Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ф. Коробейник, О свободных представляющих системах, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 214–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:27:49

О свободных представляющих системах

Ю. Ф. Коробейник

В работе находятся условия, при которых представляющая или абсолютно представляющая система элементов в полном отделимом локально выпуклом пространстве остается таковой после удаления из нее конечного или бесконечного, но достаточно “тощего” подмножества ее элементов.

Библиография: 11 названий.

1. Основные определения. Пусть H – отделимое локально выпуклое пространство (ОЛВП) над полем скаляров Φ , где $\Phi = \mathbb{C}$ или $\Phi = \mathbb{R}$ (для определенности всюду далее предполагается, что $\Phi = \mathbb{C}$, хотя излагаемые в работе результаты справедливы и в случае, когда $\Phi = \mathbb{R}$). Пусть, далее, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$ – счетная совокупность индексов такая, что при всех $n \geq 1$ $\omega_n \subseteq \omega_{n+1}$ и каждое множество ω_n содержит конечное число индексов. Пусть, наконец, для любого $\alpha \in \Omega$ $x_\alpha \in H$, $x_\alpha \neq 0$ и $X_\Omega := (x_\alpha : \alpha \in \Omega)$. При этом предполагается, что любое подмножество X_Ω , состоящее из конечного числа элементов, линейно независимо в H .

Следуя [1], назовем X_Ω *представляющей системой* (ПС) в H , если для любого элемента x из H найдется семейство $d = (d_\alpha : \alpha \in \Omega)$ из $\mathbb{C}^\Omega$ такое, что последовательность

$$S_m^d x := \sum_{\alpha \in \omega_1} d_\alpha x_\alpha + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha x_\alpha, \quad m = 2, 3, \dots,$$

сходится к x в H (по топологии H).

Назовем ПС X_Ω в H *свободной* (или *избыточно полной*), если она инвариантна относительно удаления из нее любого конечного числа элементов x_α .

Пусть теперь H – полное ОЛВП (ПОЛВП) над полем $\mathbb{C}$ с определяющим топологию в H набором преднорм $\mathcal{P} = \{p\}$. Совокупность X_Ω элементов из H называется *абсолютно представляющей системой* (АПС) в H , если для любого $x \in H$ найдется семейство $b = \{b_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ из $\mathbb{C}^\Omega$ такое, что $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m^d x = x$ и, кроме того, для любого $p \in \mathcal{P}$ $\sum_{\alpha \in \Omega} |d_\alpha| p(x_\alpha) < \infty$. Ясно, что каждая АПС в H и подавно будет ПС в H .

Будем говорить, что АПС X_Ω в H *свободна*, если она остается АПС в H и после удаления из нее любого конечного множества ее элементов. В частном случае, когда $\Omega = \mathbb{N}$, $\omega_k = \{1, 2, \dots, k\}$, $k = 1, 2, \dots$, ПС или АПС $X_{\mathbb{N}}$ в H является свободной

тогда и только тогда, когда любая ее сдвигка $[X_{\mathbb{N}}] := \{x_k : k \geq n\}$, $n \geq 1$, является ПС (соответственно АПС) в H . Свободные ПС и АПС в этой ситуации изучались в работе [2] в случае, когда H – пространство Фреше.

В данной работе приводятся довольно общие достаточные условия, при выполнении которых ПС или АПС в H , составленная из собственных элементов некоторого линейного оператора, будет свободной.

2. Основные результаты. Пусть T_a – оператор типа свертки с символом a , непрерывно действующий в H (из H в H), и пусть $X_{\Lambda} = \{x_{\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ – совокупность всех его собственных элементов из H :

$$\text{для любого } \lambda \in \Lambda = \Lambda(H) \quad x_{\lambda} \in H, \quad x_{\lambda} \neq 0, \quad T_a x_{\lambda} = a(\lambda) x_{\lambda}.$$

Будем предполагать (впредь этого не оговаривая), что любое конечное подмножество элементов x_{λ} из X_{Λ} линейно независимо в H .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega = \omega_1 \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_{k+1} \setminus \omega_k)$ – счетное подмножество Λ и ω_k – его конечные подмножества такие, что при всех $k \geq 1$ $\omega_k \subseteq \omega_{k+1}$. Пусть, далее, оператор типа свертки T_a таков, что для любого $\lambda_0 \in \Omega$ оператор $T_a^{\lambda_0} := T_a - a(\lambda_0)E$, задаваемый формулой

$$T_a^{\lambda_0} x = T_a x - a(\lambda_0) x, \quad x \in H,$$

является эпиморфизмом H . Тогда, если X_{Ω} – ПС в ОЛВП H , то X_{Ω} – свободная ПС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольно любой индекс λ_1 из Ω . Из предположений теоремы следует: для любого $x \in H$ существует $y \in H$ такое, что $T_a^{\lambda_1} y = x$. Так как X_{Ω} – ПС в H , то найдется числовое семейство $\{c_{\alpha}\}_{\alpha \in \Omega}$ такое, что ряд

$$\sum_{\lambda \in \omega_1} c_{\lambda} x_{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} c_{\lambda} x_{\lambda} \right)$$

