Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, О непрерывности точной константы
в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве L^2 ,
Матем. заметки, 2013, том 93, выпуск 1, 13–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:20:01

О непрерывности точной константы в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве L^2

В. С. Балаганский

В работе изучается непрерывность точной константы $K(T, X)$ по множеству T в неравенстве Джексона–Стечкина

$$E(f, L) \leq K(T, X) \omega(f, T, X)$$

($E(f, L)$ – наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами подпространства $L \subset X$, ω – некоторый модуль непрерывности) в случае, когда в качестве X берется пространство $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$, а в качестве L – подпространство функций $g \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$. В частности, будет доказана непрерывность точной константы в неравенстве Джексона–Стечкина в случае, когда L – пространство тригонометрических полиномов n -го порядка, а модуль непрерывности – классический модуль непрерывности r -го порядка.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm8575

1. Определения и обозначения.¹ Пусть 2π -периодическая по каждой переменной комплекснозначная функция $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ от d переменных принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$, где d -мерный тор $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ будем представлять как d -мерный куб $[0, 2\pi]^d$ с отождествленными противоположными гранями с нормой

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx$$

и скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Для $s = (s_1, s_2, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d$ обозначим

$$st = \sum_{k=1}^d s_k t_k.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”, а также УрО РАН (проект 12-П-1-1022) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00347).

¹Некоторые определения и обозначения взяты из статьи [1].

Определим ортонормальный базис $\{\varphi_s\}$ в пространстве $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$: для $s \in \mathbb{Z}^d$, $t \in \mathbb{T}^d$ положим $\varphi_s(t) = e^{ist}$.

Рядом Фурье функции $f(t) = f(t_1, t_2, \dots, t_d)$ называется ряд вида

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_d=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{itk},$$

в котором коэффициенты Фурье $\widehat{f}_k$ определяются равенствами

$$\widehat{f}_k = \widehat{f}_{k_1 k_2 \dots k_d} = (2\pi)^{-d} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(y_1, y_2, \dots, y_d) e^{-iyk} dy_1 dy_2 \dots dy_d.$$

Через $C^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ обозначим класс непрерывных неотрицательных (2π) -периодических функций, не всюду равных нулю, а через $C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ – множество функций из $C^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, обращающихся в нуль в точке $x = 0$.

Модуль непрерывности m -порядка функции $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ обозначим через

$$\omega_m(f, t) = \sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |h| \leq t\},$$

где $\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh)$.

Следуя работам [2] и [1], *обобщенным модулем непрерывности* функции $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ будем называть величину

$$\overline{\omega}_\psi(f, T) = \max_{t \in T} \left(\sum_s \psi_s(t) |\widehat{f}_s|^2 \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь $\widehat{f}_s$ – коэффициент Фурье функции f , $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, а T – заданное замкнутое подмножество $\mathbb{T}^d$. В [1] показано, что класс таких модулей непрерывности включает, в частности, класс модулей непрерывности, порожденных разностными операторами, в том числе классические модули непрерывности (при соответствующем выборе функции ψ).

Будем говорить, что измеримое замкнутое множество $T \subset \mathbb{T}^d$ принадлежит *классу* $\mathcal{T}^d$, если оно имеет положительную меру.

Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$; для $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ $\psi_k(t) = \psi(kt)$, $\psi_0(t) \in C^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $T \in \mathcal{T}^d$, $0 \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \neq \mathbb{Z}^d$. Положим

$$W_{\psi, \Lambda} = \left\{ f : f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \rho_k \psi_k(t), \rho_k \geq 0, \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \rho_k = 1 \right\},$$

$$\widetilde{W}_{\psi, \Lambda} = \left\{ f : f(t) = \rho_0 \psi_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \rho_k \psi_k(t), \rho_0 \geq 0, \rho_k \geq 0, \rho_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \rho_k = 1 \right\}.$$

Для $M \subset L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ обозначим

$$\Phi_M(T) = \inf\{\|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} : f \in M\}.$$

Пусть $1 < p < \infty$, $0 < r \leq R < \infty$, $T \subset \mathbb{T}^d$,

$$V(T, r, R) = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) : \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})} \leq R, \|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} \leq r\},$$

$$V(T, r) = \{f \in L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) : \|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} \leq r\},$$

$$V_T(r) = \{f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) : \|f\|_{C(T, \mathbb{R})} \leq r\}.$$

Будем говорить, что множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ принадлежит классу Λ_*^d , если оно содержит точку 0 и его пересечение хотя бы с одной из координатных полуосей – конечное множество. Таким образом,

$$\Lambda_*^d = \{ \Lambda \subset \mathbb{Z}^d : 0 \in \Lambda, \exists j \text{ (card}(\Lambda \cap e_j^+) < \infty \text{ или card}(\Lambda \cap e_j^-) < \infty) \},$$

где

$$e_j^{+(-)} = \{ \lambda \in \mathbb{Z}^d; \lambda_j \geq (\leq) 0, \lambda_k = 0, k \neq j \}.$$

Спектром функции

$$f(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} a_s \varphi_s(t) \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$$

назовем множество индексов s , для которых $a_s \neq 0$.

Пусть Λ – собственное подмножество, содержащее начало координат. Обозначим через $E_\Lambda(f) = E_\Lambda(f)_2$ величину наилучшего приближения элемента $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ функциями, спектр которых сосредоточен на множестве Λ , $E_\Lambda(f)_2 = \sqrt{\sum_{k \notin \Lambda} |\hat{f}_k|^2}$.

Неравенством Джексона–Стечкина с обобщенным модулем непрерывности называется следующее соотношение:

$$E_\Lambda(f) \leq K \bar{\omega}_\psi(f, T) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C}), \quad (2)$$

где константа K не зависит от выбора f . Точная нижняя грань таких констант называется *точной константой в неравенстве Джексона–Стечкина с обобщенным модулем непрерывности* и обозначается через $\bar{\kappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, T)$. Величину $\inf \bar{\kappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, T)$ по всем замкнутым множествам $T \subset \mathbb{T}^d$ обозначим через $\kappa_\psi^{*(d)}(\Lambda)$, точную константу в неравенстве Джексона–Стечкина для $T = [0, \delta]$, классического модуля непрерывности порядка r и приближения тригонометрическими полиномами степени не выше n будем обозначать через $\kappa_r(n, \delta)$, а величину $E_\Lambda(f)$ в этом случае будем обозначать через $E_n(f)$.

