Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Княгина, В. С. Монахов, О подгруппах конечной группы, перестановочных с бипримарными подгруппами, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 524–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:31:51

О подгруппах конечной группы, перестановочных с бипримарными подгруппами

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Устанавливается разрешимость H/H_G при условии, что подгруппа H конечной группы G перестановочна со всеми бипримарными подгруппами четного порядка.

Библиография: 7 названий.

Рассматриваются только конечные группы. В отношении терминологии и обозначений мы придерживаемся [1]–[3]. Напомним, что *pd-подгруппой* называется подгруппа, порядок которой делится на простое число p . *Бипримарная* группа – это группа порядка $p^\alpha q^\beta$, где p и q – различные простые числа, a и b – натуральные числа. Если в бипримарной группе имеется нормальная силовская подгруппа, то группа называется *дисперсивной*. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется *p -замкнутой*. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G . Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение подгрупп A и B с нормальной подгруппой A . Информация о группах Шмидта и группах Фробениуса имеется в [2], [3].

Пальчик [4] установил следующие свойства подгруппы H , перестановочной со всеми бипримарными подгруппами группы G :

- либо H субнормальна, либо примарна;
- фактор-группа H/H_G разрешима; в частности, если H совпадает со своим коммутантом, то H нормальна.

Здесь H_G – ядро подгруппы H в группе G , т.е. наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H .

В настоящей заметке развиваются результаты работы [4] и доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что силовская p -подгруппа P группы G ненормальна в G и перестановочна со всеми бипримарными дисперсивными pd -подгруппами из G . Тогда G – бипримарная группа, подгруппа P максимальна в G и силовская q -подгруппа Q элементарная абелева, где $q \neq p$, $q \in \pi(G)$. Кроме того, либо G – группа Фробениуса и Q – минимальная нормальная подгруппа в G , либо $|Q| = q$ и p делит $q - 1$.*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф 08Р–230).

ТЕОРЕМА 2. *Если подгруппа H перестановочна со всеми бипримарными дисперсивными pd -подгруппами группы G , то фактор-группа H/H_G p -разрешима.*

При $p = 2$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если подгруппа H группы G перестановочна со всеми бипримарными дисперсивными подгруппами четного порядка, то H/H_G разрешима. В частности, если H совпадает со своим коммутантом, то H нормальна в G .*

Вначале докажем несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть $p \in \pi(G)$ и G не является p -группой. Тогда G порождается своими бипримарными дисперсивными pd -подгруппами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G p -нильпотентна, то в G существуют $\{p, q\}$ -холловы подгруппы для каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ (см. [3; гл. VI]). Ясно, что группа G ими порождается. Пусть G не p -нильпотентна. По теореме IV.5.4 [3] в G существует p -замкнутая бипримарная pd -подгруппа. Через B обозначим подгруппу, порожденную всеми бипримарными дисперсивными pd -подгруппами группы G . Ясно, что подгруппа B нормальна в G и p делит порядок B . Пусть $B \neq G$ и q – простой делитель $|G : B|$. Предположим, что $q \neq p$. По лемме Фраттини $G = N_G(P)B$, где P – силовская p -подгруппа из B . Так как $|G : B| = |N_G(P) : B \cap N_G(P)|$, то в $N_G(P)$ существует подгруппа $[P]Q$, где Q – силовская q -подгруппа из $N_G(P)$. По построению подгруппы B подгруппа $[P]Q$ содержится в B и q не делит $|G : B|$, противоречие. Значит, допущение неверно и $q = p$, т.е. $|G : B| = p^n$, где n – натуральное число. Так как B не является p -группой, то некоторое простое число $r \neq p$ делит $|B|$. Теперь по лемме Фраттини $G = BN_G(R)$, где R – силовская r -подгруппа из B . Пусть S – силовская p -подгруппа из $N_G(R)$. Подгруппа $[R]S$ является бипримарной дисперсивной pd -подгруппой, поэтому $[R]S \subseteq N_G(R) \cap B$ и p не делит $|G : B| = |N_G(R) : N_G(R) \cap B|$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть H – подгруппа группы G . Если $HN^x = N^xH$ для всех $x \in G$, то H субнормальна в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по порядку группы. Если $H = G$, то утверждение справедливо. Пусть H – собственная подгруппа группы G . По лемме VI.4.10 [3] H^G – собственная подгруппа группы G . По индукции H субнормальна в H^G , поэтому H субнормальна в G .