сходится в H и его сумма равна y . Отсюда

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\lambda \in \omega_1} c_{\lambda} T_a^{\lambda_1}(x_{\lambda}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} c_{\lambda} T_a^{\lambda_1}(x_{\lambda}) \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \omega_1} c_{\lambda} [a(\lambda) - a(\lambda_1)] x_{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} c_{\lambda} [a(\lambda) - a(\lambda_1)] x_{\lambda} \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \omega_1} c_{\lambda} [a(\lambda) - a(\lambda_1)] x_{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\lambda \in \tilde{\omega}_{k+1} \setminus \tilde{\omega}_k} c_{\lambda} [a(\lambda) - a(\lambda_1)] x_{\lambda}, \end{aligned}$$

где последний ряд сходится в H и для любого $k \geq 1$ $\tilde{\omega}_k = \omega_k \setminus \{\lambda_1\}$. Таким образом, $X_{\Omega}^{\lambda_1} := \{x_{\lambda} : \lambda \in \Omega \setminus \{\lambda_1\}\}$ – ПС в H , чем и завершается доказательство.

Точно так же доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть T_a , Λ , Ω , X_{Λ} и X_{Ω} те же, что и в теореме 1, и пусть X_{Ω} – АПС в ПОЛВП H . Тогда X_{Ω} – свободная АПС.

3. Уточнения теорем 1, 2 для систем экспонент. При наличии дополнительной информации относительно пространства H из теорем 1, 2 можно вывести результаты более конкретного характера.

Всюду далее элементами H являются некоторые отображения множества B_p из $\mathbb{C}^p$, где $p \geq 1$, в $\mathbb{C}$. Как обычно, положим для любого $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}^p$, для любого $t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{C}^p$

$$\langle \mu, t \rangle_p := \sum_{k=1}^p \mu_k t_k; \quad e_\mu = e_\mu(t) := \exp \langle \mu, t \rangle_p.$$

Предположим, что ОЛВП H обладает следующими свойствами:

- 1) существует некоторое подмножество $\Lambda = \Lambda(H)$ пространства $\mathbb{C}^p$ такое, что для любого $\lambda \in \Lambda$ $e_{\pm\lambda} \in H$ и $e_{\pm\lambda}$ – непрерывные мультипликаторы H ;
- 2) при некотором $j_0 \leq p$ пространство H инвариантно относительно (частного) дифференцирования по t_{j_0} , причем операция дифференцирования по t_{j_0} непрерывна в H и оператор

$$D_{j_0}: \quad (D_{j_0}y)(t) = \left(\frac{\partial y}{\partial t_{j_0}} \right)(t), \quad t \in B_p,$$

является эпиморфизмом H .

Заметим попутно, что если H инвариантно относительно дифференцирования (в B_p) по какой-либо переменной t_j , $j \leq p$, то соответствующий оператор D_j является оператором типа свертки с символом $a_j(\lambda) = \lambda_j$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$.

Покажем, что если H обладает свойствами 1), 2), то для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ из Λ оператор типа свертки

$$T_{j_0}^\alpha: \quad \text{для любого } y \in H \quad T_{j_0}^\alpha y = D_{j_0}y - \alpha_{j_0}y$$

с символом $\lambda_{j_0} - \alpha_{j_0}$ является эпиморфизмом H . С этой целью по произвольному элементу w из H найдем (также в H) элемент v_α , для которого $D_{j_0}v_\alpha = w(t)e_{-\alpha}(t)$, где α – произвольно зафиксированный индекс из Λ . Если $v_1^\alpha := v_\alpha e_\alpha$, то $v_1^\alpha \in H$, причем

$$T_{j_0}^\alpha v_1^\alpha = [D_{j_0}(v_\alpha)(t) + v_\alpha(t)\alpha_{j_0}]e_\alpha(t) - \alpha_{j_0}v_\alpha(t)e_\alpha(t) = w(t).$$

Таким образом, $T_{j_0}^\alpha$ – эпиморфизм H . Непосредственно из теорем 1, 2 получаем такие результаты, в которых $E_\Omega = \{e_\alpha : \alpha \in \Omega\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p \geq 1$, Ω – счетное подмножество Λ и H – ОЛВП отображений множества B_p из $\mathbb{C}^p$ в $\mathbb{C}^p$ со свойствами 1), 2). Тогда, если E_Λ – ПС в H , то E_Λ – свободная ПС.

