Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Ильичев, Принцип наследования в динамических системах, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 860–874

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:15:58

Принцип наследования в динамических системах

В. Г. Ильичев

Предложен “принцип наследования” локальных свойств глобальным сдвиг-отображением, который опирается на понятия грубости и полугруппы. При анализе общих моделей конкуренции определены ключевые наследуемые свойства (знак-инвариантные структуры и др.). Данный подход был использован для доказательства глобальной устойчивости периодических режимов в ряде нелинейных, неавтономных моделей экологии.

Библиография: 8 названий.

Введение. Исследование систем дифференциальных уравнений с периодической правой частью сводится, как правило, к анализу сдвиг-отображения за период. Данный анализ подразумевает под собой решение нелокальной и трудной задачи (даже в линейном случае). Здесь представляется перспективной разработка качественных методов, реализующих переход от локальных свойств к глобальным.

Простейший вариант этой идеи – это поиск условий, когда происходит сохранение (наследование) некоторых свойств. В данной работе приведен один из таких подходов. Так, рассмотрим произвольную неавтономную динамическую систему с гладкой T -периодической правой частью

$$\dot{X} = F(X, t), \quad (0.1)$$

где X – вектор с компонентами $x_1, \dots, x_n$, $F_1, \dots, F_n$ – компоненты отображения F ; $F_i(X, t) = F_i(X, t + T)$ для всех X , t и $i = 1, \dots, n$. Предполагаем, что решение (0.1) существует и продолжается вперед неограниченно. Здесь ключевую роль играют свойства сдвиг-отображения по его траекториям на временном интервале $[t, t + h]$, которое обозначим $X^{t+h} = Q(X^t, t, h)$, где $h > 0$.

Особо выделим сдвиг-отображение за период (отображение Пуанкаре) $X^T = P(X^0)$. Если $(P_1, \dots, P_n)$ – компоненты отображения P , то дифференциал P – это $(n \times n)$ -матрица $DP = (\partial P_i(X)/\partial x_j)$. Свойства матрицы DP во многом определяют поведение системы (0.1).

Формализуем понятие *свойства*. Пусть ρ – гладкая функция, определенная на $(n \times n)$ -матрицах. Например, $\rho[DP]$ – определитель матрицы DP . Будем говорить: матрица $DP(X)$ обладает *свойством* ρ , если в каждой точке X выполняется неравенство

$$\rho[DP(X)] > 0.$$

Поиск таких глобальных свойств оказывается трудной задачей.

Гораздо легче находятся свойства дифференциала эйлеровой аппроксимации локальных отображений

$$X^{t+h} = L(X^t, t, h) = X^t + hF(X^t, t),$$

где h положительно и мало. Обозначим через E единичную матрицу и $DF(X, t)$ – дифференциал F в точке (X, t) . Тогда для матрицы

$$DL(X, t, h) = E + hDF(X, t)$$

свойство ρ в точке (X, t, h) определяется неравенством

$$\rho[DL(X, t, h)] > 0. \quad (0.2)$$

Ниже будут приведены свойства матрицы DL , которые наследуются матрицей DP . Часть этих свойств была опубликована ранее [1], а некоторые являются новыми. В качестве примера их использования будет исследована глобальная динамика ряда неавтономных, нелинейных моделей в экологии.

1. Принцип наследования. При решении поставленной выше задачи важную роль играет отображение $\pi(X, t, h)$ – малое сдвиг-отображение за время $[t, t + h]$ по траекториям (0.1) с началом в точке X . Данное отображение занимает промежуточное положение между отображениями P и L . Очевидно, L и π действуют в одном и том же расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Далее, весьма полезной оказывается (цит. по [2])

ЛЕММА АДАМАРА. Пусть $u(h)$ – гладкая функция с $u(0) = 0$. Тогда имеет место соотношение $u(h) = hw(h)$, где w – некоторая гладкая функция.

Так, для произвольной гладкой функции $u(h)$ последовательно получаем адамаровские представления

- 1) $u(h) = u(0) + hw_1(h)$, где w_1 – гладкая функция;
- 2) $u(h) = u(0) + hu'(0) + h^2w_2(h)$, где w_2 – гладкая функция.

В частности, для любого h справедливо матричное представление Адамара

$$\pi(X, t, h) = L(X, t, h) + h^2M(X, t, h),$$

где $M(X, t, h)$ – некоторое гладкое отображение.

Приведем основные понятия, используемые ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А. Назовем свойство ρ *полугрупповым*, если из условий $\rho(A) > 0$ и $\rho(B) > 0$ следует неравенство $\rho(AB) > 0$. Например, $\rho(C)$ – определитель матрицы C . По сути, полугрупповые свойства – “мотор” данной схемы наследования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ В. *Локальная универсальность* ρ на DL означает, что в каждой точке (X, t) неравенство (0.2) выполняется при всех достаточно малых h из некоторого интервала $(0, \delta)$. Разумеется, δ может зависеть от конкретной точки (X, t) .

