/m_{j+1} \geq 1/N$ при $i \in [m_j, m_{j+1})$ и $(m_l - m_{l-1})/m_l > 1/2$, $l \in \mathbb{N}$, то справедливо неравенство

$$I_2 + I_3 \geq C_3(N) m_j^{-1} \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} (\varepsilon_{m_{j+1}} - \varepsilon_{m_{j+2}}) \geq C_4(N) (\varepsilon_{m_{j+1}} - \varepsilon_{m_{j+2}})$$

и, аналогично,

$$I_4 \geq \sum_{l=j+2}^{\infty} \sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1} m_l^{-1} (\varepsilon_{m_l} - \varepsilon_{m_{l+1}}) \geq 2^{-1} \sum_{i=j+2}^{\infty} (\varepsilon_{m_i} - \varepsilon_{m_{i+1}}) = 2^{-1} \varepsilon_{m_{j+2}}.$$

Значит,

$$C_2(I_2 + I_3 + I_4) \geq C_5(\varepsilon_{m_{j+1}} + \varepsilon_{m_{j+2}} - \varepsilon_{m_{j+2}}) = C_5 \varepsilon_{m_{j+1}}.$$

Применяя преобразование Абеля, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= n^{-k} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1} i^{k-1} \right) (\varepsilon_{m_l} - \varepsilon_{m_{l+1}}) \geq C_6 n^{-k} \sum_{l=1}^j m_l^k (\varepsilon_{m_l} - \varepsilon_{m_{l+1}}) \\ &\geq C_6 n^{-k} \left(\sum_{l=1}^j (m_l^k - m_{l-1}^k) \varepsilon_{m_l} - m_j^k \varepsilon_{m_{j+1}} \right). \end{aligned}$$

Заменим C_6 на столь малое C_7 , что $C_2 C_7 < C_5$. Тогда

$$C_5 \varepsilon_{m_{j+1}} - C_2 C_7 n^{-k} m_j^k \varepsilon_{m_{j+1}} > 0.$$

В итоге имеем $\|f - z_{n,k}\|_H \geq C_8 n^{-k} \sum_{l=1}^j \varepsilon_{m_l} m_l^k$, откуда в силу монотонности $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ получаем, что

$$\|f - z_{n,k}\|_H \geq C_9 n^{-k} \sum_{i=m_1}^n \varepsilon_i i^{k-1}.$$

Пусть

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i i^{k-1}, \quad A = \sum_{i=1}^{m_1-1} \varepsilon_i i^{k-1}.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - A)/S_n = (S - A)/S > 0$, а если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - A)/S_n = 1$. Отсюда выводим, что найдется $b > 0$ такое, что $S_n - A > b S_n$ при всех $n > m_1$ и

$$\|f - z_{n,k}\|_H \geq C_{10} n^{-k} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i i^{k-1}.$$

Оценка снизу в (19) и теорема 5 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Остается открытым вопрос: верен ли аналог теоремы 5 для пространства $L^1[0, 1)$. В тригонометрическом случае ответ на данный вопрос утвердительный (см. [6]). Напротив, в тригонометрическом случае было бы интересно получить аналог соотношения (19).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть для 2π -периодической функции в соответствии с определением

$$V_p(f) = \sup_{\xi} \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

где $\xi = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разбиение периода, и $\|f\|_{V_p} = \max(V_p(f), \|f\|_{\infty})$. Тогда в основной теореме из [7] можно заменить равномерную норму на $\|f\|_{V_p}$ при $1 < p < \infty$. Оценка

снизу следует из оценки для равномерной нормы, а аналоги леммы 1 и теоремы 1 в 2π -периодическом случае получаются аналогично [8] и данной работе с использованием неравенства $\|t_n\|_{V_p} \leq Cn^{1/p}\|t_n\|_{L^p}$ для тригонометрических полиномов порядка не выше n (см. [16]).

Автор выражает признательность С. С. Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [2] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*, Элм, Баку, 1981.
- [3] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akad. Kiadó, Budapest, 1990.
- [4] С. С. Волосивец, “Приближение функций ограниченной p -флуктуации полиномами по мультипликативным системам”, *Anal. Math.*, **21**:1 (1995), 61–77.
- [5] Н. Zelin, “The derivatives and integrals of fractional order in Walsh–Fourier analysis, with applications to approximation theory”, *J. Approx. Theory*, **39**:4 (1983), 361–373.
- [6] Н. А. Ильясов, “Приближение периодических функций средними Зигмунда”, *Матем. заметки*, **39**:3 (1986), 367–382.
- [7] Н. А. Ильясов, “О порядке приближения в равномерной метрике средними Фейера–Зигмунда на классах $E_p[\varepsilon]$ ”, *Матем. заметки*, **69**:5 (2001), 679–687.
- [8] С. С. Волосивец, “Сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам и p -флуктуационный модуль непрерывности”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:2 (2006), 241–258.
- [9] С. Л. Блюмин, “О линейных методах суммирования рядов Фурье по мультипликативным системам”, *Сиб. матем. журнал*, **9**:2 (1968), 449–455.
- [10] С. Л. Блюмин, “Некоторые свойства одного класса мультипликативных систем и вопросы приближения функций полиномами по этим системам”, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, № 4, 13–22.
- [11] Н. Я. Виленкин, “К теории лакунарных ортогональных систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:3 (1949), 245–252.
- [12] С. Watari, “On generalized Walsh Fourier series”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **10**:3 (1958), 211–241.
- [13] J.-A. Chao, “Hardy spaces on regular martingales”, *Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces*, Lecture Notes in Math., **939**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 18–28.
- [14] F. Weisz, *Martingale Hardy Spaces and their Applications in Fourier Analysis*, Lecture Notes in Math., **1568**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [15] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958.
- [16] А. П. Терехин, “Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p -вариации”, *Матем. заметки*, **2**:3 (1967), 289–300.

Т. В. Иофина

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: iofinat@mail.ru

Поступило

24.07.2009

Исправленный вариант

08.09.2010