ТЕОРЕМА 4. Пусть H – ПОЛВП отображений $B_p \subseteq \mathbb{C}^p$ в $\mathbb{C}^p$ со свойствами 1), 2), Ω – счетное подмножество Λ и E_Λ – АПС в H . Тогда E_Λ – свободная АПС в H .

4. Примеры функциональных пространств с нужными свойствами. Приведем примеры пространств H со свойствами 1), 2).

ПРИМЕР 1. Пусть F – выпуклый компакт в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, и $H = C^\infty[F]$ – пространство Фреше всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на F функций с определяющим топологию в $C^\infty[F]$ набором преднорм

$$\|y\|_n^F := \max \left\{ \left| \frac{\partial_p^{|\alpha|} y}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_p^{\alpha_p}}(t) \right| : t \in F, 0 \leq \alpha_j \leq |\alpha|_p \leq n \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(здесь $|\alpha|_p = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$). Если положить $\Lambda = \mathbb{C}^p$, то, как легко проверить, $C^\infty[F]$ обладает свойствами 1), 2), и к этому пространству применимы теоремы 3, 4, если в качестве Ω взять любое счетное подмножество $\mathbb{C}^p$.

ПРИМЕР 2. Пусть $p = 1$, $F = [ia, ib]$, где $-\infty < a < b < +\infty$; $\Lambda = i\mathbb{R}$, Ω – счетное подмножество Λ и $H = C^\infty[F]$. И здесь условия 1), 2) выполнены; следовательно, любая ПС или АПС в $C^\infty[ia, ib]$ вида $\{e^{ir_n t}\}_{n=1}^\infty$, $n = 1, 2, \dots$, где при $n \geq 1$ $r_n \in \mathbb{R}$, свободна в H .

ПРИМЕР 3. Пусть p , Λ и Ω – те же, что и в первом примере, и пусть G – любая выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, а $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ – возрастающая последовательность выпуклых компактов области G , исчерпывающая G :

$$\text{для любого } n \geq 1 \quad F_n \subseteq \text{int } F_{n+1} \subset G = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$$

(как обычно, $\text{int } Q$ – совокупность всех внутренних точек множества Q). Рассмотрим пространство Фреше $H = C^\infty(G)$ всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в G функций с топологией проективного предела (см. [3; гл. XI] или [4; гл. V, раздел 4]:

$$C^\infty(G) = \varprojlim C^\infty[F_n].$$

Это пространство, как легко проверить, обладает свойствами 1), 2), и в данном случае снова “работают” теоремы 3 и 4.

ПРИМЕР 4. Переходя к пространствам аналитических функций, рассмотрим вначале пространство Фреше $A(G)$ всех функций, аналитических в выпуклой области G из $\mathbb{C}^p$, со стандартной топологией, заданной последовательностью норм

$$\|y\|_n := \max\{|y(z)| : z \in F_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольно зафиксированная возрастающая последовательность выпуклых компактов F_n области G с непустыми внутренностями, исчерпывающая G . И это пространство обладает свойствами 1), 2), если положить $\Lambda = \mathbb{C}^p$, $B_p = G$. Следовательно, и здесь применимы теоремы 3, 4, согласно которым, если Ω – произвольное счетное подмножество $\mathbb{C}^p$ и $E_\Omega = \{\exp\langle \lambda, z \rangle_p : \lambda \in \Omega\}$ – ПС или АПС в $A(G)$, то E_Ω – свободная ПС (соответственно АПС) в H .

ПРИМЕР 5. Теоремы 3, 4 применимы и к широкому кругу других пространств аналитических и бесконечно дифференцируемых функций. К ним относятся, в частности, такие пространства:

- $H(F)$ – пространство всех функций, локально аналитических на компакте F из $\mathbb{C}^p$, с топологией индуктивного предела [4];

- $A(\mathbb{C}^p)$ – пространство всех целых функций в $\mathbb{C}^p$;
- $[\rho, \infty]_p$ – пространство всех целых функций в $\mathbb{C}^p$, порядок которых по совокупности переменных [6], [7] не превосходит ρ , где $\rho \geq 1$;
- $[\rho, \sigma]_p$ – пространство всех целых в $\mathbb{C}^p$ функций, имеющих тип не выше σ при порядке ρ ($0 \leq \sigma < \infty$, $1 < \rho < \infty$);
- $[\rho, \sigma)_p$ – пространство всех целых в $\mathbb{C}^p$ функций типа меньше σ при порядке ρ (здесь $0 < \sigma \leq \infty$ при $\rho > 1$ и $\sigma = \infty$ при $\rho = 1$) и так далее.

