Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Долгобородов, О нулях функций из пространств Бергмана и некоторых близких к ним пространств, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 201–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:10:08

УДК 517.53

О нулях функций из пространств Бергмана и некоторых близких к ним пространств

А. А. Долгобородов

Найдены неупрощаемые необходимые условия на считающие функции нулей аналитических функций из пространств Бергмана со стандартным весом и из некоторых пространств, являющихся их естественным обобщением.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть A – пространство аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, $A_{q,\alpha}^p$ – пространство функций $f \in A$, для которых

$$\left(\int_0^1 \mathfrak{M}_p(f; r)^q (1 - r^2)^\alpha r dr \right)^{1/q} < \infty,$$

где $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$,

$$\mathfrak{M}_p(f; r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad \mathfrak{M}_\infty(f; r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Определение пространства $A_{q,\alpha}^p$ и некоторые связанные с ним результаты можно найти, например, в обзоре [1; п. 1.3], где это пространство обозначено через $B_1(p, q, s)$. В литературе $A_{q,\alpha}^p$ называют также *пространством со смешанной нормой*. При $q = p$ получим пространство Бергмана A_α^p со стандартным весом t^α . Положим $A_{q,\alpha}^0 = \bigcup_{p>0} A_{q,\alpha}^p$. Пространства $A_{q,\alpha}^p$, $p \in (0, +\infty]$, образуют шкалу пространств, в которой при $0 < p_1 < p_2 < \infty$ имеют место теоретико-множественные вложения

$$A_{q,\alpha}^0 \supset A_{q,\alpha}^{p_1} \supset A_{q,\alpha}^{p_2} \supset A_{q,\alpha}^\infty.$$

Пусть $n(r; f)$ – считающая функция нулей функции $f \in A$, т.е. $n(r; f)$ – это число нулей $z_k(f)$ функции f в круге $|z| < r$, $0 < r \leq 1$, с учетом кратности нулей. Функция $n(r; f)$ является наиболее простой и наглядной характеристикой распределения модулей нулей функций из того или иного класса $H \subset A$. Оценки считающей функции нулей близки к оценкам уклонений $1 - |z_n(f)|$ нулей $z_n(f)$ функции f от границы круга $|z| < 1$, поскольку из неравенства $1 - |z_n(f)| \leq a_n$ следует, очевидно, неравенство $n(1 - a_n; f) < n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-00225).

Работа посвящена оценкам считающих функций $n(r; f)$ и уклонений $1 - |z_n(f)|$ для функций $f \in A_{q,\alpha}^p$. Полученные в ней результаты практически исчерпывают возможности их дальнейшего улучшения, если иметь в виду возможности уточнения мажоранты в оценке типа $n(r; f) \leq \varphi(r)$ или $1 - |z_n(f)| \leq a_n$. Напомним историю вопроса.

Шапиро и Шилдс [2] доказали, что если $f \in A_0^p$, то

$$n(r; f) = O\left(\frac{1}{1-r} \log \frac{1}{1-r}\right), \quad r \rightarrow 1-0,$$

что равносильно тому, что

$$1 - |z_n(f)| = O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из одного из результатов работы Горовица [3] непосредственно следует, что если $f \in A_\alpha^p$, $p > 0$, $\alpha > -1$, то

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{\alpha + 1}{p} \frac{\log Cn}{n}, \quad C = C(f), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Точность этого неравенства в случае $\alpha = 0$ была установлена Беллером [4], а в случае произвольного $\alpha > -1$ — Седлецким [5] в следующем смысле: если $p > 0$ и $\varepsilon > 0$, то существует такая функция $f_\varepsilon \in A_\alpha^p$, что для некоторой последовательности номеров $n_k \rightarrow \infty$

$$1 - |z_{n_k}(f_\varepsilon)| \geq \frac{\alpha + 1}{p + \varepsilon} \cdot \frac{\log n_k}{n_k}.$$

Седлецким (см. [5], [6]) было также получено неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1-0} \frac{n(r; f)}{(1/(1-r)) \log(1/(1-r))} \leq \frac{\alpha + 1}{p}$$

и доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f_\varepsilon \in A_\alpha^p$, что для некоторой последовательности $r_k \rightarrow 1-0$

$$\frac{n(r_k; f)}{(1/(1-r_k)) \log(1/(1-r_k))} \geq \frac{\alpha + 1}{p + \varepsilon}.$$

Как видим, уточнение мажоранты $\varphi(r) = \varphi(r; p, \alpha)$ в оценке $n(r; f) \leq \varphi(r)$ для $f \in A_\alpha^p$, полученное Седлецким, позволяет различить последовательности нулей функций из различных пространств A_α^p , но лишь в случае, когда у них различны значения $(\alpha+1)/p$. Возникает вопрос: можно ли обнаружить это различие и в случае совпадения значений $(\alpha+1)/p$, если уточнить вид мажоранты $\varphi(r)$?

В работе доказывается, что если $f \in A_{q,\alpha}^0$ (в частности, если $f \in A_\alpha^q$), то при всех достаточно малых значениях $1-r$ имеет место неравенство

$$n(r; f) < \frac{\alpha + 1}{q} \frac{1}{1-r} \left(\log \frac{\varepsilon_f(r)}{1-r} + \log \log \frac{\varepsilon_f(r)}{1-r} \right),$$

где $\varepsilon_f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1-0$, причем, в этом неравенстве $\varepsilon_f(r)$ нельзя заменить ни на какую стандартную (не зависящую от f) бесконечно малую. Последнее устанавливается посредством построения соответствующего примера функции, принадлежащей пространству $A_{q,\alpha}^\infty$ (и, тем самым, пространству A_α^q).