Приведем некоторые известные результаты о точных константах в неравенстве Джексона–Стечкина в L^2 с классическими модулями непрерывности.

Для L -пространства тригонометрических полиномов $(n-1)$ -го порядка Черных в [3] доказал, что при любом $n \in \mathbb{N}$, модуле первого порядка и $\delta \geq \pi/n$ справедливо равенство

$$\kappa_1(n-1, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

в [4] он же показал, что при $0 < \delta < \pi/n$

$$\kappa_1(n-1, \delta) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В [5] Черных для любых натуральных чисел n и m получил неравенство

$$E_{n-1}(f) < \frac{1}{\sqrt{\binom{2m}{m}}} \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{n}\right) \quad (3)$$

и доказал, что точная константа $\varkappa_m(n, 2\pi/n)$ в неравенстве (3) при $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, равна $1/\sqrt{\binom{2m}{m}}$. В [6] Бабенко для любых натуральных чисел n, m и $0 < \delta < 2\pi/m$ доказал неравенство

$$\varkappa_m(n, \delta) \geq \frac{1}{\sqrt{\binom{2m}{m}}}.$$

Васильев [7] уточнил неравенство (3):

$$E_{n-1}(f) < \frac{1}{\sqrt{\binom{2m}{m}}} \omega_m\left(f, \frac{1.4\pi}{n}\right).$$

Вопрос о непрерывности точной константы в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ в случае приближения целыми функциями был полностью изучен в совместной работе Бабенко и Арестова [8], там же приведена история вопроса. Бабенко [9] доказал непрерывность точной константы в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве L^2 на отрезке с весом Якоби.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, доказанный Козко и Рождественским в [2], [1], см., также [10].

ТЕОРЕМА А. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\Lambda \in \Lambda_*^d$. Тогда минимальная точная константа в неравенстве (2) равна

$$\varkappa_{\psi}^{*(d)}(\Lambda) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}.$$

Нам также потребуются следующий результат доказанный Бердышевой [11].

ТЕОРЕМА В. Пусть $\psi(t) = 2(1 - \cos t)$, $T \subset [0, \pi]$ – замкнутое множество, $\text{meas } T < \pi/n$, $\Lambda = \{-n+1, -n+2, \dots, n-1\}$. Тогда

$$\varkappa_{\psi}^{(1)}(\Lambda, T) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Вспомогательные леммы. Далее $\overline{\text{conv}} M$ – выпуклая замкнутая оболочка множества M , $\text{cl} M$ – замыкание M , $\mathbb{B}_X(\varepsilon, t)$, $\mathring{\mathbb{B}}_X(\varepsilon, t)$, $\mathbb{S}_X(\varepsilon, t)$ – замкнутый, открытый шар, сфера пространства X радиуса ε с центром в точке t соответственно.

ЛЕММА 1. Пусть X – банахово пространство над полем вещественных чисел, $x_n \in X$, x_n сходится к $x_0 = 0$ в слабой топологии пространства X . Тогда

$$\overline{\text{conv}} \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n = \left\{ x = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k x_k, \rho_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \leq 1 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение “ $\supset$ ” очевидно.

Докажем включение “ $\subset$ ”. Обозначим

$$M = \left\{ x = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k x_k, \rho_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \leq 1 \right\}.$$

Считаем без потери общности, что

$$\gamma := \sup\{\|x_k\| : k \in \mathbb{Z}_+\} > 0.$$

Пусть $x \in \overline{\text{conv}} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_n\}$; тогда найдется сходящаяся в X последовательность

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{K_n} \rho_k^n x_k \rightarrow x, \quad \rho_k^n \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{K_n} \rho_k^n = 1.$$

Обозначим

$$\bar{\rho}_n = (\rho_0^n, \rho_1^n, \dots, \rho_{K_n}^n, 0, 0, \dots).$$

Ясно, что $\bar{\rho}_n \in l_1 \cap l_2$, $\|\bar{\rho}_n\|_{l_1} = 1$ и $\|\bar{\rho}_n\|_{l_2} \leq 1$. Считаем без потери общности, что $\bar{\rho}_n$ сходится к $\bar{\rho}_0 = (\rho_0^0, \rho_1^0, \rho_2^0, \dots)$ в слабой топологии пространства l_2 . В силу слабой сходимости $\bar{\rho}_n$ к $\bar{\rho}_0$ для любого целого неотрицательного числа k имеем $\rho_k^0 \geq 0$.

Докажем, что $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^0 \leq 1$. Допустим противное; тогда существует номер N такой, что $\sum_{k=0}^N \rho_k^0 > 1$. В силу покоординатной сходимости начиная с некоторого номера n_0 справедливо неравенство $\sum_{k=0}^N \rho_k^{n_0} > 1$; противоречие; следовательно, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^0 \leq 1$.

Обозначим

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^0 x_k, \quad y_n = \xi_n - y, \quad \bar{r}_n = \bar{\rho}_n - \bar{\rho}_0.$$

Имеем $y \in M$, $\bar{r}_n$ сходится к 0 в слабой топологии пространства l_2 , $\sum_{k=0}^{\infty} |r_k^n| \leq 2$.

Докажем, что y_n сходится к 0 в слабой топологии пространства X . Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число и линейный непрерывный функционал $f \in \mathbb{S}_{X^*}(1, 0)$. Так как x_k сходится к $x_0 = 0$ в слабой топологии пространства X , то существует номер k_0 такой, что $|f(x_k)| < \varepsilon/4$ при всех $k \geq k_0$. В силу равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} r_k^n = 0$ найдется номер n_0 такой, что $\sum_{k=0}^{k_0-1} r_k^n \leq \varepsilon/(4\gamma)$ при всех $n \geq n_0$.

При $n \geq n_0$ имеем

$$\begin{aligned} |f(y_n)| &= |f(\xi_n - y)| \leq \left| \sum_{k=0}^{k_0-1} (\rho_k^n - \rho_k^0) f(x_k) \right| + \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} (\rho_k^n - \rho_k^0) f(x_k) \right| \\ &\leq \|f\| \cdot \gamma \sum_{k=0}^{k_0-1} |r_k^n| + \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=k_0}^{\infty} |r_k^n| \leq \frac{3\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, y_n сходится к нулю, т.е. ξ_n сходится к $y \in M$ в слабой топологии пространства X , но ξ_n сходится к $x \in M$ по норме пространства X ; следовательно, $x = y \in M \subset \overline{\text{conv}} \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n = M$.