5. Удаление сверточно пренебрежимых подмножеств. В связи с теоремами 1–4 возникает естественный вопрос о том, сохраняется ли у какой-либо счетной системы элементов X_Ω свойство быть ПС или АПС в пространстве H после удаления из нее уже бесконечного множества элементов. Как будет ниже показано, ответ на этот вопрос утвердителен в случае, если из X_Ω удаляется достаточно редкое (в определенном смысле) множество.

Пусть H – ПОЛВП над полем $\mathbb{C}$ и T_a – какой-либо непрерывный в H оператор типа свертки. Это означает, что имеется некоторое множество индексов $\Lambda = \Lambda(T_a, H)$ такое, что

$$\text{для любого } \lambda \in \Lambda \text{ найдется } x_\lambda \in H: \quad x_\lambda \neq 0, \quad T_a x_\lambda = a(\lambda) x_\lambda,$$

где $a(\lambda)$ – отображение $\Lambda(T_a, H)$ в $\mathbb{C}$, называемое *символом* оператора T_a . Назовем счетное множество индексов Λ_0 *сверточно пренебрежимым* в H , если найдется символ $a_0(\lambda)$ такой, что $\Lambda_0 \subseteq \Lambda(T_{a_0}, H)$, $a_0(\lambda)$ – отображение $\Lambda(T_{a_0}, H)$ в $\mathbb{C}$, множество O_{a_0} всех нулей которого (из $\Lambda(T_{a_0}, H)$) содержит Λ_0 , и, наконец, T_{a_0} – эпиморфизм H . При этом кратность любого нуля из Λ_0 у функции $a_0(\lambda)$ может быть произвольна и $a_0(\lambda)$ может иметь другие нули, кроме нулей из множества Λ_0 .

Взяв теперь какое-либо счетное множество индексов $\Omega \subseteq \Lambda(T_{a_0}, H)$, положим $\Omega_1 = \Omega \setminus \Lambda_0$ и допустим, что X_Ω – ПС или АПС в H . Так как T_{a_0} – эпиморфизм H , то для любого x из H найдется элемент y (также из H) такой, что $T_{a_0} y = x$. Пусть для определенности X_Ω – ПС в H . Тогда в $\mathbb{C}^\Omega$ найдется числовое семейство $\{d_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ такое, что ряд

$$\sum_{\alpha \in \omega_1} d_\alpha x_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \omega_{n+1} \setminus \omega_n} d_\alpha x_\alpha \right)$$

сходится в H и его сумма равна y . Тогда

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\alpha \in \omega_1} d_\alpha T_{a_0} x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha T_{a_0} x_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \omega_1} d_\alpha a_0(\alpha) x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha a_0(\alpha) x_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \tilde{\omega}_1} d_\alpha a_0(\alpha) x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \tilde{\omega}_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha a_0(\alpha) x_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \tilde{\omega}_1} d_\alpha a_0(\alpha) x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \tilde{\omega}_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha a_0(\alpha) x_\alpha \right), \end{aligned}$$

где

$$\omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k = \omega_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_{k+1} \setminus \omega_k \right), \quad \text{для любого } k \geq 1 \quad \hat{\omega}_k := \omega_k \setminus \Lambda_0,$$

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \Lambda_0 = \hat{\omega}_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{\omega}_{k+1} \setminus \hat{\omega}_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{\omega}_k,$$

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k \setminus O_{a_0}, \quad \tilde{\Omega} := \Omega \setminus O_{a_0}$$

(ясно, что $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega_1$). Таким образом, если (счетное) множество Λ_0 сверточно пренебрежимо в H , T_{a_0} – оператор типа свертки с описанными выше свойствами, X_{Ω} – ПС в H , где Ω – счетное подмножество $\Lambda(T_{a_0}, H)$, и $\Omega_1 = \Omega \setminus \Lambda_0$, то X_{Ω_1} – ПС в H . Аналогично (и даже чуть проще) рассматривается случай, когда X_{Ω} – АПС в H , и в этом случае показывается, что X_{Ω_1} – АПС в H .