Аналогичные результаты доказываются для уклонений $1 - |z_n(f)|$ функций $f \in A_{q,\alpha}^p$. В частности, из них следует, что при любом $q > 0$ и любом $\alpha > -1$ существует функция $f \in A_{q,\alpha}^\infty$, для которой

$$1 - |z_{n_k}(f)| \sim \frac{\alpha + 1}{q} \frac{\log n_k}{n_k}, \quad k \rightarrow \infty,$$

для некоторой последовательности $n_k \rightarrow \infty$.

Итак, полученные результаты дают отрицательный ответ на поставленный выше вопрос о возможности различить нулевые множества пространств A_α^p посредством мажоранты $\varphi(r)$ в оценке $n(r; f) \leq \varphi(r) = \varphi(r; p, \alpha)$ в случае, когда $(\alpha + 1)/p = \text{const}$. Тем не менее, одно обнадеживающее замечание, касающееся данного вопроса, можно найти в конце статьи.

Оценки сверху для $n(r; f)$ и уклонений $1 - |z_n(f)|$ устанавливаются в п. 2. В п. 3 строятся примеры, доказывающие точность полученных в п. 2 оценок. Резюмирующие утверждения формулируются в п. 4.

2. Оценки сверху.

ЛЕММА 1. Пусть даны возрастающие последовательности положительных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{r_k\}_{k=1}^\infty$, $r_k \rightarrow 1 - 0$. Определим на $[0, 1)$ функцию $n(r)$, положив

$$n(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq r \leq r_1, \\ n_k & \text{при } r_k < r \leq r_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Положим

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 \leq r < 1.$$

Тогда при каждом $k = 1, 2, \dots$ и любом $r \in (r_k, r_{k+1}]$ имеем

$$\exp N(r) = A_k \left(\frac{r}{r_k} \right)^{n_k},$$

где

$$A_k = \prod_{j=1}^k \left(\frac{r_k}{r_j} \right)^{\nu_j}, \quad \nu_j = n_j - n_{j-1}, \quad n_0 = 0. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя преобразование Абеля, получим при $r \in (r_k, r_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} N(r) &= \int_{r_1}^r \frac{n(t)}{t} dt = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{n_j}{t} dt + \int_{r_k}^r \frac{n_k}{t} dt \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} n_j (\log r_{j+1} - \log r_j) + n_k \log \frac{r}{r_k} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (n_j - n_{j-1}) (\log r_k - \log r_j) + n_k \log \frac{r}{r_k}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$N(r) = \sum_{j=1}^{k-1} \nu_j \log \frac{r_k}{r_j} + n_k \log \frac{r}{r_k},$$

что равносильно утверждению леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > -1$, $\varepsilon > 0$,

$$m(t) = \frac{\alpha+1}{t} \log \left(\frac{\varepsilon}{t} \log \frac{\varepsilon}{t} \right), \quad 0 < t < \varepsilon.$$

Тогда при всех достаточно малых t , $0 < t < t(\alpha, \varepsilon)$, имеем

$$\int_0^t \left(\frac{1-\tau}{1-t} \right)^{m(t)} \tau^\alpha d\tau \geq c(\alpha, \varepsilon) > 0. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что при достаточно малых t

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\frac{1-\tau}{1-t} \right)^{m(t)} \tau^\alpha d\tau \\ & > \left(\frac{1}{1-t} \right)^{m(t)} \int_0^{1/m(t)} (1-\tau)^{m(t)} \tau^\alpha d\tau \\ & > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-t} \right)^{m(t)} \int_0^{1/m(t)} \tau^\alpha d\tau = \frac{1}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{1-t} \right)^{m(t)} \left(\frac{1}{m(t)} \right)^{\alpha+1} \\ & = \frac{1}{3(\alpha+1)} e^{-m(t) \log(1-t)} \left(\frac{t}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\log((\varepsilon/t) \log(\varepsilon/t))} \right)^{\alpha+1} \\ & \sim \frac{1}{3(\alpha+1)} e^{m(t)(t+O(t^2))} \cdot \frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{1}{\log(1/t)} \right)^{\alpha+1} \rightarrow \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{3(\alpha+1)^{\alpha+2}}, \quad t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Легко проверяется следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $t = t(m)$ – функция, обратная к функции

$$m = m(t) \equiv \frac{1}{t} \log \left(\frac{1}{t} \log \frac{1}{t} \right), \quad 0 < t \leq \frac{1}{e}.$$

Тогда

$$t(m) < \frac{\log m}{m}, \quad m > e.$$

(См. также лемму 11.)

ЛЕММА 4. Пусть $q > 0$, $\alpha > -1$, $\gamma = (\alpha+1)/q$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_n(\gamma, \varepsilon)$ – корень уравнения

$$\frac{\gamma}{t} \log \left(\frac{\varepsilon}{t} \log \frac{\varepsilon}{t} \right) = n, \quad t \in (0, \varepsilon). \quad (2.3)$$

Тогда для любой функции $f \in A_{q, \alpha}^0$ при всех достаточно больших n , $n > n(f, \gamma, \varepsilon)$, выполняется неравенство

$$1 - |z_n(f)| < t_n. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $f(0) = 1$. Предположим противное: пусть существуют функция $f \in A_{q,\alpha}^0$ и последовательность $\{n_k\}$, $n_k = n_k(f) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что

$$1 - |z_{n_k}(f)| \geq t_{n_k}. \quad (2.5)$$

В силу леммы 2 при достаточно больших k

$$\int_0^{t_{n_k}} \left(\frac{1-\tau}{1-t_{n_k}} \right)^{m(t_{n_k})} \tau^\alpha d\tau \geq c(\alpha, \varepsilon) > 0, \quad m(t) = \frac{\alpha+1}{t} \log \left(\frac{\varepsilon}{t} \log \frac{\varepsilon}{t} \right).$$