ЛЕММА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < r \leq R < \infty$, $T \in \mathcal{T}^d$. Множества $V(T, r, R)$, $V(T, r)$ выпуклы и замкнуты в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, множество $V(T, r, R)$ слабо компактно в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпуклость множеств $V(T, r, R)$, $V(T, r)$ и ограниченность в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ множества $V(T, r, R)$ очевидны.

Докажем, что $V(T, r, R)$ замкнуто по норме пространства $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. Допустим противное: $f_n \in V(T, r, R)$, f_n сходится к f по норме пространства $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, но $f \notin V(T, r, R)$. Тогда выполняется по крайней мере одно из двух условий:

$$(\alpha) \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})} > R; \quad (\beta) \quad \|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} > r.$$

Допустим, что выполняется условие (α) ; тогда найдутся измеримое множество $T_1 \subset \mathbb{T}^d$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\int_{T_1} dt_1 dt_2 \dots dt_d > \varepsilon$ и для любого $t \in T_1$ справедливо неравенство $|f(t)| \geq R + \varepsilon$.

Поскольку имеем $\|f(t) - f_n(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})}^p \rightarrow 0$, выполнено $\|f(t) - f_n(t)\|_{L^p(T_1, \mathbb{R})}^p \rightarrow 0$, но $\|f - f_n\|_{L^p(T_1, \mathbb{R})} \geq \varepsilon^{p+1} > 0$. Противоречие. Аналогично приходим к противоречию и при выполнении условия (β) . Итак, множество $V(T, r, R)$ замкнуто; аналогично доказывается замкнутость множества $V(T, r)$. Так как $V(T, r, R)$ выпукло и ограничено, то в силу рефлексивности пространства $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ множество $V(T, r, R)$ слабо компактно.

ЛЕММА 3. Пусть $T \in \mathcal{T}^d$, $M \subset L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ слабо замкнуто в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Тогда найдется $f \in M$ такая, что

$$\Phi_M(T) = \|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_k \in M$,

$$r_k := \|f_k\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} \rightarrow \inf\{\|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} : f \in M\} := r_0,$$

$r_k > r_{k+1}$ для любого номера k . Имеем $f_k \in V(T, r_k, R) \cap M := M_k$, $V(T, r_{k+1}, R) \subset V(T, r_k, R)$. По лемме 2 $V(T, r_k, R)$, а следовательно, и множества M_k слабо компактны в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $M_k \supset M_{k+1} \supset \dots$; следовательно, пересечение $\bigcap_{k=n}^\infty M_k$ не пусто. Тогда найдется $f_0 \in \bigcap_{k=n}^\infty M_k$. Ясно, что $f_0 \in V(T, r_0, R)$ и $\|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} = r_0$.

ЛЕММА 4. Пусть $T \in \mathcal{T}^d$, $1 < p < \infty$,

$$M = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) : f(t) \geq 0 \ \forall t \in T\},$$

$\psi_0(t) = \varrho \geq 0$ при $t \in T$, $\widetilde{M} = \text{conv}(\psi_0 \cup M)$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- (а) если $\Phi_M(T) \leq \|\psi_0\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})}$, то $\Phi_M(T) = \Phi_{\widetilde{M}}(T)$;
- (б) если $\Phi_M(T) < \|\psi_0\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})}$, $f \in \widetilde{M}$, $\|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} = \Phi_M(T)$, то $f \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) В силу включения $M \subset \widetilde{M}$ имеем $\Phi_M(T) \geq \Phi_{\widetilde{M}}(T)$. Так как при любом $\theta \in T$ справедливо неравенство $\psi_0(\theta) \geq 0$ и для любой функции $\xi \in M$ имеем $\xi(\theta) \geq 0$, то для любой функции $f = (1 - \alpha)\psi_0 + \alpha\xi$, где $\xi \in M$, $0 \leq \alpha \leq 1$, имеем

$$\|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} = (1 - \alpha)\varrho + \alpha\|\xi\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})}.$$

Тогда

$$\|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} \geq (1 - \alpha)\varrho + \alpha\Phi_M(T) \geq \Phi_M(T), \quad \Phi_{\widetilde{M}}(T) \geq \Phi_M(T)$$

и $\Phi_{\widetilde{M}}(T) = \Phi_M(T)$.

(b) В случае если $\varrho > \Phi_M(T)$, как в последнем неравенстве получаем, что или $\|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})} > \Phi_M(T)$ или $\alpha = 1$. Так как $\Phi_{\widetilde{M}}(T) \leq \Phi_M(T)$, то остается случай $\alpha = 1$; тогда $f \in M$.

Далее

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|y - x\| \right\}$$

– хаусдорфово расстояние между множествами A и B .

ЛЕММА 5. Пусть $T_k \in \mathcal{T}^d$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$, $M \subset C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ слабо замкнуто в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $R = \sup\{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})} : f \in M\} < \infty$.

Тогда выполнены следующие утверждения:

- (a) если $\lim_{k \rightarrow \infty} h(T_k, T_0) = 0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) \leq \Phi_M(T_0)$;
- (b) если $T_0 \subset \text{cl}(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=n}^\infty T_m)$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) \geq \Phi_M(T_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Возьмем произвольно малое $\varepsilon > 0$. По лемме 3 существует элемент $f \in M$ такой, что $\|f\|_{L^\infty(T_0, \mathbb{R})} = \Phi_M(T_0)$. Так как $f \in M \subset C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, то существует открытая окрестность $U \subset \mathbb{T}^d$, $T_0 \subset U$, такая, что для любого $t \in U$ имеем $|f(t)| \leq \Phi_M(T_0) + \varepsilon/2$.