ЛЕММА 3. *Пусть подгруппа H перестановочна со всеми бипримарными дисперсивными pd -подгруппами группы G и $p \in \pi(H)$. Тогда H перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами группы G и либо H субнормальна в G , либо H – p -подгруппа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – произвольная бипримарная pd -подгруппа группы G . По лемме 1 подгруппа B порождается своими бипримарными дисперсивными pd -подгруппами, с каждой из которых подгруппа H перестановочна по условию. Хорошо известно, что если подгруппа H перестановочна с подгруппами $X_1, X_2, \dots, X_n$, то H перестановочна с подгруппой, порожденной подгруппами $X_1, X_2, \dots, X_n$. Поэтому H перестановочна с B . Если H не порождается своими бипримарными дисперсивными pd -подгруппами, то H – p -подгруппа по лемме 1. Пусть H порождается

своими бипримарными дисперсивными rd -подгруппами. Тогда подгруппа H перестановочна с подгруппой H^x для каждого $x \in G$. Теперь подгруппа H субнормальна в G по лемме 2. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Если H – субнормальная подгруппа группы G и простое число p не делит $|G : H|$, то каждая силовская p -подгруппа группы G содержится в H_G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – произвольная силовская p -подгруппа группы G . Если H нормальна в G , то $HP = PH$ и $|G : H| = |G : HP||HP : H|$ не делится на p . Поэтому p не делит $|HP : H|$ и $H = HP$, т.е. P содержится в H . Теперь $P^G \subseteq H_G$.

Пусть $H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$. Применим индукцию по n . Для $n = 1$ утверждение уже проверено. Так как

$$|G : H| = |G : H_i||H_i : H|,$$

то p не делит $|G : H_i|$ для любого i . Подгруппа P содержится в H_{n-1} по доказанному. Так как P является силовской p -подгруппой в H_{n-1} , то по индукции P содержится в H . Отсюда следует, что $P^G \subseteq H_G$. Лемма доказана.

Нам понадобятся некоторые элементы теории формаций (см. [1], [2]). Если $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – наименьшая подгруппа G такая, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Подгруппу $G^{\mathfrak{F}}$ называют $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы G . Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – формации, то их произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ состоит из всех групп G , у которых $G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}$. Если p и q – простые числа, то $G(p, q)$ – подгруппа группы G , порожденная всеми силовскими r -подгруппами для всех $r \in \pi(G) \setminus \{p, q\}$.

ЛЕММА 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $G^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $H/G^{\mathfrak{F}}$ – подгруппа в группе $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $H/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$ содержится в $H/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, поэтому $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Пусть H и B – перестановочные подгруппы группы G , причем H субнормальна, а B – бипримарная $\{p, q\}$ -подгруппа для некоторых различных простых чисел p и q . Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, содержащая все бипримарные $\{p, q\}$ -группы и $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Тогда $H^{\mathfrak{F}} = (HB)^{\mathfrak{F}} = H(p, q)^{\mathfrak{F}}$ и $H^{\mathfrak{F}}$ является нормальной подгруппой в HB .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если R – силовская r -подгруппа из HB , $r \in \pi(HB) \setminus \{p, q\}$, то R содержится в H согласно лемме 4. Значит, R содержится в $H(p, q)$ и $H(p, q)$ порождается всеми силовскими r -подгруппами из HB для всех $r \in \pi(HB) \setminus \{p, q\}$. Поэтому $H(p, q)$ – характеристическая подгруппа в HB . Но $H(p, q)^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа в $H(p, q)$, поэтому $H(p, q)^{\mathfrak{F}}$ нормальна в HB . Так как $HB/H(p, q) \in \mathfrak{F}$ и $(HB)^{\mathfrak{F}} \subseteq H(p, q)$. По лемме 5 $(HB)^{\mathfrak{F}} = H(p, q)^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа $H(p, q)$ содержится в H и $H/H(p, q) \in \mathfrak{F}$, поэтому $H^{\mathfrak{F}} \subseteq H(p, q)$ и опять по лемме 5 $H^{\mathfrak{F}} = H(p, q)^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Если силовская p -подгруппа P группы G перестановочна со всеми p -замкнутыми бипримарными rd -подгруппами группы G , то G p -разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in G$ и B – p -замкнутая бипримарная pd -подгруппа группы G . По условию $PB^{x^{-1}} = B^{x^{-1}}P$. Поэтому

