Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Вильданов, А. М. Себельдин, К вопросу об определяемости абелевых групп центрами их колец эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 44–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:11:31

К вопросу об определяемости абелевых групп центрами их колец эндоморфизмов

В. К. Вильданов, А. М. Себельдин

В работе получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы абелева группа из класса вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга определялась центром ее кольца эндоморфизмов в этом классе.

Библиография: 2 названия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что группа A из некоторого класса абелевых групп $\mathbf{X}$ *определяется своим центром* $C(E(A))$ *кольца эндоморфизмов* в этом классе, если из изоморфизма $C(E(A)) \cong C(E(B))$, где B принадлежит классу $\mathbf{X}$, следует $A \cong B$. Подкласс таких групп A обозначим через $\mathbf{X}(CE)$. Группа A называется *почти делимой*, если $P(A) = \{p : pA \neq A\}$ – конечное (возможно пустое) множество простых чисел. Тип почти делимой однородной абелевой группы без кручения будем называть *почти делимым*.

Другие обозначения будут вводиться по ходу изложения либо стандартны (см., например, [1]).

В работе [2] описаны подклассы $\mathbf{X}(CE)$ для различных классов абелевых групп $\mathbf{X}$. В частности, были найдены достаточные условия принадлежности группы классу $\mathbf{F}_n(CE)$, где $\mathbf{F}_n$ – класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга n . А именно, подкласс $\mathbf{F}'_n \subseteq \mathbf{F}_n$, $n > 1$, состоящий из делимых групп, а также из групп, являющихся прямой суммой вполне характеристичных почти делимых слагаемых ранга 1, входит в класс $\mathbf{F}_n(CE)$. Оказалось, что для $1 < n < 4$ выполнено $\mathbf{F}'_n(CE) = \mathbf{F}_n(CE)$ (теорема 2), однако уже для $n > 3$ выполнено $\mathbf{F}'_n(CE) \neq \mathbf{F}_n(CE)$ (см. примеры 1–2 и следствие 1). Заметим, что класс $\mathbf{F}_1(CE)$ описан в [2] и состоит в точности из почти делимых групп ранга 1.

Пусть $G \in \mathbf{F}_n$, $n > 1$ и $\Omega(G)$ – множество всех (различных) типов прямых слагаемых ранга 1 группы G . Рассмотрим разбиение множества $\Omega(G) = \Omega_1(G) \cup \dots \cup \Omega_s(G)$, где классами эквивалентности $\Omega_j(G)$ для всех $j = 1, 2, \dots, s$ являются связанные множества, а типы из различных классов эквивалентности несравнимы. Класс эквивалентности будем называть *тривиальным*, если это односвязанное множество. Назовем G *канонической*, если $|\Omega(G)| = r(G)$. Пусть $\alpha_j = \inf \Omega_j(G)$; тогда $C(E(G)) \cong E(A_1) \oplus \dots \oplus E(A_m)$, где A_j – группы без кручения ранга 1 типов α_j . Заметим, что среди типов α_j могут быть равные. Если Ω – некоторое конечное

множество типов, то множество всех различных инфимумов классов эквивалентности будем называть сопряженным с Ω и обозначать через $[\Omega]$. Тогда $[(\Omega(G))]$ – множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 аддитивной группы кольца $C(E(G))$.

ТЕОРЕМА 1. *Если не делимая группа G принадлежит классу $\mathbf{F}_n(CE)$, $n > 1$, то:*

- 1) группа G почти делимая;
- 2) множество $\Omega(G)$ не является связанным;
- 3) группа G редуцированная;
- 4) группа G каноническая;
- 5) любой класс эквивалентности с наименьшим элементом тривиален;
- 6) множество $\Omega(G)$ содержит только максимальные и минимальные типы;
- 7) для любого типа из $\Omega(G)$ множество типов меньших его либо пусто, либо содержит по крайней мере 2 элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Доказано в [2].

2) Пусть G – почти делимая группа, со связанным множеством $\Omega(G)$.

Если группа G однородная типа $\tau = \tau(A)$, где группа A без кручения ранга 1, то полагаем

$$H = \mathbf{Q} \oplus \bigoplus_{n=1} A.$$

Если же G не однородная и $|\Omega(G)| > 1$, то полагаем

$$H = \bigoplus_n A, \quad \tau(A) = \inf(\Omega(G)).$$

Очевидно, что в обоих случаях группа $G \not\cong H \in \mathbf{F}_n$ и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

3) Если группа G не редуцированная и не делимая, то $\Omega(G)$ – связанное множество. Тогда по условию 2) получаем, что G не принадлежит классу $\mathbf{F}_n(CE)$.