В последовательности $\{n_k\}$ выберем подпоследовательность $n_{k_s} = m_s$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{t_{m_s+1}}^{t_{m_s}} \left(\frac{1-\tau}{1-t_{m_s}} \right)^{m(t_{m_s})} \tau^\alpha d\tau \geq \frac{1}{2} c(\alpha, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \dots, \quad m(t_{m_s}) = qm_s. \quad (2.6)$$

Определим функции $n_1(r)$ и $n_2(r)$, положив

$$\begin{aligned} n_1(r) &= n_k && \text{при } 1 - t_{n_k} < r \leq 1 - t_{n_{k+1}}; \\ n_2(r) &= m_s && \text{при } 1 - t_{m_s} < r \leq 1 - t_{m_{s+1}}. \end{aligned}$$

Для них выполняются неравенства

$$n(r; f) \geq n_1(r) \geq n_2(r). \quad (2.7)$$

Действительно, первое неравенство следует из (2.5), а второе – из того, что $\{m_s\}$ – это подпоследовательность последовательности $\{n_k\}$.

Воспользовавшись неравенством Йенсена и формулой Йенсена, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{q/p} \left(1 - r^2 \right)^\alpha r dr \\ & \geq \int_0^1 \exp \left\{ \frac{q}{p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\} \left(1 - r^2 \right)^\alpha r dr \\ & = \int_0^1 \exp \left\{ qN(r; f) \right\} \left(1 - r^2 \right)^\alpha r dr =: I. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Продолжим цепочку неравенств, используя очевидное неравенство $(1+r)^\alpha r > 1/4$ при $r \in [1/2, 1]$ и $\alpha > -1$, неравенство (2.7), лемму 1, и взяв s_0 таким, что $t_{m_{s_0}} \leq 1/2$:

$$\begin{aligned} I & > \frac{1}{4} \int_0^{1/2} \exp \{ qN(1-t; f) \} t^\alpha dt \geq \frac{1}{4} \int_0^{1/2} \exp \left\{ q \int_0^{1-t} \frac{n_2(\rho)}{\rho} d\rho \right\} t^\alpha dt \\ & \geq \frac{1}{4} \sum_{s=s_0}^{\infty} A_s^q \int_{t_{m_s+1}}^{t_{m_s}} \left(\frac{1-t}{1-t_{m_s}} \right)^{m_s q} t^\alpha dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.8), (2.9), (2.6) и из того, что $A_s \geq 1$ (см. (2.1)), следует расходимость последнего ряда. Итак, $f \notin A_{q,\alpha}^p$. Лемма доказана.

Следствием доказанной леммы являются следующие два утверждения.

ЛЕММА 5. Для любой функции $f \in A_{q,\alpha}^0$ при всех достаточно малых $1-r$ имеем

$$n(r; f) < \frac{\alpha+1}{q} \frac{1}{1-r} \left(\log \frac{\varepsilon_f(r)}{1-r} + \log \log \frac{\varepsilon_f(r)}{1-r} \right), \quad (2.10)$$

где $\varepsilon_f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1-0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксированы $\varepsilon > 0$ и натуральное $n_0 > n(f, \gamma, \varepsilon)$ (см. лемму 4); $r_0 = 1 - t_{n_0}$. Возьмем любое $r \in (r_0, 1)$. Определим номер n , $n > n_0$, при котором $r \in (1 - t_n, 1 - t_{n+1}]$. Поскольку $1 - |z_{n+1}(f)| < t_{n+1}$ (см. (2.4)), то $n(r; f) \leq n$. Положим

$$\mathcal{N}(t) = \frac{\gamma}{t} \log \left(\frac{\varepsilon}{t} \log \frac{\varepsilon}{t} \right).$$

Тогда $n = \mathcal{N}(t_n)$ (см. (2.3)) и с учетом убывания функции $\mathcal{N}(t)$ при $r \in (1 - t_n, 1 - t_{n+1}]$ имеем

$$n(r; f) \leq n < \mathcal{N}(1-r).$$

Итак, неравенство

$$n(r; f) < \mathcal{N}(1-r) = \frac{\alpha+1}{q} \frac{1}{1-r} \log \left(\frac{\varepsilon}{1-r} \log \frac{\varepsilon}{1-r} \right)$$

выполняется при любом $r \in (r_0, 1)$, $r_0 = r_0(\varepsilon)$. В силу произвольности ε отсюда следует (2.10).

ЛЕММА 6. Для любой функции $f \in A_{q,\alpha}^0$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{\alpha+1}{q} \cdot \frac{1}{n} \log(\varepsilon_n(f)n), \quad (2.11)$$

где $\varepsilon_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 для корня t_n уравнения (2.3) имеем оценку

$$t_n < \frac{\gamma}{n} \log \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} n \right), \quad n > n(f, \gamma, \varepsilon), \quad \gamma = \frac{\alpha+1}{q}.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует (2.11).

3. Оценки снизу. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество таких неубывающих непрерывных на $(0, +\infty)$ функций $\varepsilon(t)$, что

- 1) $0 < \varepsilon(t) \leq 1$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$;
- 2) $\varepsilon(t)/t^\beta \uparrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$ для любого $\beta > 0$;
- 3) $\log(1/\varepsilon(t)) = o(\log 1/t)$ при $t \rightarrow 0$.

Договоримся под произведением $a\varepsilon(t)$, где $a > 1$, $\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$, понимать функцию, равную $a\varepsilon(t)$ при $a\varepsilon(t) < 1$ и равную 1 при $a\varepsilon(t) \geq 1$, так что $a\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$ при любом $a > 0$.