Докажем, что для достаточно больших номеров k выполнено $T_k \subset U$. Допустим противное: существует подпоследовательность k_i такая, что $T_{k_i} \setminus U \neq \emptyset$, т.е.

$$\exists t_i \in T_{k_i} \setminus U.$$

В силу компактности $\mathbb{T}^d$ считаем без потери общности, что t_i сходится к $t \in \mathbb{T}^d$. Так как $t_i \in T_{k_i} \setminus U$, множество $\mathbb{T}^d \setminus U$ замкнуто, то $t \notin U$. По условию $h(T_k, T_0) \rightarrow 0$; следовательно, $\inf\{\|t - \tau\| : \tau \in T_0\} = 0$ и $t \in T_0$; противоречие.

Итак, начиная с некоторого номера k_0 справедливо включение $T_k \subset U$; тогда $\|f\|_{L^\infty(T_k, \mathbb{R})} \leq \Phi_M(T_0) + \varepsilon/2$; следовательно, $\Phi_M(T_k) \leq \Phi_M(T_0) + \varepsilon/2$. В силу произвольности числа ε утверждение пункта (a) доказано.

(b) Допустим противное: существует число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность k_i такие, что

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} \Phi_M(T_{k_i}) \leq \Phi_M(T_0) - \varepsilon.$$

Считаем без потери общности, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) \leq \Phi_M(T_0) - \varepsilon$. Выберем число r таким, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) < r < \Phi_M(T_0) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим $A_n = \bigcap_{m=n}^\infty T_m$. Ясно, что

$$A_n \subset A_{n+1} \subset T_{n+1}, \quad T_0 \subset \text{cl}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right).$$

Имеем $V(A_{k+1}, r, R) \subset V(A_k, r, R)$,

$$M_k := V(A_k, r, R) \cap M \neq \emptyset.$$

Множества M_n слабо компактны в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$; следовательно, пересечение $\bigcap_{k=1}^\infty M_k$ не пусто. Тогда найдется $f_0 \in M_k$ при любом номере k . Имеем $T_0 \subset \text{cl}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$; следовательно, $f_0 \in V(T_0, r, R)$ и $\Phi_M(T_0) \leq r \leq \Phi_M(T_0) - \varepsilon/2$; противоречие. Итак, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) \geq \Phi_M(T_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть i – произвольное, но фиксированное натуральное число. Последовательность множеств T_k , где $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяет *условию* (i) если:

- (а) $T_0 = \bigcup_{j=1}^i T_0^j$, где $T_0^j \subset \mathbb{T}^d$ – выпуклое замкнутое тело в евклидовом пространстве E^d и при $1 \leq m < n \leq i$ справедливо $T_0^n \cap T_0^m = \emptyset$;
- (б) для любого $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in T_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $1 \leq j \leq d$ справедливы неравенства $0 \leq x_j \leq 2\pi$.

Нам потребуются следующие множества:

$$Q_k^m = \left\{ x \in E^d : d(x, E^d \setminus T_0^m) := \inf\{\|x - v\| : v \in E^d \setminus T_0^m\} \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $T_k \in \mathcal{T}^d$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$, $M \subset C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, M слабо замкнуто в $L^p(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $\sup\{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})} : f \in M\} < \infty$.

Тогда если $\lim_{k \rightarrow \infty} h(T_k, T_0) = 0$ и выполняется условие (i), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) = \Phi_M(T_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5(а) выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) \leq \Phi_M(T_0).$$

Докажем неравенство

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(T_k) \geq \Phi_M(T_0).$$

Считаем без потери общности, что $h(T_0, T_k) \leq 1/k$. Так как $h(T_k, T_0) \rightarrow 0$, $T_0 = \bigcup_{j=1}^i T_0^j$, $T_0^n \cap T_0^m = \emptyset$ при $1 \leq m < n \leq i$, T_0^j замкнуто, то считаем без потери общности, что при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство $T_k = \bigcup_{j=1}^i T_k^j$, T_k^j замкнуты и при любом номере m , $1 \leq m \leq i$, справедливо следующее соотношение: $h(T_k^m, T_0^m) \rightarrow 0$.

Рассмотрим множества $Q_k = \bigcup_{m=1}^i Q_k^m$. Так как $T_0 = \bigcup_{m=1}^i T_0^m$ – конечное объединение выпуклых тел T_0^m , то найдется номер k_0 такой, что при $k \geq k_0$ и $1 \leq m \leq i$ будет $Q_k^m \neq \emptyset$. Для $x \in E^d \setminus T_0^m$ справедливо $d(x, E^d \setminus T_0^m) = 0$; следовательно, при $k \geq k_0$, $1 \leq m \leq i$, справедливо соотношение $\text{int} Q_k^m \subset T_k^m$. Так как T_k^m замкнуто, то $Q_k^m \subset T_k^m$.

Имеем

$$Q_n \subset Q_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} Q_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \supset \bigcup_{k=k_0}^{\infty} Q_k = \text{int} T_0;$$

тогда по лемме 5(б) получаем, что $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(Q_k) \geq \Phi_M(T_0)$, но $Q_k \subset T_k$; следовательно, $\Phi_M(Q_k) \leq \Phi_M(T_k)$. Тогда $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(Q_k) \geq \Phi_M(T_0)$, и лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a > 0$. Рассмотрим систему $\Phi := \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ непрерывных на отрезке $[0, a]$ функций, обладающую следующими свойствами:

(А1) система Φ равномерно ограничена на $[0, a]$ и

$$\max_{0 \leq t \leq a} \psi_k(t) = \psi_k(0) = 1, \quad k \in \mathbb{N};$$

(А2) для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует такое положительное число $\delta_k > 0$, что $\psi_k(t) < 1$ при $t \in (0, \delta_k)$;

(А3) для любого $\xi \in (0, a]$ выполняется равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_k\|_{C[\xi, a]} = 0$.

Бабенко [9] получил следующий результат.

ТЕОРЕМА С [9]. Пусть система функций Φ , $k \in \mathbb{N}$, непрерывных на $[0, a]$, $a > 0$, удовлетворяет условиям (A1), (A2), (A3). Тогда величина

$$M(\delta, \Phi) := \sup \left\{ \frac{1}{\max_{0 \leq t \leq \delta} \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho_k \{1 - \psi_k(t)\}} : \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho_k = 1, \rho_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

является непрерывной функцией переменного $\delta \in (0, a]$

ЗАМЕЧАНИЕ. Система функций $\psi_k(t) = \cos kt$, которая соответствует классическому модулю непрерывности первого порядка, не удовлетворяет условию (A3).