$$(PB^{x^{-1}})^x = (B^{x^{-1}}P)^x = P^x B = BP^x,$$

т.е. в группе G каждая силовская p -подгруппа перестановочна со всеми p -замкнутыми бипримарными pd -подгруппами. По теореме 6 [5] группа G p -разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу леммы 3 силовская p -подгруппа P группы G перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из G . Предположим, что группа G не бипримарна, и пусть Q и R – силовские q - и r -подгруппы группы G , $q \neq p \neq r$, $q \neq r$. Если G не p -нильпотентна, то по теореме IV.5.4 [3] в G существуют p -замкнутые бипримарные pd -подгруппы, которые по условию перестановочны с подгруппой P . По лемме 7 группа G p -разрешима. Если G p -нильпотентна, то G также p -разрешима. Итак, в любом случае группа G p -разрешима. По теореме 5.3.13 [6] в G существуют $\{p, q\}$ - и $\{p, r\}$ -холловы подгруппы. Без ущерба для доказательства можно считать, что PQ и PR – подгруппы группы G . Подгруппы $(PQ)^x$ и $(PR)^x$ перестановочны с подгруппой P для любого $x \in G$. Значит, $P(PQ)^x$ является подгруппой в группе G , поэтому

$$P \subseteq \bigcap_{x \in G} (PQ)^x = (PQ)_G.$$

Аналогично $P \subseteq (PR)_G$. Отсюда следует, что $P = (PQ)_G \cap (PR)_G$, т.е. подгруппа P нормальна в G . Имеем противоречие с условием. Поэтому допущение неверно и группа G бипримарна.

Предположим, что подгруппа P не максимальна в группе G , и пусть выполнено $P \subseteq N_G(P) \subseteq M$, где M – максимальная подгруппа группы G . Так как $P \neq M$, то M – бипримарная подгруппа. По условию $PM^x = M^xP$ для всех $x \in G$, поэтому $P \subseteq M_G$. По лемме Фраттини $G = M_G N_G(P) \subseteq M$; противоречие. Поэтому допущение неверно и P – максимальная подгруппа.

Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$. Так как G не q -нильпотентна, то по теореме IV.5.4 [3] в G существует q -замкнутая qd -подгруппа Шмидта $S = [Q]P_1$. Напомним, что группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Их свойства перечислены в теореме IV.5.4 [3]. По условию $P([Q]P_1) = ([Q]P_1)P = G$ и Q является силовской q -подгруппой группы G . Предположим, что Q не является элементарной абелевой. Тогда $Z(Q)P_1$ – бипримарная подгруппа группы G и $P(Z(Q)P_1) = G$, откуда следует, что $Z(Q)$ – силовская q -подгруппа группы G ; противоречие. Поэтому допущение неверно и силовская q -подгруппа Q в G элементарная абелева.

Пусть $D = P \cap P^x$ – пересечение наибольшего порядка двух различных силовских p -подгрупп. Если $D = 1$, то G – группа Фробениуса (см. [3; гл. V.8], [6; 6.2.1]) и Q – минимальная нормальная подгруппа группы G . Пусть $D \neq 1$. По лемме 4.16 [1] подгруппа $N_G(D)$ не является p -замкнутой, поэтому в $N_G(D)$ существует бипримарная подгруппа $D\langle g \rangle$, где g – элемент порядка q . Элемент g существует, поскольку подгруппа Q элементарная абелева. По условию