ЛЕММА 7. Пусть $\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$, $0 < t < 1$, $\alpha > -1$. Положим

$$m(t) = \frac{\alpha+1}{t} \log \left(\frac{\varepsilon(t)}{t} \log \frac{\varepsilon(t)}{t} \right). \quad (3.1)$$

Тогда при достаточно малых $t > 0$

$$\int_0^t \left(\frac{1-\tau}{1-t} \right)^{m(t)} \tau^\alpha d\tau \leq c(\alpha) \varepsilon(t)^{\alpha+1}, \quad (3.2)$$

где $c(\alpha)$ зависит лишь от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что при $a > 0$ и достаточно больших $m > 0$

$$\int_0^1 (1-t)^m \tau^{a-1} d\tau = \Gamma(a) \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+a+1)} < \Gamma(a) e^a \left(\frac{1}{m} \right)^a,$$

так что при $m = m(t)$, $a = \alpha + 1$ и достаточно малых t выполняется неравенство

$$\int_0^t (1-\tau)^{m(t)} \tau^\alpha d\tau < c_1(\alpha) m(t)^{-(\alpha+1)}.$$

Поэтому при $t \in (0, 1]$, $t \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\frac{1-\tau}{1-t} \right)^{m(t)} \tau^\alpha d\tau \\ & < c_1(\alpha) (1-t)^{-m(t)} \cdot m(t)^{-(\alpha+1)} = c_1(\alpha) \exp\{m(t)t(1+O(t))\} m(t)^{-(\alpha+1)} \\ & = c_1(\alpha) \exp\left\{O(t) \log\left(\frac{\varepsilon(t)}{t} \log \frac{\varepsilon(t)}{t}\right)\right\} \left(\frac{\varepsilon(t)}{t} \log \frac{\varepsilon(t)}{t}\right)^{\alpha+1} m(t)^{-(\alpha+1)} \\ & \sim c(\alpha) \left(\frac{\varepsilon(t)}{t} \log \frac{\varepsilon(t)}{t}\right)^{\alpha+1} m(t)^{-(\alpha+1)} \\ & = c_1(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{\varepsilon(t) \log(\varepsilon(t)/t)}{\log((\varepsilon(t)/t) \log(\varepsilon(t)/t))}\right)^{\alpha+1} \sim c(\alpha) \varepsilon(t)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

(мы учли то, что $\log \varepsilon(t) = o(\log t)$, $t \rightarrow 0$). Лемма доказана.

Если функция $n(t)$, $0 < t \leq 1$, является считающей функцией некоторой последовательности точек z_k круга $|z| < 1$, расположенных по возрастанию их модулей, то назовем ее *считающей функцией*. Если $|z_1| > 0$, то функцию

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad 0 < r \leq 1,$$

назовем *усреднением считающей функции* $n(r)$.

ЛЕММА 8. Для любой функции $\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$, любого $q > 0$ и любого $\alpha > -1$ существует такая считающая функция $n(r)$, что

1) для ее усреднения $N(r)$ выполняется условие

$$\int_0^1 \exp(qN(1-t)) t^\alpha dt < \infty; \quad (3.3)$$

2) $n(r) = n_k$ при $1 - t_k < r \leq 1 - t_{k+1}$, $1/2 > t_1 > \dots > t_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, где

$$n_k = \frac{\alpha+1}{q} \frac{1}{t_k} \log\left(\frac{\varepsilon(t_k)}{t_k} \log \frac{\varepsilon(t_k)}{t_k}\right) \in \mathbb{N}; \quad (3.4)$$

3) выполнена оценка

$$n_k t_{k+1} \leq a = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3.5)$$

4) имеет место сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-n_k t_k) < \infty. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty.$$

Возьмем $t_1 \in (0, 1/2)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\alpha+1}{p} \frac{1}{t_1} \log \left(\frac{\varepsilon(t_1)}{t_1} \log \frac{\varepsilon(t_1)}{t_1} \right) \geq 1.$$

Положим $n_0 = 0$, $A_1 = 1$. Предположим, что определены числа t_k , n_{k-1} , A_k . Положим

$$n_k = \frac{\alpha+1}{q} \frac{1}{t_k} \log \left(\frac{\varepsilon(t_k)}{t_k} \log \frac{\varepsilon(t_k)}{t_k} \right), \quad (3.7)$$

$$Q(t; t_k) = \left(\frac{1-t}{1-t_k} \right)^{qn_k}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.8)$$

$$B_k = A_k \cdot Q(0; t_k)^{1/q}. \quad (3.9)$$

Определим t_{k+1} и одновременно n_{k+1} (см. (3.7)) из условия

$$B_k^q \cdot \int_0^{t_{k+1}} Q(t; t_{k+1}) t^\alpha dt \leq \delta_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.10)$$

Это условие выполняется при любом достаточно малом t_{k+1} в силу леммы 7 (см. неравенство (3.2)). Кроме того, это условие позволяет выбрать t_{k+1} так, чтобы n_{k+1} было натуральным числом, а последовательность $\{n_k\}$ была возрастающей. Положим

$$A_{k+1} = A_k \cdot Q(t_{k+1}; t_k)^{1/q}. \quad (3.11)$$

Из определения $Q(t; t_k)$ (см. (3.8)) следует, что

$$A_{k+1} = \prod_{s=1}^{k+1} \left(\frac{r_{k+1}}{r_s} \right)^{\nu_s},$$

где $\nu_s = n_s - n_{s-1}$, $r_s = 1 - t_s$. Поскольку $A_{k+1} < B_k$ (см. (3.9) и (3.11)), то из неравенства (3.10) следует неравенство

$$A_{k+1}^q \int_0^{t_{k+1}} Q(t; t_{k+1}) t^\alpha dt \leq \delta_{k+1}. \quad (3.12)$$

Определим считающую функцию $n(r)$, положив $n(r) = n_k$ при $r_k < r \leq r_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. В силу леммы 1 при $r \in (r_k, r_{k+1}]$

$$\exp(qN(r)) = A_k^q \left(\frac{r}{r_k} \right)^{qn_k} = A_k^q \cdot Q(t; t_k),$$

где $r = 1 - t$, $t_{k+1} \leq t < t_k$. Отсюда и из (3.12) получим

$$\begin{aligned} \int_{t_{k+1}}^{t_k} \exp(qN(1-t))t^\alpha dt &\leq \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \int_0^1 \exp(qN(1-t))t^\alpha dt &= \int_0^{t_1} \exp(qN(1-t))t^\alpha dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty, \end{aligned}$$

так что (3.3) выполняется.