Для элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ пространства $\mathbb{R}^d$ определим норму следующим образом:

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}.$$

ЛЕММА 7. Пусть

$$\begin{aligned} \psi(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}), \\ k &= (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d, \\ \psi_k(t) &:= \psi(kt) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \quad \psi_0(t) \equiv a_0. \end{aligned}$$

Пусть $\|k^n\|_\infty \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\psi_{(k_1^n, k_2^n, \dots, k_d^n)} := g_n \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ сходится в слабой топологии пространства $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ к ψ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим в пространстве $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ ортонормальный базис $\{\phi_s\}$. Для $s \in \mathbb{Z}_+^d$, $t \in \mathbb{T}^d$ считаем, что

$$\phi_s(t) = \phi_{s_1}(t_1) \phi_{s_2}(t_2) \dots \phi_{s_d}(t_d), \quad \text{где} \quad \{\phi_s\}_{s=0}^\infty = \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}.$$

Возьмем произвольный элемент $f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Имеет место представление f в виде кратного ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} c_k \phi_k(t), \quad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(t) \phi_k(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d.$$

Возьмем произвольно малое число $\varepsilon > 0$. Так как у нас ряд по полной ортонормальной системе, то найдется номер K такой, что для функции

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_d=0}^K c_{k_1, k_2, \dots, k_d} \phi_{k_1, k_2, \dots, k_d}(t)$$

выполняется неравенство $\|f - \tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})} \leq \varepsilon$. Так как $\|k^n\|_\infty \rightarrow \infty$, то существует номер n_0 такой, что для каждого номера $n \geq n_0$ справедливо неравенство $\|k^n\|_\infty > K$. Тогда для каждого номера $n \geq n_0$ найдется число $i \in [1, d]$ такое, что $|k_i^n| > K$. Таким образом, при $n \geq n_0$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{T}^d} \tilde{f}(t) g_n(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d = (2\pi)^d a_0 c_0.$$

Имеем

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(t) - \tilde{f}(t)| \cdot |g_n(t)| dt_1 dt_2 \dots dt_d \leq (2\pi)^d \varepsilon \|g_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} (2\pi)^d a_0 c_0 - (2\pi)^d \varepsilon \|g_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})} &\leq \int_{\mathbb{T}^d} f(t) g_n(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d \\ &\leq (2\pi)^d a_0 c_0 + (2\pi)^d \varepsilon \|g_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и равномерной ограниченности последовательности $\|g_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})}$ получаем, что $\langle f, g_n \rangle \rightarrow (2\pi)^d a_0 c_0$, т.е. g_n слабо сходится к ψ_0 .

Нам потребуется аналог части леммы Арестова [12], модифицированный для модуля непрерывности вида (2).

ЛЕММА 8. Пусть $T \in \mathcal{T}^d$, $\psi \in C^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \neq \mathbb{Z}^d$. Тогда

$$\overline{\kappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, T)^2 = \frac{1}{\inf\{\max_{t \in T} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} c_k \psi(kt) : c_k \geq 0, \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} c_k = 1\}} = \frac{1}{\Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T)}.$$

Лемма 8 является следствием лемм 1 и 2 [1].

Далее будем использовать следующее обозначение: $I(f) = (1/(2\pi)) \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

ЛЕММА 9. Пусть $T \in \mathcal{T}^d$, $\psi \in C^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\text{meas}\{t \in [0, 2\pi] : \psi(t) = 0\} = 0$, $0 \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \neq \mathbb{Z}^d$. Тогда $\overline{\kappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, T) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8 достаточно доказать, что $\Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T) > 0$. Допустим противное: существует последовательность $f_n \in W_{\psi, \Lambda}$, для которой $\|f_n\|_{C(T, \mathbb{R})} \rightarrow 0$. Имеем

$$f_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} c_k^{(n)} \psi_k(t), \quad c_k^{(n)} \geq 0, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} c_k^{(n)} = 1.$$

В силу условий $\psi \in C^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\text{meas}\{t \in [0, 2\pi] : \psi(t) = 0\} = 0$ и того, что $c_k^{(n)} \geq 0$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} c_k^{(n)} = 1$, получаем, что для любого номера $\|f_n\|_{C(T, \mathbb{R})} > 0$ и $I(\psi) > 0$. Так как $d < \infty$, то считаем без потери общности, что $\|(c_1^n, c_2^n, \dots, c_d^n)\|_\infty \rightarrow \infty$. По лемме 7

$$\int_T \psi_k(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d \rightarrow \mu(T) \alpha_0 = \mu(T) I(\psi) := \alpha > 0.$$

Найдется номер k_0 такой, что для $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ при $\max_{1 \leq i \leq d} |k_i| := |k| \geq k_0$ справедливо $\int_T \psi_k(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d \geq \alpha/2$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_T f_n(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d &= \int_T \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} c_k^{(n)} \psi_k(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d \\ &= \int_T \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| \leq k_0} c_k^{(n)} \psi_k(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d + \int_T \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| > k_0} c_k^{(n)} \psi_k(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d \\ &\geq \int_T \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| \leq k_0} c_k^{(n)} \psi_k(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| > k_0} c_k^{(n)} \right) \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

По предположению $\int_T f_n(t) dt_1 dt_2 \dots dt_d \rightarrow 0$, а $\alpha/2 > 0$; следовательно,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| > k_0} c_k^{(n)} \rightarrow 0, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| \leq k_0} c_k^{(n)} \rightarrow 1.$$

В пределе получим конечный набор чисел $c_k \geq 0$ таких, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| \leq k_0} c_k = 1, \quad \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| \leq k_0} c_k \psi_k(t) \right\|_{C(T, \mathbb{R})} = 0.$$

В силу неотрицательности функции ψ и $c_k \geq 0$ имеем

$$T \subset \left\{ t \in \mathbb{T}^d : \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| \leq k_0} c_k \psi_k(t) = 0 \right\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda, |k| \leq k_0} \{t \in \mathbb{T}^d : \psi_k(t) = 0\}.$$

Тогда $\text{meas } T = 0$; противоречие.