Если еще предположить, что пространство H бесконечномерно и что любая совокупность конечного числа элементов x_{α} , $\alpha \in \Lambda(T_{a_0}, H)$, линейно независима в H , то в обоих рассмотренных случаях множество $\Omega \setminus O_{a_0}$ (тем более, $\Omega \setminus \Lambda_0$) содержит бесконечное множество элементов (индексов).

6. Применение к пространству $A(G)$. Применим теперь полученные в предыдущем пункте результаты к одной конкретной ситуации, когда G – выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, и $H = A(G)$.

Напомним, что согласно Мартино [5], если

$$T_a^p y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^{|k|_p} y}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_p^{k_p}} \quad \text{и} \quad a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in [1, 0]_p,$$

где $k \in \mathbb{N}_0^p$, $k = (k_1, \dots, k_p)$, $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ и $|k|_p = \sum_{l=1}^p k_l$, то оператор свертки T_a^p с символом $a(z)$ является эпиморфизмом $A(G)$. Для любой функции $b(z)$ из $[1, 0]_p$ можно положить

$$\Lambda(T_b^p, A(G)) = \mathbb{C}^p, \quad x_{\lambda} = e_{\lambda} := \exp \langle \lambda, z \rangle_p, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p;$$

$$E_Q = \{e_{\lambda} : \lambda \in Q\}, \quad Q \subseteq \mathbb{C}^p.$$

Из описанного выше общего результата получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, Ω – счетное подмножество $\mathbb{C}^p$ и E_{Ω} – ПС или АПС в $A(G)$. Пусть, далее, Λ_0 – счетное подмножество $\mathbb{C}^p$ такое, что в классе $[1, 0]_p$ найдется отличная от тождественного нуля функция $a_0(\lambda)$, для которой $a_0(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \Lambda_0$. Тогда, если $\Omega_1 := \Omega \setminus \Lambda_0$, то E_{Ω_1} – ПС (соответственно АПС) в $A(G)$, причем множество Ω_1 содержит бесконечное число индексов (элементов из $\mathbb{C}^p$).

Для случая, когда G – неограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$, теорему 5 в ряде случаев можно усилить. В качестве примера рассмотрим ситуацию, в которой $G = \mathbb{C}^p$. Учитывая, что, как было доказано еще Мальгранжем [6], любой ненулевой оператор свертки T_a^p с символом $a(z)$ из $[1, \infty)$ является эпиморфизмом $A(\mathbb{C}^p)$, получаем следующий аналог теоремы 5.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p \geq 1$, Ω – счетное подмножество $\mathbb{C}^p$ и E_Ω – ПС или АПС в $A(\mathbb{C}^p)$. Пусть, далее, Λ_0 – счетное подмножество $\mathbb{C}^p$ такое, что в классе $[1, \infty)_p$ имеется отличная от тождественного нуля функция $a_0(\lambda)$, для которой $a_0(\mu) = 0$ для любого $\mu \in \Lambda_0$. Тогда, если $\Omega_1 := \Omega \setminus \Lambda_0$, то E_{Ω_1} – ПС (соответственно АПС) в H , причем множество Ω_1 содержит бесконечное число индексов из $\mathbb{C}^p$.

7. Следствия теорем 5 и 6. Выведем теперь некоторые следствия из теорем 5 и 6.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $p \geq 1$; G – выпуклая область в $\mathbb{C}^p$,

$$\text{для любого } k \geq 1 \quad \lambda_k = (\lambda_{k,l})_{l=1}^p \in \mathbb{C}^p, \quad \Omega := \{\lambda_k : k \geq 1\}.$$

Пусть, далее,

$$\text{для любого } s \geq 1 \quad k_s \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k_s \uparrow +\infty, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_{k_s}|_p} = 0.$$

Пусть, наконец, E_Ω – ПС или АПС в $A(G)$. Тогда, если

$$\Omega_1 := \{\lambda_{k_s} : s \geq 1\}, \quad \Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1,$$

то E_{Ω_2} – ПС (соответственно АПС) в $A(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 7 достаточно показать, что в предположениях этой теоремы в классе $[1, 0]_p$ найдется ненулевая функция F , для которой

$$F(\lambda_{k_s}) = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Такую функцию можно построить хотя бы следующим образом. Прежде всего, напомним, что

$$\text{для любого } s \geq 1 \quad |\lambda_{k_s}|_p = \sum_{l=1}^p |\lambda_{k_s,l}|,$$

и положим $\alpha_s := \max\{|\lambda_{k_s,l}| : 1 \leq l \leq p\}$. Тогда $\alpha_s \leq |\lambda_{k_s}|_p \leq p\alpha_s$, $s = 1, 2, \dots$. Отсюда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_{k_s}|_p} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{\alpha_s} = 0.$$