Поскольку выбор величин t_k , определяющих считающую функцию $n(r)$, производился так, что t_{k+1} по отношению к t_k могло быть сделано как угодно малым без каких-либо ограничений, условия (3.5) и (3.6) также можно считать выполненными. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_k} \right)^{n_k - n_{k-1}} \right), \quad (3.13)$$

где $r_k = 1 - t_k$, $1/2 > t_1 > t_2 > \dots > t_k \rightarrow 0$, $n_0 = 0$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$, $n_k - n_{k-1} \uparrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Тогда если $n_k t_{k+1} \leq a = \text{const}$, $k = 1, 2, \dots$, a

$$\sigma := \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-n_k t_k\} < \infty, \quad (3.14)$$

то для любых $q > 0$ и $\alpha > -1$ существует такая величина $c = c(q, \alpha, \sigma, a)$, зависящая лишь от указанных в скобках параметров, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ и любом $k > m$ выполняется неравенство

$$\int_{1-2t_m}^{1-2t_k} \mathfrak{M}_{\infty}(f; r)^q (1-r^2)^{\alpha} r dr \leq c \int_{1-2t_m}^{1-2t_k} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|^q d\theta \right\} (1-r^2)^{\alpha} r dr. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что произведение (3.13) сходится абсолютно в круге $|z| < 1$ и что его нули – это нули множителей, образующих произведение, и только они. Положим при $r \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} m(r) &= \min\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \\ M(r) &= \mathfrak{M}_{\infty}(f; r) = \max\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$m(r) = |f(r)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{r}{r_k} \right)^{\nu_k} \right|, \quad (3.16)$$

$$M(r) \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{r}{r_k} \right)^{\nu_k} \right). \quad (3.17)$$

Из условий леммы следует, что $t_{k+1}/t_k \leq a/(n_k t_k)$, $n_k t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, так что $t_{k+1} < t_k/8$ при достаточно больших k , $k \geq m$. Покажем, что при $1-r \in [2t_{s+1}, t_s/2]$, $s \geq m$,

$$M(r) \leq c(\sigma, a)m(r), \quad (3.18)$$

где $c(\sigma, a)$ зависит лишь от σ и a . Из (3.16) и (3.17) получим

$$\log \frac{M(r)}{m(r)} \leq \sum_{k=1}^s \log \frac{r^{\nu_k} + r_k^{\nu_k}}{r^{\nu_k} - r_k^{\nu_k}} + \sum_{k=s+1}^{\infty} \log \frac{r_k^{\nu_k} + r^{\nu_k}}{r_k^{\nu_k} - r^{\nu_k}}, \quad (3.19)$$

где $1-r \in [2t_{s+1}, t_s/2]$. Поскольку $\log((1+t)/(1-t)) < 3t$ при $0 < t < 1/2$, а $r_s < 1 - t_s/2 \leq r \leq 1 - 2t_{s+1} < r_{s+1}$, из (3.19) следует, что

$$\frac{1}{3} \log \frac{M(r)}{m(r)} \leq \sum_{k=1}^{s-1} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{\nu_k} + \left(\frac{r_s}{1-t_s/2} \right)^{\nu_s} + \left(\frac{1-2t_{s+1}}{r_{s+1}} \right)^{\nu_{s+1}} + \sum_{k=s+2}^{\infty} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right)^{\nu_k}.$$

Отсюда, учитывая, что $r_k < r_{k+1}$, $\nu_k < \nu_{k+1}$, получим

$$\frac{1}{3} \log \frac{M(r)}{m(r)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{\nu_k} + \max_{s \geq m} \left\{ \left(\frac{r_s}{1-t_s/2} \right)^{\nu_s} + \left(\frac{1-2t_{s+1}}{r_{s+1}} \right)^{\nu_{s+1}} \right\}. \quad (3.20)$$

Заметим теперь, что правая часть последнего неравенства конечна и ограничена сверху величиной, зависящей лишь от σ и a . Действительно, во-первых,

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^{\nu_k} &= r_k^{n_k} \cdot (r_{k+1})^{-n_k} \left(\frac{r_{k+1}}{r_k} \right)^{n_{k-1}} \\ &= \exp\{n_k \log(1-t_k)\} \cdot \exp\{-n_k \log(1-t_{k+1})\} \exp\left\{n_{k-1} \log \frac{1-t_{k+1}}{1-t_k}\right\} \\ &\leq \exp\{-n_k t_k\} \cdot \exp\{-n_k \log(1-t_{k+1})\} \exp\{-n_{k-1} \log(1-t_k)\} \\ &\leq \exp\{-n_k t_k\} \cdot (\exp\{2a\})^2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где последнее неравенство следует (при $t_k < 1/2$) из условия $n_k t_{k+1} \leq a$.