3. Существование и свойства экстремальной функции.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $T \in \mathcal{T}^d$, $0 \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \neq \mathbb{Z}^d$, $\infty > \varkappa_\psi^{(d)}(\Lambda, T) > 1/\sqrt{I(\psi)}$. Тогда существует функция, на которой в неравенстве (2) достигается равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись леммой 8, получаем

$$\frac{1}{\Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T)} = (\varkappa_\psi^{(d)}(\Lambda, T))^2 > \frac{1}{I(\psi)}.$$

Тогда $I(\psi) > \Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T)$. Так как $d < \infty$, то множество элементов $\psi_k(t)$ можно упорядочить в виде $\psi_{k^n}(t) = \psi_{(k_1^n, k_2^n, \dots, k_d^n)}(t)$ так, что $\|k^n\| \rightarrow \infty$; тогда по лемме 7 множество $\psi_k(t)$ является последовательностью, которая сходится к $\psi_0 \equiv I(\psi)$ в слабой топологии пространства $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. Имеем $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$; следовательно, множество $\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}$ ограничено. По лемме 1 множество $\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}$ слабо замкнуто в $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $\psi_0 \in \widetilde{W}_{\psi, \Lambda}$, $\Phi_{\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}}(T) < I(\psi) = \|\psi_0\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})}$. Тогда по лемме 3 найдется функция $f \in \widetilde{W}_{\psi, \Lambda}$ такая, что

$$\Phi_{\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}}(T) = \|f\|_{L^\infty(T, \mathbb{R})}.$$

По лемме 4 $\Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T) = \Phi_{\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}}(T)$ и $f \in W_{\psi, \Lambda}$. Имеем

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \rho_k \psi_k(t), \quad \text{где} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \rho_k = 1, \quad \forall k \quad \rho_k \geq 0,$$

тогда для $\tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \sqrt{\rho_k} \varphi_k(t)$ в неравенстве (2) достигается равенство.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\text{meas}\{t \in [0, 2\pi] : \psi(t) = 0\} = 0$, $0 \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \neq \mathbb{Z}^d$. Тогда найдется число $\delta > 0$ такое, что для множества

$$T(\delta) = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d : t_1 \leq \delta, t_2 \leq \delta, \dots, t_d \leq \delta\}$$

в неравенстве (2) достигается равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем некоторую функцию $\psi_k \in W_{\psi, \Lambda}$. Функция ψ_k непрерывна по переменной $t \in \mathbb{T}^d$ и $\psi_k(0) = 0$, так как $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Поэтому найдется число $\delta > 0$ такое, что $\|\psi_k\|_{C(T(\delta), \mathbb{R})} < I(\psi)$. Тогда по лемме 8

$$\overline{\varkappa}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T(\delta)) > \frac{1}{\sqrt{I(\psi)}}.$$

По лемме 9

$$\overline{\varkappa}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T) < \infty.$$

Тогда по теореме 1 для множества $T(\delta)$ в неравенстве (2) достигается равенство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\psi(t) = 2(1 - \cos t)$, $\Lambda \subset \{-n+1, -n+2, \dots, n-1\} : \Lambda'$, $T \in \mathcal{T}^1$, $\text{meas } T < \pi/n$. Тогда в неравенстве (2) достигается равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 $\overline{\varkappa}_{\psi}^{(1)}(\Lambda, T) < \infty$. В силу включения $\Lambda \subset \Lambda'$ имеем $\overline{\varkappa}_{\psi}^{(1)}(\Lambda, T) > \overline{\varkappa}_{\psi}^{(1)}(\Lambda', T)$, по теореме В $\overline{\varkappa}_{\psi}^{(1)}(\Lambda', T) > 1/\sqrt{2}$; следовательно, справедливость следствия получаем по теореме 1.

Бабенко [13] анонсировал результат, из которого следует существование экстремальной функции в неравенстве (2) при $\varkappa_m(n, \delta) > \inf\{\varkappa_m(n, \gamma) : \gamma \in (0, 2\pi)\}$.

Нам потребуется следующая лемма, доказательство которой фактически содержится в лемме 3 [1].

ЛЕММА 10. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ конечное и содержит 0, замкнутое множество $T \subset \mathbb{T}^d$ счетно, $\xi \in (C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}))^*$, $\text{supp } {}^2\xi = \bigcup_{k \in \mathcal{A}} \{t_k\} \subset T$, $\nu_k \geq 0$ для любого номера $k \in \mathbb{N}$, $\xi = \sum_{k \in \mathcal{A}} \nu_k \delta_{t_k}$. Тогда

$$\inf\{\langle \xi, g \rangle : g \in W_{\psi, \Lambda}\} = 0.$$

Нам потребуется следующая теорема Титце–Урысона, см., например, [14; с. 211].

ТЕОРЕМА Т–У. Пусть A – замкнутое подмножество нормального (в частности, банахова) топологического пространства X , а g – заданная на A вещественная непрерывная функция. Тогда функцию g можно непрерывно продолжить на все пространство X без изменения ее верхней и нижней граней.

ЛЕММА 11. Пусть $r > 0$, $T \subset \mathbb{T}^d$ – замкнутое множество, $\mu \in (C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}))^*$, $f \in V_T(r)$. Тогда для того, чтобы выполнялось условие

$$\langle \mu, f \rangle = \sup\{\langle \mu, g \rangle : g \in V_T(r)\} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

- (a) $\text{supp } \mu \subset T$;
- (b) для любого $t \in \text{supp } \mu$ справедливо равенство $f(t) = r \text{ sign } \mu(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Из условия (a) получаем, что $\sup\{\langle \mu, g \rangle : g \in V_T(r)\} = r \text{ var } |\mu|$, а из условия (b), что $\langle \mu, f \rangle = r \text{ var } |\mu|$.

Необходимость. Докажем, что полная вариация $\text{var } \mu$ регулярна и σ -аддитивна. Действительно, $\mu \in (C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}))^*$; следовательно, мера μ регулярна и σ -аддитивна.

² $\text{supp } x = \{t \in \mathbb{T}^d : x(t) \neq 0\}$

По лемме 6 [15; с. 112] $\text{var } \mu$ аддитивна; по лемме 12 [15; с. 153] $\text{var } \mu$ регулярна; по теореме Александрова (см. теорему 13 [15; с. 154]) $\text{var } \mu$ σ -аддитивна.