Обозначим еще символом l_s наибольший из номеров $l \leq p$ таких, что $|\lambda_{k_s,l}| = \alpha_s$, $s = 1, 2, \dots$. Искомую функцию F ищем в следующем виде: для всех $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$

$$F(z) = \prod_{j=1}^p f_j(z_j), \quad \text{где} \quad f_j(z_j) = \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z_j e^{-i\varphi_{m,j}}}{\alpha_m} \right)^2 \right].$$

При этом числа $\varphi_{s,j}$, $s \geq 1$, $1 \leq j \leq p$, из промежутка $[0, 2\pi)$ определяются таким образом: для любого $s \geq 1$ полагаем $\varphi_{s,l_s} = \arg \lambda_{k_s,l_s}$ и $\varphi_{s,k} = 0$, когда $1 \leq k \leq p$ и $k \neq l_s$. Так как $\lim_{s \rightarrow \infty} (s/\alpha_s) = 0$, то по теореме Линделёфа (см., например, [7; с. 42, теорема 15]) каждая функция $f_j(z_j)$, где $1 \leq j \leq p$, принадлежит пространству $[1, 0]$. Следовательно, $F \in [1, 0]_p$. При этом для всех $s \geq 1$ $f_{l_s}(\lambda_{k_s,l_s}) = 0$, откуда $F(\lambda_{k_s}) = 0$, $s = 1, 2, \dots$, и нужная нам функция F построена.

Заметим, что при $p = 1$ теорема 7 была доказана автором значительно раньше – см. по этому поводу работу [8], в которой отмечено, что теорема 7 неупрощаема в следующем смысле: для всех $\varepsilon > 0$ найдутся последовательность $\Omega = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 1$, и ее подпоследовательность $\Omega_1 = \{\lambda_{k_s}\}_{s=1}^\infty$, $1 < k_s \uparrow \infty$, такие, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (s/|\lambda_{k_s}|) < \varepsilon$, E_Ω – АПС в $A(G)$, а система E_{Ω_2} , где $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, даже неполна в $A(G)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $p \geq 1$, для всех $k \geq 1$ $\lambda_k \in \mathbb{C}^p$ и $\Omega_1 = \{\lambda_{k_s} : s = 1, 2, \dots\}$ – подпоследовательность последовательности $\Omega = \{\lambda_n : n \geq 1\}$ такая, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{s}{|\lambda_{k_s}|_p} < \infty.$$

Тогда, если E_Ω – ПС или АПС в $A(\mathbb{C}^p)$, то E_{Ω_2} , где $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ – ПС (соответственно АПС) в $A(\mathbb{C}^p)$.

Эта теорема доказывается тем же методом, что и предыдущая. Единственное различие состоит в том, что вспомогательные функции $f_j(z_j)$, $1 \leq j \leq p$, берутся в следующем виде:

$$f_j(z_j) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_j e^{-i\varphi_{k,j}}}{\alpha_k} \right) e^{(z_j e^{-i\varphi_{k,j}})/\alpha_k},$$

а числа $\varphi_{k,j}$ определяются так же, как и раньше.

8. Структурное описание ПС и АПС. Введем теперь одно новое понятие, с помощью которого можно описать структуру произвольной представляющей системы. Пусть $X = \{x_\alpha : \alpha \in \Omega\}$, где Ω – некоторое счетное множество индексов, а x_α – как и раньше, какие-либо ненулевые элементы ОЛВП H , любая конечная система которых линейно независима в H . Предположим, что X – ПС в ОЛВП H (или АПС в ПОЛВП H). Будем говорить, что X – *ограниченно свободная* система в H , если имеется некоторая (фиксированная) последовательность $\Gamma = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ индексов из $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \omega_k$ такая, что

$$X_{\Omega(l)} := \{x_\alpha : \alpha \in \Omega, \alpha \neq \alpha_k, k = 1, 2, \dots, l\}$$

– ПС (соответственно АПС) в H при любом $l \geq 1$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть X_Ω – ПС или АПС в H . Тогда имеет место альтернатива:

- или X_Ω – ограниченно свободная система в H ,
- или X_Ω получается добавлением конечного (возможно, пустого) множества элементов к некоторому базису (соответственно абсолютному базису) в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности X_Ω – ПС в H . Если X_Ω – базис в H , то теорема доказана, причем имеет место второй случай альтернативы. Если же X_Ω не базис в H , то найдется по крайней мере один сходящийся в H ряд по системе X_Ω , сумма которого равна нулю, т.е. нетривиальное разложение нуля (н.р.н.) по X_Ω в H :

$$0 = \sum_{\alpha \in \Omega} d_\alpha x_\alpha = \sum_{\alpha \in \omega_1} d_\alpha x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \omega_{k+1} \setminus \omega_k} d_\alpha x_\alpha \right).$$