4) Пусть теперь группа G не однородная, редуцированная и содержит однородное прямое слагаемое ранга не менее двух. Рассмотрим каноническое разложение группы G в прямую сумму однородных ненулевых слагаемых:

$$G = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G)} G^{(\tau)}.$$

Пусть $G^{(\tau')}$ и $G^{(\tau'')}$ – два различных таких слагаемых, причем $r(G^{(\tau')}) > 1$. Тогда каноническое разложение группы H строим следующим образом:

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G)} H^{(\tau)},$$

где $H^{(\tau)} = G^{(\tau)}$, если $\tau \in \Omega(G) \setminus \{\tau'', \tau'\}$, $r(H^{(\tau')}) = r(G^{(\tau')}) - 1$, $r(H^{(\tau'')}) = r(G^{(\tau'')}) + 1$. Ясно, что группа H не изоморфна G и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

5) Пусть G – почти делимая группа, у которой множество $\Omega(G)$ не является связанным и разбиение множества $\Omega(G)$ содержит нетривиальный класс эквивалентности $\Omega_j(G)$ с наименьшим элементом α_j , $j \in \{1, \dots, s\}$. Тогда полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G) \setminus \Omega_j(G)} G^{(\tau)} \oplus \bigoplus_m A,$$

где $m = \text{card}(\Omega_j(G))$, $r(A) = 1$, $\tau(A) = \alpha_j$. Получаем снова, что группа G не изоморфна $H \in \mathbf{F}_n$ и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

6) Пусть G – почти делимая каноническая группа и $\tau'' < \tau' < \tau$ цепочка типов из $\Omega(G)$. Тогда полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G) \setminus \{\tau'\}} G^{(\tau)} \oplus A \in \mathbf{F}_n,$$

где $r(A) = 1$, $\tau(A) = \tau''$. Ясно, что группа G не изоморфна H и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

7) Предположим, что $\tau' > \tau''$ цепочка типов из $\Omega(G)$ и в $\Omega(G)$ не существует других типов, меньших типа τ' . Учитывая 6), получаем, что тип τ' несравним ни с каким другим типом из $\Omega(G)$, отличным от τ'' . Строим группу H следующим образом:

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G) \setminus \{\tau'\}} G^{(\tau)} \oplus A \in \mathbf{F}_n,$$

где $r(A) = 1$, $\tau(A) = \tau''$. Как и в предыдущем случае, получаем, что группа G не изоморфна H и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

Покажем теперь, что для $1 < n < 4$ выполнено $\mathbf{F}'_n(CE) = \mathbf{F}_n(CE)$.

ТЕОРЕМА 2. *Группа $G \in \mathbf{F}_n$, $1 < n < 4$, определяется в классе $\mathbf{F}_n$ своим центром кольца эндоморфизмов тогда и только тогда, когда она либо делимая, либо все ее прямые слагаемые ранга 1 почти делимы и типы этих слагаемых попарно несравнимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть группа G принадлежит классу $\mathbf{F}_n(CE)$. Предположим, что она не является делимой. Тогда согласно условиям 1), 3) и 4) она редуцированная, почти делимая и каноническая, т.е. $|\Omega(G)| = n = r(G)$. Если $n = 2$, то, учитывая условие 2), получаем, что типы прямых слагаемых несравнимы. При $n = 3$ согласно условиям 5), 6) снова получаем, что все типы из $\Omega(G)$ несравнимые.

Достаточность следует из работы [2].

Приведем несколько примеров не делимых групп из $\mathbf{F}_n(CE)$ со сравнимыми типами прямых слагаемых ранга 1. Заметим, что любая группа $A \in \mathbf{F}_1$ идемпотентного (в частности почти делимого) типа полностью определяется множеством

$$N(A) = \{n \in \mathbb{N} : p_n \in P(A)\}.$$

ПРИМЕР 1. Группа $G = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \in \mathbf{F}_4$, где

$$N(A_1) = \{1\}, \quad N(A_2) = \{1, 2\}, \quad N(A_3) = \{1, 3\}, \quad N(A_4) = \{2, 3\},$$

определяется своим центром кольца эндоморфизмов в классе $\mathbf{F}_4$.