Если не выполняется условие (а), то найдется точка $t \in (\text{supp } \mu) \setminus T$. Так как T замкнуто в $\mathbb{T}^d$, то найдется замкнутый шар $\mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)$ такой, что $\mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t) \cap T = \emptyset$, $\varepsilon_0 > 0$. Так как $t \in \text{supp } \mu$, то $\text{var}(\mu, \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)) > 0$. Пусть $\varepsilon_n > \varepsilon_0$, $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_0$. Так как T замкнуто в $\mathbb{T}^d$, то найдется номер n_0 , начиная с которого $\mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_n, t) \cap T = \emptyset$. Считаем, без потери общности, что при любом натуральном n справедливо равенство $\mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_n, t) \cap T = \emptyset$. Пусть

$$A_n = \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_n, t) \setminus \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t), \quad G_n = \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_n, t) \setminus \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_{n+1}, t).$$

Имеем $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} G_k$. Так как $\text{var } \mu$ σ -аддитивна и регулярна, то $\text{var}(\mu, A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \text{var}(\mu, G_k)$; тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\mu, A_n) = 0$. Считаем без потери общности, что для любого номера n будет $\text{var}(\mu, A_n) \leq 1/n$.

Пусть $\tilde{\mu}$ – сужение меры μ на множество $\mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)$. Имеем

$$\text{var}(\tilde{\mu}, \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)) = \text{var}(\mu, \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)) > 0, \quad \tilde{\mu} \in (C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}))^*;$$

следовательно, $\tilde{\mu}$ – ненулевой элемент пространства $(C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}))^*$. Тогда найдется функция $g \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ такая, что $\langle \tilde{\mu}, g \rangle = c > 0$. Функция $|g|$ непрерывна на компактном множестве $\mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)$; следовательно, можем считать, что $|g(x)| \leq N < \infty$ для любой точки $x \in \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)$.

Определим функцию g_n для каждого номера n . Пусть $g_n(x) = 0$ при $x \in \mathbb{T}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}_{E^d}(\varepsilon_n, t)$, $g_n(x) = ng(x)$ при $x \in \mathbb{B}_{E^d}(\varepsilon_0, t)$. По теореме Т–У функцию g_n можно непрерывно продолжить на все множество $\mathbb{T}^d$ без изменения ее верхней и нижней граней. Тогда $g_n \in V_T(r)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \langle g_n, \mu \rangle &= \int_{\mathbb{T}^d} g_n(t) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{T}^d \setminus \mathring{\mathbb{B}}_{E^d}(\varepsilon_n, t)} g_n(t) d\mu + \int_{A_n} g_n(t) d\mu + \int_{\mathring{\mathbb{B}}_{E^d}(\varepsilon_0, t)} g_n(t) d\mu > -N + Nnc \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пришли к противоречию; следовательно, условие (а) выполняется.

Докажем выполнение условия (b). Пусть

$$f \in V_T(r), \quad \langle \mu, f \rangle = \sup\{\langle \mu, g \rangle : g \in V_T(r)\} < \infty.$$

Возьмем $\tilde{f}$ – сужение функции f на множество T . По теореме Т–У имеем

$$\langle \mu, f \rangle = \sup\{\langle \mu, g \rangle : g \in V_T(r)\} = \langle \mu, \tilde{f} \rangle = \sup\{\langle \mu, g \rangle : g \in \mathbb{B}_{C(T, \mathbb{R})}(r, 0)\}.$$

Теперь, как доказано, например, в [16; с. 29], выполняется условие

$$\forall t \in \text{supp } \mu \quad \tilde{f}(t) = r \text{ sign } \mu(t);$$

из последнего равенства и условия (а) получаем выполнение условия (b).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ и замкнутого множества $T \subset \mathbb{T}^d$ обозначим через

$$\text{crit } f_T = \{t \in T : |f(t)| = \|f\|_{C(T, \mathbb{R})}\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ конечное и содержит 0, $T \subset \mathbb{T}^d$ – замкнутое множество, $f \in W_{\psi, \Lambda}$. Если $\Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T) = \|f\|_{C(T, \mathbb{R})} > 0$, то множество $\text{crit } f_T$ имеет мощность больше мощности счетного множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T) = r = \|f\|_{C(T, \mathbb{R})} > 0$. Тогда $f \in VT(r) \cap W_{\psi, \Lambda}$ и при $r_1 < r$ справедливо равенство $VT(r_1) \cap W_{\psi, \Lambda} = \emptyset$. Имеем $VT(r)$ – выпуклое замкнутое тело в $C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $W_{\psi, \Lambda}$ – выпуклое множество.

Пусть $\mathring{VT}(r)$ – внутренность множества $VT(r)$ относительно нормы пространства $C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $\overline{W}_{\psi, \Lambda}$ – замыкание множества $W_{\psi, \Lambda}$ относительно нормы пространства $C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. Так как при $r_1 < r$ выполняется $VT(r_1) \cap W_{\psi, \Lambda} = \emptyset$, то $\mathring{VT}(r) \cap W_{\psi, \Lambda} = \emptyset$; следовательно, $\overline{W}_{\psi, \Lambda} \cap \mathring{VT}(r) = \emptyset$. Тогда, применяя теорему Хана–Банаха в пространстве $C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, найдем функционал $\xi \in (C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}))^* \setminus \{0\}$ такой, что

$$\inf\{\langle \xi, g \rangle : g \in \overline{W}_{\psi, \Lambda}\} = \sup\{\langle \xi, g \rangle : g \in VT(r)\} > 0.$$

Имеем

$$\inf\{\langle \xi, g \rangle : g \in W_{\psi, \Lambda}\} = \inf\{\langle \xi, g \rangle : g \in \overline{W}_{\psi, \Lambda}\} = \sup\{\langle \xi, g \rangle : g \in VT(r)\} = \langle \xi, f \rangle.$$

По лемме 11 справедливы два следующих соотношения: $\text{supp } \xi \subset T$; для любого $t \in \text{supp } \xi$ справедливо равенство $f(t) = r \text{ sign } \xi(t)$.