Во-вторых, в силу неравенства $\log((1-2t)/(1-t)) < -t$, $0 < t < 1/2$, и условия $n_s t_{s+1} \leq a$ имеем

$$\left(\frac{r_s}{1-t_s/2} \right)^{\nu_s} = \exp\left\{\nu_s \log \frac{1-t_s}{1-t_s/2}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\nu_s t_s\right\} \leq \exp \frac{a}{2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}n_s t_s\right\}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-2t_{s+1}}{r_{s+1}} \right)^{\nu_{s+1}} &= \exp\left\{\nu_{s+1} \log \frac{1-2t_{s+1}}{1-t_{s+1}}\right\} \\ &\leq \exp\{-\nu_{s+1} t_{s+1}\} \leq \exp a \cdot \exp\{-n_{s+1} t_{s+1}\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Итак, правая часть неравенства (3.20) не превосходит (см. (3.14), (3.21), (3.22) и (3.23)) величины $\sigma(\exp\{2a\})^2 + \exp\{a/2\} + \exp a$, откуда и следует (3.18).

В силу (3.18) при $1-t_s/2 \leq r \leq 1-2t_{s+1}$, $s \geq m$,

$$\mathfrak{M}_{\infty}(f; r)^q \leq c(\sigma, a)^q m(r)^q \leq c(\sigma, a)^q \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}. \quad (3.24)$$

Поскольку функция $\mathfrak{M}_\infty(f; r)$ возрастает на $(0, 1)$, а длина отрезка $[1-2t_s, 1-t_s/2]$ не более, чем в 6 раз превосходит длину отрезка $[1-t_s/2, 1-2t_{s+1}]$ (напомним, что $t_{s+1} < t_s/8$), то при $\alpha \in (-1, 0]$, когда возрастает и множитель $(1-r^2)^\alpha$, имеем

$$\int_{1-2t_s}^{1-t_s/2} \mathfrak{M}_\infty(f; r)^q (1-r^2)^\alpha r dr \leq 6 \int_{1-t_s/2}^{1-2t_{s+1}} \mathfrak{M}_\infty(f; r)^q (1-r^2)^\alpha r dr.$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha > 0$ это неравенство сохранится, если множитель 6 в его правой части заменить на множитель

$$\int_{t_s/2}^{2t_s} t^\alpha (2-t)^\alpha dt \Big/ \int_{2t_{s+1}}^{t_s/2} t^\alpha (2-t)^\alpha dt,$$

который, очевидно, не превосходит величины

$$2^\alpha \int_{t_s/2}^{2t_s} t^\alpha dt \Big/ \int_{t_s/4}^{t_s/2} t^\alpha dt = c(\alpha) \quad (< \infty),$$

зависящей лишь от α . Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{1-2t_s}^{1-2t_{s+1}} \mathfrak{M}_\infty(f; r)^q (1-r^2)^\alpha r dr \\ & \leq (1+c(\alpha)) \int_{1-t_s/2}^{1-t_{s+1}} \mathfrak{M}_\infty(f; r)^q (1-r^2)^\alpha r dr, \quad s \geq m. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Суммируя почленно неравенства (3.25) по s от m до произвольного $k > m$ и учитывая (3.24), получим (3.15). Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Для любой функции $\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$ и любых $q > 0$ и $\alpha > -1$ найдется такая функция $f_\varepsilon \in A_{q,\alpha}^\infty$, что для бесконечной последовательности номеров n_k , $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$,

$$1 - |z_{n_k}(f_\varepsilon)| = t_{n_k}, \quad (3.26)$$

где t_n – корень уравнения

$$\frac{\alpha+1}{q} \frac{1}{t} \log \left(\frac{\varepsilon(t)}{t} \log \frac{\varepsilon(t)}{t} \right) = n. \quad (3.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 8 и по функции $\varepsilon(t)$ найдем считающую функцию $n(r) = n_k$ при $r \in (r_k, r_{k+1}]$, $r_k = 1 - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, для которой выполняются условия (3.3) и (3.4).

Формулой (3.13) определим функцию $f_\varepsilon(z) = f(z)$. Считающая функция $n(r; f_\varepsilon)$ ее нулей совпадает с функцией $n(r)$, так что имеет место равенство (3.26) и выполняются все условия, при которых применима лемма 9. Из неравенства (3.15), формулы Йенсена и из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{1-2t_m}^1 \mathfrak{M}_\infty(f_\varepsilon; r)^q (1-r^2)^\alpha r dr & \leq c \int_{1-2t_m}^1 \exp(qN(r; f_\varepsilon)) dr \\ & \leq c \int_0^1 \exp(qN(r; f_\varepsilon)) dr < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому $f_\varepsilon \in A_{q,\alpha}^\infty$. Лемма доказана.

Асимптотику решений t_n уравнения (3.27) выявляет следующая

ЛЕММА 11. Пусть

$$m(t) = \frac{1}{t} \log \left(\frac{1}{t} \log \frac{1}{t} \right), \quad 0 < t \leq \frac{1}{e},$$

а $t = t(m)$, $m \geq e$, — функция, обратная к функции $m = m(t)$. Пусть $\theta \in \mathbb{R}$.

Положим

$$\tau(m; \theta) = \frac{1}{m} \left(\log m - \mu - \frac{\theta}{2} \mu^2 \right),$$

где $\mu = \log \log m / \log m$.

Тогда при любом $\theta < 1$ и всех достаточно больших m выполняются неравенства

$$\tau(m; 1) < t(m) < \tau(m; \theta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta, m) = \mu + \frac{\theta}{2} \mu^2, \quad \mu = \mu(M).$$

Тогда $\tau(m; \theta) = (\log m - \lambda(\theta)) / m =: \tau(\theta)$.