При этом найдется $\alpha_1 \in \Omega$ такой, что $d_{\alpha_1} \neq 0$. Положим

$$\Omega_{(1)} = \Omega \setminus \{\alpha_1\}, \quad X_{\Omega_{(1)}} := \{x_\alpha : \alpha \in \Omega_{(1)}\}.$$

Ясно, что $X_{\Omega_{(1)}}$ – ПС в H . Если $X_{\Omega_{(1)}}$ – базис в H , то вновь имеем второй случай альтернативы, и доказательство закончено. Если же $X_{\Omega_{(1)}}$ не базис в H , то в H найдется н.р.н. по системе $X_{\Omega_{(1)}}$:

$$0 = \sum_{\alpha \in \tilde{\omega}_1} d_\alpha x_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \tilde{\omega}_{k+1} \setminus \tilde{\omega}_k} d_\alpha x_\alpha \right), \quad \text{где для любого } k \geq 1 \quad \tilde{\omega}_k = \omega_k \setminus \{\alpha_1\}.$$

При этом найдется индекс $\alpha_2 \in \Omega \setminus \{\alpha_1\}$ такой, что $d_{\alpha_2} \neq 0$, и мы повторяем прежнее рассуждение применительно к системе $X_{\Omega_{(2)}}$, в которой $\Omega_{(2)} = \{\alpha : \alpha \in \Omega, \alpha \neq \alpha_1, \alpha \neq \alpha_2\}$. Очевидно, что либо на каком-то (конечном) шаге мы придем к базису

$$X_{\Omega_{(k_0)}} = \{x_\alpha \in X_\Omega, \alpha \in \Omega, \alpha \neq \alpha_l, l = 1, 2, \dots, k_0\},$$

и в этом случае справедлив второй случай альтернативы, либо этот процесс будет продолжаться неограниченно, и тогда X_Ω – ограниченно свободная ПС в H (для любого $l \geq 1$ $X_{\Omega_{(l)}} = \{x_\alpha \in X_\Omega, \alpha \in \Omega, \alpha \neq \alpha_s, s = 1, 2, \dots, l\}$ – ПС в H).

Заметим, что доказанная теорема дополняет и уточняет теорему 1 из [8].

9. Примеры и комментарии к теореме 9. Легко построить систему, для которой действительно имеет место первый случай альтернативы – для этого, например, достаточно к любому базису $\mathcal{E}$ добавить множество, состоящее из конечного числа каких-либо линейно независимых элементов из H , не принадлежащих $\mathcal{E}$.

Представляющую систему в H , являющуюся ограниченно свободной в H , можно образовать, например, следующим образом. Пусть T – непрерывный линейный оператор в ПОЛВП H , имеющий в H бесконечное множество собственных элементов x_α , $\alpha \in \Omega_0$, где Ω_0 – бесконечное множество индексов и $x_\alpha \neq 0$, $\alpha \in \Omega_0$, причем $Tx_\alpha = a(\alpha)x_\alpha$. Будем считать, что функция $a(\alpha)$ (символ оператора T), отображающая Ω_0 в $\mathbb{C}$, инъективна на Ω_0 : $a(\alpha_1) \neq a(\alpha_2)$, если $\alpha_1 \in \Omega_0$, $\alpha_2 \in \Omega_0$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Тогда, как доказано в [9; с. 51–52], любая конечная совокупность элементов x_α , $\alpha \in \Omega_0$, линейно независима в H . Зафиксируем какое-либо счетное собственное подмножество Ω множества Ω_0 и предположим, что $X_\Omega := \{x_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ – ПС или АПС в H . Пусть для определенности X_Ω – АПС в H . Если α_0 – произвольный индекс из непустого множества $\Omega_0 \setminus \Omega$, то найдется хотя бы одно числовое семейство $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ такое, что

$$x_{\alpha_0} = \sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha x_\alpha, \quad \text{причем} \quad \sum_{\alpha \in \Omega} |c_\alpha| p(x_\alpha) < \infty \quad \text{для любого } p \in \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P} = \{p\}$ – набор преднорм, определяющий топологию в H . Так как $x_{\alpha_0} \neq 0$, то существует $\alpha_1 \in \Omega$ такой, что $c_{\alpha_1} \neq 0$. Применяя оператор T к абсолютно сходящемуся в H разложению x_{α_0} по системе X_Ω , найдем

$$Tx_{\alpha_0} = a(\alpha_0)x_{\alpha_0} = \sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha T(x_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha a(\alpha)x_\alpha,$$