Так как $f \in W_{\psi, \Lambda}$, то для любой точки $t \in \mathbb{T}^d$ имеем $f(t) \geq 0$. В случае, когда мера ξ является дискретной (носитель $\text{supp } \xi$ – не более чем счетное множество) по лемме 10 получаем, что

$$\sup\{\langle \xi, g \rangle : g \in VT(r)\} = \inf\{\langle \xi, g \rangle : g \in \overline{W}_{\psi, \Lambda}\} = 0,$$

но

$$\sup\{\langle \xi, g \rangle : g \in VT(r)\} \geq r \cdot \|\xi\|_{(C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}))^*} > 0.$$

Тогда носитель $\text{supp } \xi$ несчетен. Имеем

$$r - f(t) \geq 0 \quad \forall t \in T, \quad r - f(t) = 0 \quad \forall t \in \text{supp } \xi \subset T;$$

следовательно, функция $r - f(t)$ имеет несчетное множество нулей.

Во многих неравенствах экстремальными функциями являются тригонометрические полиномы (см., например, [3], [5]), но в данном случае имеют место следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ – тригонометрический полином, $d = 1$, $\delta > 0$, $T = [0, \delta]$, $0 \in \Lambda \subset \mathbb{Z}$ – конечное множество, $0 \neq \Lambda$. Тогда в неравенстве (2) равенство не может достигаться на функции, которая является конечной суммой гармоник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: в неравенстве (2) равенство достигается на функции f , которая является конечной суммой гармоник. Пусть $f(t) = \sum_{k \in A} a_k \varphi_k(t)$, где $0 \in A \subset \mathbb{Z}$ – конечное множество. Тогда, как в лемме 8,

$$\Phi_{W_{\Lambda}}(T) = \max_{t \in T} \left(\sum_{k \in A \setminus \Lambda} a_k^2 \psi(kt) \right) / \sum_{k \in A \setminus \Lambda} a_k^2.$$

Считаем, без потери общности, что $\sum_{k \in A \setminus \Lambda} a_k^2 = 1$.

Пусть $g(t) = \sum_{k \in A \setminus \Lambda} a_k^2 \psi(kt)$. По теореме 2 множество $\text{crit } gT$ имеет мощность больше счетной, но функция g является тригонометрическим полиномом и на множестве $(0, \delta)$ имеет конечное число локальных экстремумов; противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае классического модуля непрерывности ω_m функция ψ является тригонометрическим полиномом.

4. Непрерывность точной константы в неравенстве Джексона–Стечкина.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $T_k \in \mathcal{T}^d$,

$$\overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_k) \geq \frac{1}{\sqrt{I(\psi)}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h(T_k, T_0) = 0.$$

Тогда если выполняется условие

$$T_0 \subset \text{cl} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} T_k \right) \quad (4)$$

или условие (i), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_k) = \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7 множество $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \{\psi_k(t)\}$ является последовательностью, которая сходится к $\psi_0 \equiv I(\psi)$ в слабой топологии пространства $L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. По лемме 1 $\overline{\text{conv}} W_{\psi, \Lambda} = \widetilde{W}_{\psi, \Lambda}$. По лемме 4

$$\Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T_k) = \Phi_{\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}}(T_k), \quad \Phi_{W_{\psi, \Lambda}}(T_0) = \Phi_{\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}}(T_0).$$

По лемме 5 при выполнении условия (4) и по лемме 6 при выполнении условия (i)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}}(T_k) = \Phi_{\widetilde{W}_{\psi, \Lambda}}(T_0).$$

По лемме 8

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_k) = \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_0).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть имеем $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\Lambda \in \Lambda_*^d$, $T_k \in \mathcal{T}^d$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} h(T_k, T_0) = 0$. Тогда если выполняется условие $T_0 \subset \text{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} T_k)$ или условие (i), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_k) = \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме A

$$\overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_k) \geq \frac{1}{\sqrt{\psi}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

По теореме 3

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_k) = \overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T_0).$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\Lambda \in \Lambda_*^d$,

$$T(\delta) = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d : 0 \leq t_1 \leq \delta, 0 \leq t_2 \leq \delta, \dots, 0 \leq t_d \leq \delta\}.$$

Тогда константа Джексона–Стечкина $\overline{\mathcal{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, T(\delta))$ непрерывна по переменной $\delta \in (0, 2\pi)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Козко, А. В. Рождественский, “О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности”, *Матем. сб.*, **195**:8 (2004), 3–46.
- [2] А. И. Козко, А. В. Рождественский, “О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности”, *Матем. заметки*, **73**:5 (2003), 783–788.
- [3] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2 ”, *Приближение функций в среднем*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 71–74.
- [4] V. V. Arestov, N. I. Chernykh, “On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials”, *Approximation and Functions Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1981, 25–43.
- [5] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [6] А. Г. Бабенко, “О неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших L^2 -приближений функций тригонометрическими полиномами”, *Теория приближений. Асимптотические разложения*, Сборник статей, Тр. ИММ УрО РАН, **7**, № 1, 2001, 30–46.
- [7] С. Н. Васильев, “Неравенство Джексона–Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$ ”, *Теория приближений. Асимптотические разложения*, Сборник статей, Тр. ИММ УрО РАН, **7**, № 1, 2001, 75–84.
- [8] V. V. Arestov, A. G. Babenko, “Continuity of the best constant in the Jackson inequality in L^2 with respect to argument of modulus of continuity”, *Approximation Theory*, DARBA, Sofia, 2002, 13–23.
- [9] А. Бабенко, “Пространство L^2 на отрезке с весом Якоби, непрерывная зависимость константы Джексона от аргумента модуля непрерывности”, *Приближение функций. Теоретические и прикладные аспекты*, Сборник статей, МИЭТ, М., 2003, 58–68.
- [10] С. Н. Васильев, *Аппроксимация функций тригонометрическими полиномами в L^2 и фрактальными функциями в C* , Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Екатеринбург, 2002.
- [11] Е. Е. Бердышева, “Оптимальное множество модуля непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **76**:5 (2004), 666–674.
- [12] В. В. Арестов, В. Ю. Попов, “Неравенства Джексона на сфере в L_2 ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 8, 13–20.
- [13] А. Бабенко, “Взаимосвязь точного неравенства Джексона в L^2 с задачей Дельсарта”, *Алгоритмический анализ неустойчивых задач*, Тезисы докладов Всероссийской конференции, Екатеринбург, 2004, 12–13.
- [14] Р. А. Александрян, Э. А. Мизарханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979.
- [15] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [16] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Grundlehren Math. Wiss., **171**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

В. С. Балаганский

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступило

10.06.2009

Исправленный вариант

23.03.2012