Достаточно показать, что $m(\tau(\theta)) < m$, если $\theta < 1$, а m достаточно велико ($m > m_0$), и что $m(\tau(\theta)) > m$, если $\theta \geq 1$. Эти условия представим в виде

$$\log \left(\frac{1}{\tau(\theta)} \log \frac{1}{\tau(\theta)} \right) < \log m - \lambda(\theta), \quad \theta < 1, \quad (3.28)$$

$$\log \left(\frac{1}{\tau(\theta)} \log \frac{1}{\tau(\theta)} \right) > \log m - \lambda(\theta), \quad \theta \geq 1. \quad (3.29)$$

Преобразуем левую часть этих неравенств:

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{\tau(\theta)} \log \frac{1}{\tau(\theta)} \right) &= \log m - \log(\log m - \lambda(\theta)) + \log(\log m - \log(\log m - \lambda(\theta))) \\ &= \log m - \log \log m - \log \left(1 - \frac{\lambda(\theta)}{\log m} \right) \\ &\quad + \log \log m + \log \left(1 - \frac{\log(\log m - \lambda(\theta))}{\log m} \right) \\ &= \log m + \frac{\log \log m}{\log^2 m} - \frac{\log \log m}{\log m} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\log \log m}{\log m} \right)^2 + o \left(\frac{1}{\log^2 m} \right), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с правой частью

$$\log m - \lambda(\theta) = \log m - \frac{\log \log m}{\log m} - \frac{\theta}{2} \left(\frac{\log \log m}{\log m} \right)^2$$

неравенств (3.28) и (3.29), получаем заключение леммы.

4. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f \in A_{q,\alpha}^0$, $q > 0$, $\alpha > -1$, при всех достаточно малых значениях $1 - r$ выполняется неравенство

$$n(r; f) < \frac{\alpha + 1}{q} \frac{1}{1 - r} \left(\log \frac{\varepsilon_f(r)}{1 - r} + \log \log \frac{\varepsilon_f(r)}{1 - r} \right),$$

где $\varepsilon_f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1 - 0$.

При этом для любой функции $\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$ существует функция $f_\varepsilon \in A_{q,\alpha}^\infty$ такая, что для некоторой подпоследовательности $r_k \rightarrow 1 - 0$ имеем

$$n(r_k; f_\varepsilon) > \frac{\alpha + 1}{q} \frac{1}{1 - r_k} \left(\log \frac{\varepsilon(1 - r_k)}{1 - r_k} + \log \log \frac{\varepsilon(1 - r_k)}{1 - r_k} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы 1 установлена (см. лемму 5). Для доказательства второй части теоремы воспользуемся леммой 10 и по функции $\varepsilon(t)$ найдем функцию $f_\varepsilon \in A_{q,\alpha}^\infty$, для которой

$$1 - |z_{n_k}(f_\varepsilon)| = \tau_{n_k} \equiv 1 - \rho_k,$$

где τ_n – корень уравнения

$$L(\tau) = \frac{\alpha + 1}{q} \cdot \frac{1}{\tau} \log \left(\frac{\sqrt{\varepsilon(\tau)}}{\tau} \log \frac{\sqrt{\varepsilon(\tau)}}{\tau} \right) = n.$$

Очевидно, что

$$n(\rho_k + 0; f_\varepsilon) = n_k = L(\tau_{n_k}) = L(1 - \rho_k) > \tilde{L}(1 - \rho_k),$$

где

$$\tilde{L}(\tau) = \frac{\alpha + 1}{q} \cdot \frac{1}{\tau} \log \left(\frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} \log \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} \right).$$

Выберем $r_k > \rho_k$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$n(\rho_k + 0; f_\varepsilon) = n(r_k; f_\varepsilon) > \tilde{L}(1 - r_k) > \tilde{L}(1 - \rho_k).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $f \in A_{q,\alpha}^0$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$1 - |z_k(f)| \leq \frac{\alpha + 1}{q} \frac{1}{n} \log(\varepsilon_n(f) n),$$

где $\varepsilon_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

При этом для любой функции $\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$ существует функция $f_\varepsilon \in A_{q,\alpha}^\infty$ такая, что для бесконечной последовательности номеров n_k имеем

$$1 - |z_{n_k}(f)| > \frac{\alpha + 1}{q} \frac{1}{n_k} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{n_k} \right) n_k \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы установлена (см. лемму 6). Для доказательства второй части теоремы 2 определим функцию $\tilde{\varepsilon}(t) \in \mathcal{E}$, положив

$$\tilde{\varepsilon}(t) = 2\varepsilon_1(t), \quad \text{где} \quad \varepsilon_1(t) = \frac{\varepsilon(\varkappa t)}{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{q}{\alpha + 1}.$$

Воспользуемся леммой 10 и по функции $\tilde{\varepsilon}$ найдем функцию $f_\varepsilon \in A_{q,\alpha}^\infty$ такую, что для некоторой подпоследовательности номеров $n = n_k$ выполняется равенство $1 - |z_n(f_\varepsilon)| = t_n$, где t_n – корень уравнения

$$m(t) := \frac{1}{t} \log \left(\frac{\tilde{\varepsilon}(t)}{t} \log \frac{\tilde{\varepsilon}(t)}{t} \right) = \varkappa n =: m.$$

По лемме 11

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{m} (\log(\tilde{\varepsilon}(t_n)m) + o(1)) = \frac{1}{\varkappa n} (\log(2\varepsilon_1(t_n)m) + o(1)) \\ &> \frac{1}{\varkappa n} \log \left(\log \left(\varepsilon_1 \left(\frac{1}{m} \right) m \right) \right) = \frac{1}{\varkappa n} \log \left(\varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) n \right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть $Z(f)$ – последовательность нулей функции $f \in A$ с учетом кратности; через $Z(H)$ обозначим нулевое множество класса $H \subset A$: $Z(H) = \{Z(f) : f \in H\}$. Из теоремы 2 (так же, как и из теоремы 1) получим

СЛЕДСТВИЕ 1. *Выполнено $Z(A_{q_1,\alpha_1}^\infty) \neq Z(A_{q_2,\alpha_2}^\infty)$, если*

$$\frac{\alpha_1 + 1}{q_1} \neq \frac{\alpha_2 + 1}{q_2}. \quad (4.1)$$

Тем самым, при условии (4.1) и любых $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$, конечных или бесконечных, имеем

$$Z(A_{q_1,\alpha_1}^{p_1}) \neq Z(A_{q_2,\alpha_2}^{p_2}).$$

То, что $Z(A_{q_1}^{q_1}) \neq Z(A_{q_2}^{q_2})$ при условии (4.1), было установлено Горовицем на пути оценок произведений

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{z_k(f)}$$

Позднее Седлецкий [5] установил этот факт, оценивая считающие функции $n(f; r)$.