$$P(D\langle g \rangle) = (D\langle g \rangle)P = P\langle g \rangle = G$$

и $|Q| = q$. Так как в G существует q -замкнутая подгруппа Шмидта $[Q]P_1$, то по их свойствам p делит $q - 1$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу леммы 3 подгруппа H перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из G . Пусть $H_G = 1$ и H не p -разрешима. Тогда $p \in \pi(H)$ и H субнормальна в G по лемме 3. Поскольку группа G не p -нильпотентна, то существует бипримарная p -замкнутая $\{p, q\}$ -подгруппа B для некоторого простого числа q . Пусть K – подгруппа в HB , порожденная всеми силовскими r -подгруппами из HB для всех $r \in \pi(HB) \setminus \{p, q\}$. По лемме 4 подгруппа K содержится в H . Так как HB/K – $\{p, q\}$ -группа, то $H^{p\mathfrak{S}} \subseteq K$. Здесь $p\mathfrak{S}$ – класс всех p -разрешимых групп, а $H^{p\mathfrak{S}}$ – $p\mathfrak{S}$ -корадикал подгруппы $p\mathfrak{S}$, т.е. $H^{p\mathfrak{S}}$ является наименьшей нормальной в H подгруппой, фактор-группа $H/H^{p\mathfrak{S}}$ по которой p -разрешима. Хорошо известно, что класс $p\mathfrak{S}$ является насыщенной наследственной формацией, поэтому подгруппа $H^{p\mathfrak{S}}$ определяется однозначно. Формация $p\mathfrak{S}$ является наследственной и $(p\mathfrak{S})(p\mathfrak{S}) = p\mathfrak{S}$. В силу леммы 6 получаем, что $K^{p\mathfrak{S}} = H^{p\mathfrak{S}}$ и $H^{p\mathfrak{S}}$ нормальна в HB , т.е. $B \subseteq N_G(H^{p\mathfrak{S}})$. Поскольку группа G порождается в силу леммы 1 всеми бипримарными pd -подгруппами, то $H^{p\mathfrak{S}}$ нормальна в G и $H^{p\mathfrak{S}}$ содержится в $H_G = 1$. Значит, подгруппа H p -разрешима.

Пусть теперь $H_G \neq 1$. Проверим, что подгруппа H/H_G перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами из фактор-группы G/H_G . Пусть A/H_G – бипримарная pd -подгруппа группы G и B – минимальное добавление к подгруппе H_G в A . По лемме 3.21 [1] пересечение $B \cap H_G \subseteq \Phi(H)$. Так как $A/H_G \simeq B/B \cap H_G$, то $\pi(A/H_G) = \pi(B)$ по теореме 4.33 [1]. Поэтому B – бипримарная pd -подгруппа группы G . По условию подгруппы H и B перестановочны, поэтому перестановочными будут и подгруппы H/H_G и A/H_G . Так как ядро подгруппы H/H_G в группе G/H_G равно единице, то по доказанному подгруппа H/H_G p -разрешима. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если подгруппа H перестановочна со всеми бипримарными pd -подгруппами группы G и $H = H^{p\mathfrak{S}}$, то H нормальна в G .

В 1962 г. Ито и Сеп [7] доказали нильпотентность H/H_G при условии, что подгруппа H перестановочна со всеми подгруппами группы G . Вполне естественно возникает следующий вопрос.

ВОПРОС. Будет ли H/H_G нильпотентна, если подгруппа H перестановочна со всеми подгруппами Шмидта конечной группы G ?

Положительный ответ на поставленный вопрос известен в двух случаях: когда H холлова (это легко доказывается) и когда H максимальна, см. [5; следствие 2, с. 750].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйшая школа, Минск, 2006.
- [2] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [3] B. Huppert, *Endliche Gruppen*, v.I, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [4] Э. М. Пальчик, “О b -квазинормальных подгруппах”, *Докл. АН БССР*, **11**:11 (1967), 967–969.

- [5] Я. Г. Беркович, Э. М. Пальчик, “О перестановочности подгрупп конечной группы”, *Сиб. матем. журн.*, **8**:4 (1967), 741–753.
- [6] М. Suzuki, *Group Theory*, v. II, Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag, New York, 1986.
- [7] N. Itô, J. Szép, “Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **23** (1962), 168–170.

В. Н. Княгина

Гомельский инженерный институт министерства
чрезвычайных ситуаций Республики Беларусь
E-mail: valer13@mail.ru

Поступило

05.06.2009

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: monakhov@gsu.by