ПРИМЕР 2. Группа $G = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_6 \in \mathbf{F}_6$, где

$$\begin{aligned} N(A_1) &= \{1\}, & N(A_2) &= \{1, 2, 4, 5\}, & N(A_3) &= \{1, 3\}, \\ N(A_4) &= \{2, 3\}, & N(A_5) &= \{3, 4\}, & N(A_6) &= \{3, 5\}, \end{aligned}$$

определяется своим центром кольца эндоморфизмов в классе $\mathbf{F}_6$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Ω_0 — множество всех (различных) почти делимых типов. Подмножества Ω', Ω'' множества Ω_0 назовем *сравнимыми*, если существуют сравнимые типы $\tau' \in \Omega'$ и $\tau'' \in \Omega''$. Подмножество из Ω_0 будем называть τ' -*множеством*, если оно состоит из нетривиальных связанных подмножеств с одинаковым инфимумом равным τ' , а число таких подмножеств — длиной τ' -множества. Подмножества Ω', Ω'' множества Ω_0 будем называть *подобными*, если их сопряженные множества равны и соответствующие τ' -подмножества имеют одинаковую длину. В частности, два τ' -множества одинаковой длины являются подобными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Почти делимую группу $G \in \mathbf{F}_n$ будем называть *минимальной*, если каждое ее τ' -подмножество $\Omega'(G)$ минимально т.е. множество

$$\{\tau'' \in \Omega(G) \setminus \Omega'(G) : \tau' < \tau''\}$$

не пусто и для любого τ' -множества $\Omega' \subset \Omega_0$, подобного $\Omega'(G)$ и несравнимого с $\Omega(G) \setminus \Omega'(G)$, имеем $|\Omega'(G)| \leq |\Omega'|$.

ТЕОРЕМА 3. Если группа $G \in \mathbf{F}_n$, $n > 1$, принадлежит классу $\mathbf{F}_n(CE)$, то она минимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{\tau'' \in \Omega(G) \setminus \Omega'(G) : \tau' < \tau''\} = \emptyset$, то полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G) \setminus \Omega'(G)} G^{(\tau)} \oplus \bigoplus_{|\Omega'(G)|} A \in \mathbf{F}_n,$$

где $r(A) = 1$, $\tau(A) = \tau'$. Ясно, что группа G не изоморфна H и $C(E(G)) \cong C(E(H))$.

Пусть теперь τ' -множество Ω' , подобное $\Omega'(G)$, несравнимо с $\Omega(G) \setminus \Omega'(G)$, и пусть $|\Omega'(G)| > |\Omega'|$. Тогда полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G) \setminus \Omega'(G)} G^{(\tau)} \oplus \bigoplus_{\tau'' \in \Omega'} H^{(\tau'')} \oplus H' \in \mathbf{F}_n,$$

где $H^{(\tau'')}$ — группа ранга 1 типа τ'' , H' — однородная вполне разложимая группа фиксированного типа из Ω' ранга $|\Omega'(G)| - |\Omega'|$. Снова получаем группу H , неизоморфную G , $[(\Omega(G))] = [(\Omega(H))]$ и $C(E(G)) \cong C(E(H))$. Заметим, что группа G каноническая (теорема 1 п. 4)) и, следовательно, группы $G^{(\tau)}$ — ранга 1.

ТЕОРЕМА 4. Если группа $G \in \mathbf{F}_n(CE)$ имеет сравнимые типы и неделима, то для любого $m > n$ существует бесконечное множество групп $H \in \mathbf{F}_m(CE)$, для которых группа G является прямым слагаемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа $G \in \mathbf{F}_n(CE)$ имеет сравнимые типы и неделима. Тогда для $m = n + 1$ строим группы $H \in \mathbf{F}_m(CE)$ добавлением к G прямого почти делимого редуцированного слагаемого A ранга 1, для которого $pA = A$ при любом $p \in P(G)$. Ясно, что таких групп существует бесконечное множество. Аналогично поступаем для любых $m > n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $n > 3$ существуют не делимые группы из $\mathbf{F}_n(CE)$ со сравнимыми типами прямых слагаемых ранга 1.

Действительно, для $n = 4$ существование такой группы следует из примера 1. Осталось применить теорему 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974; Т. 2, Мир, М., 1977.
- [2] А. М. Себельдин, Д. С. Чистяков, “Определяемость абелевых групп центром их кольца эндоморфизмов”, *Матем. заметки*, **84**:6 (2008), 952–954.

В. К. Вильданов

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: kadirovi4@rambler.ru

Поступило

25.07.2009

Исправленный вариант

26.05.2011

А. М. Себельдин

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: amseb@mail.ru