Роль различных параметров в теоремах 1 и 2 становится яснее, если вместо параметра α ввести параметр $\gamma = (\alpha + 1)/q$.

Пусть $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $\gamma > 0$. Положим

$$H_{q,\gamma}^p = A_{q,\gamma q-1}^p,$$

т.е. $f \in H_{q,\gamma}^p$, если

$$\left(\int_0^1 \mathfrak{M}_p(f; r)^q (1 - r^2)^{\gamma q - 1} r \, dr \right)^{1/q} < \infty.$$

Нетрудно проверить, что

$$H_{q_1, \gamma}^p \subset H_{q_2, \gamma}^p, \quad 0 < q_1 < q_2 < \infty.$$

Естественно через $H_{\infty, \gamma}^p$ обозначить множество функций $f \in A$ таких, что

$$\mathfrak{M}_p(f; r) = O((1-r)^{-\gamma}), \quad r \rightarrow +0,$$

и положить $H_{\infty, 0}^p = H^p$, где H^p – классическое пространство Харди.

При фиксированных γ и p пространства $H_{q, \gamma}^p$, $q \in (0, +\infty]$, состоят из функций, рост которых зависит от параметра q несущественно. При этом значения параметра q не участвуют в полученных выше оценках, если их перефразировать для пространств $H_{q, \gamma}^p$. Так, теорему 2 можно сформулировать теперь следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Если при некотором (сколь угодно малом) $p > 0$ и некотором (сколь угодно большом) $q > 0$ функция f принадлежит $H_{q, \gamma}^p$, то при достаточно больших n*

$$1 - |z_n(f)| \leq \frac{\gamma}{n} \log(\varepsilon_n(f)n),$$

где $\varepsilon_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При этом для любой функции $\varepsilon(t) \in \mathcal{E}$ и любого (сколь угодно малого) $q > 0$ найдется функция f_ε , принадлежащая $H_{q, \gamma}^\infty$, и такая, что для бесконечной последовательности номеров n_k выполняется неравенство

$$1 - |z_{n_k}(f_\varepsilon)| > \frac{\gamma}{n_k} \log\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k\right).$$

Введем еще одно обозначение. Пусть $f \in A$,

$$L(f; r) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta\right\}, \quad 0 < r < 1,$$

и пусть $H_\gamma^{\log}$, $\gamma > 0$, – это множество функций f , для которых

$$L(f; r) = O((1-r)^{-\gamma}), \quad r \rightarrow 1-0.$$

Очевидно, что при любых значениях параметров q и p имеет место вложение

$$H_{q, \gamma}^p \subset H_\gamma^{\log}, \quad \gamma > 0.$$

Если $f \in H_\gamma^{\log}$, то из формулы Йенсена следует, что

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} L\left(f; 1 - \frac{1}{n}\right) \leq c_1 n^\gamma, \quad n \geq 2,$$

откуда

$$1 - |z_n(f)| \leq \gamma \frac{\log n}{n} + \frac{c_2}{n}.$$

Это неравенство дает повод для следующего определения. Функцию $f \in H_\gamma^{\log}$, $\gamma > 0$, назовем γ -экстремалью, если для некоторой последовательности номеров n_k

$$1 - |z_{n_k}(f)| \sim \frac{\gamma}{n_k} \log n_k, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Таким образом, выше установлено существование γ -экстремалей в пространствах $H_{q,\gamma}^p$ при любых $p \in (0, \infty]$ и $q > 0$. Возможность различать между собой γ -экстремали в пространствах $H_{q,\gamma}^p$ при $q_1 \neq q_2$ связана, видимо, с теми или иными условиями на последовательности $\{n_k\}$, для которых выполняется (4.2). С этим связана тогда и возможность различать множества $Z(H_{q_1,\gamma}^p)$ и $Z(H_{q_2,\gamma}^p)$, $q_1 \neq q_2$.

Что касается зависимости нулевых множеств $Z(H_{q,\gamma}^p)$ пространств $H_{q,\gamma}^p$ от параметра p , то выскажем предположение, что $Z(H_{q,\gamma}^p) = Z(H_{q,\gamma}^\infty)$ при любом $p > 0$, в частности, что $Z(A_\alpha^p) = Z(A_{p,\alpha}^\infty)$, $\alpha > -1$.

Работа выполнена под руководством Е. А. Севастьянова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Шведенко, “Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **23**, ВИНТИ, М., 1985, 3–124.
- [2] H. S. Shapiro, A. L. Shields, “On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces”, *Math. Z.*, **80** (1962), 217–229.
- [3] C. Horowitz, “Zeros of functions in the Bergman spaces”, *Duke Math. J.*, **41**:4 (1974), 693–710.
- [4] E. Beller, “Zeros of A^p functions and related classes of analytic functions”, *Israel J. Math.*, **22**:1 (1975), 68–80.
- [5] А. М. Седлецкий, “О нулях аналитических функций классов A_α^p ”, *Актуальные вопросы теории функций*, РГУ, Ростов-на-Дону, 1987, 24–29.
- [6] А. М. Седлецкий, “Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, II”, *СМФН*, **6**, МАИ, М., 2003, 3–162.

А. А. Долгобородов

Московский инженерно-физический институт

(Национальный исследовательский ядерный университет)

E-mail: kzander@mail.ru

Поступило

02.07.2009