т.е.

$$a(\alpha_0)x_{\alpha_0} = \sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha a(\alpha)x_\alpha.$$

С другой стороны, $a(\alpha_0)x_{\alpha_0} = \sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha a(\alpha_0)x_\alpha$, откуда

$$\sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha [a(\alpha) - a(\alpha_0)]x_\alpha = 0.$$

При этом $c_{\alpha_1}[a(\alpha_1) - a(\alpha_0)] \neq 0$, и мы получили абсолютно сходящееся в H нетривиальное разложение нуля по системе X_Ω . Следовательно, X_Ω не может быть абсолютным базисом в H . Точно так же показываем, что система X_Ω не может быть базисом в H . Так как Ω – произвольное счетное подмножество Ω_0 , то отсюда следует, что ни одна система вида X_{Ω_1} , где Ω_1 – собственное счетное подмножество Ω , не может быть базисом или абсолютным базисом в H . Поэтому, если при каком-либо таком Ω_1 X_{Ω_1} – ПС или АПС в H , то X_{Ω_1} – ограниченно свободная ПС (соответственно АПС) в H .

Заметим, что в литературе описано много ситуаций, в которых оператор T имеет в H континуум попарно различных собственных элементов x_α , причем $a(\alpha_1) \neq a(\alpha_2)$, когда $\alpha_j \in \Omega$, $j = 1, 2$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. При этом имеются счетные подмножества Ω множества Ω_0 такие, что X_Ω – АПС в H . Например, если G – выпуклая область в $\mathbb{C}$, T – оператор обычного дифференцирования и H – пространство Фреше $A(G)$, то

$$e_\lambda = \exp \lambda z \in H \quad \text{для любого } \lambda \in \Omega_0 = \mathbb{C},$$

причем функция $a(\lambda) = \lambda$ (символ оператора T), очевидно, инъективна на $\mathbb{C}$. Как было показано Леонтьевым [10], для любой ограниченной выпуклой области G в $\mathbb{C}$ найдется последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$$\text{для любого } k \geq 1 \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$$

и $\{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^\infty$ – АПС в $A(G)$. Немного позднее этот же результат был получен Коробейником [11] для произвольной выпуклой области G с помощью общей теории двойственности в локально выпуклых пространствах. Еще чуть позднее Леонтьев получил тот же результат своим методом, не использующим функциональный анализ и основанном на “чистой” теории целых функций. При этом Леонтьев применил линейные дифференциальные операторы бесконечного порядка, а также один результат Р. С. Юлмухаметова из теории аппроксимации субгармонических функций.

Итак, для произвольной выпуклой области G в $\mathbb{C}$ всегда найдется счетное множество Ω индексов из $\mathbb{C}$ таких, что $E_\Omega = \{e_{\lambda_k}(z)\}_{k=1}^\infty$ – АПС в $A(G)$. Но тогда из результатов этого пункта следует, что E_Ω и любая ее часть не может быть базисом в $A(G)$ и потому E_Ω – ограниченно свободная АПС в $A(G)$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации имеет место первый случай указанной в теореме 9 альтернативы.

Аналогичные примеры можно указать и для других пространств аналитических и бесконечно дифференцируемых функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Ф. Коробейник, “Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложение к пространствам Фреше”, *Матем. сб.*, **97:2** (1975), 193–229.
- [2] Yu. F. Korobeinik, “On shifts of sequences”, *Anal. Math.*, **12:3** (1986), 167–173.
- [3] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, ГИФМЛ, М., 1959.
- [4] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.
- [5] A. Martineau, “Equations différentielles d’ordre infini”, *Bull. Soc. Math. France*, **95** (1967), 109–154.
- [6] B. Malgrange, “Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **6** (1956), 271–355.
- [7] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [8] Ю. Ф. Коробейник, “К вопросу о представляющих системах”, *Актуальные вопросы матем. анализа*, Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов-на-Дону, 1978, 100–111.
- [9] Ю. Ф. Коробейник, “Об A -представляющих системах. I”, *Владикавказ. матем. журн.*, **11:1** (2009), 43–53.
- [10] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [11] Ю. Ф. Коробейник, “Представляющие системы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:2** (1978), 325–355.

Ю. Ф. Коробейник

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону,
Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А,
г. Владикавказ
E-mail: kor@math.rsu.ru

Поступило

23.11.2009