Пусть K – кусок произвольной траектории длины T с началом в (X_0, t_0) и концом в $(X_T, t_0 + T)$. Приведем полезное понятие равномерной локальной универсальности ρ на DL : ρ *равномерно локально универсально*, если для любого K найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $h \in (0, \delta)$ и всех $(X, t) \in K$ выполняется неравенство (0.2).

Аналогично, задаются локальная и равномерная локальная универсальность ρ на отображении $D\pi$.

Любопытно было бы узнать: вытекает ли из локальной универсальности равномерная локальная универсальность, когда переменные (X, t) пробегает компакт K ?

Для дискретных динамических систем

$$X^{t+1} = F(X^t, t)$$

с T -периодической правой частью ситуация с принципом наследования значительно упрощается. Так, будем называть свойство ρ на DF *локально универсальным*, если для всех точек (X, t) выполняется неравенство $\rho[DF(X, t)] > 0$. Здесь имеет место простая [3]

ТЕОРЕМА. Пусть свойство ρ является полугрупповым и локально универсальным, тогда отображение DP наследует ρ .

Было бы естественно предположить, что и для непрерывных динамических систем имеет место аналогичное утверждение. Пока это интересная и актуальная задача является открытой. Ниже будет несколько усилено условие локальной универсальности (см. ниже условие грубости), при котором соответствующий принцип переноса выполняется и для непрерывных систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ С (грубость). Пусть (X, t) – произвольная точка. Согласно лемме Адамара имеет место соотношение

$$\rho[E + hDF(X, t)] = a + hb(X, t) + h^2c(X, t, h), \quad (1.1)$$

где $a = \rho(E)$ – константа, а $b(X, t)$, $c(X, t, h)$ – некоторые гладкие функции. Будем говорить, что ρ – *грубое свойство*, если выполняется хотя бы одно из двух условий:

Г1) $a > 0$; или

Г2) при $a = 0$ имеет место $b(X, t) > 0$ для всех (X, t) .

Разумеется, при выполнении условия грубости автоматически реализуется и локальная универсальность. Имеет место вспомогательная

ЛЕММА 1. Пусть ρ – грубое свойство, тогда оно равномерно локально универсально для DL и для $D\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан компакт K – кусок траектории системы (0.1) длины T в фазовом пространстве (X, t) , β – минимум функции $b(X, t)$ на K . В пространстве (X, t, h) построим расширение $\tilde{K} = K \times [0, 1]$, γ – минимум функции $c(X, t, h)$ на $\tilde{K}$. Очевидно, при всех $0 < h \leq 1$ имеет место неравенство

$$\varphi(h) > \mu(h) = a + h\beta + h^2\gamma,$$

где $\varphi(h) = \rho[DL(X, t, h)]$.

В представлении (1.1) могут реализоваться следующие два случая:

- 1) если $a > 0$, то при достаточно малом δ и для всех $h \in (0, \delta)$ имеет место $h(\beta + h\gamma) > -a/2$, поэтому $\mu(h) > 0$ и, далее, $\varphi(h) > 0$;
- 2) если $a = 0$, то $\beta > 0$. Значит, при достаточно малом $\tilde{\delta} > 0$ и $h \in (0, \tilde{\delta})$ имеет место $\beta + h\gamma > 0$, поэтому $\mu(h) > 0$ и, следовательно, $\varphi(h) > 0$.

Для обоснования равномерной локальной универсальности ρ на $D\pi$ воспользуемся соотношением

$$\rho(D\pi) = \rho[DL(X, t, h) + h^2 M(X, t, h)] = a + hb(X, t) + h^2 d(X, t, h),$$

где $d(X, t, h)$ – некоторая гладкая функция. Теперь, действуя в том же духе, что и ранее, устанавливаем требуемое.

Справедливо основное

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть свойство ρ является грубым и полугрупповым на DL , тогда отображение DP наследует ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – произвольный кусок траектории системы (0.1) длины T . Согласно лемме 1 из локальной универсальности и грубости следует равномерная локальная универсальность $D\pi$. Значит, при достаточно малом $h > 0$ имеет место

$$\rho[D\pi(X, t, h)] > 0 \quad (1.2)$$

для всех (X, t) из K . Разобьем временной отрезок $[t_0, t_0 + T]$ на n равных частей с условием $T/n < h$. Положим $t_i = t_0 + iT/n$ и $X_i = X(t_i)$ при $i = 0, \dots, n-1$. Отображение Пуанкаре $P = P(X_0)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ является композицией n штук локальных отображений $\pi_i = \pi(X_i, t_i, t_i + T/n)$. Поэтому имеет место матричное соотношение $DP = D\pi_0 \times \dots \times D\pi_{n-1}$. Из (1.2) следует $\rho(D\pi_i) > 0$ для всех i , и с учетом полугруппового свойства ρ окончательно устанавливаем $\rho(DP) > 0$.

В качестве примера приложения признака наследования проведем глобальный анализ уравнения, описывающего динамику популяции (x – ее биомасса),

$$\dot{x} = xf(x, t), \quad (1.3)$$

где к прежним требованиям (см. (0.1)) добавляем условие: скорость роста $f(x, t)$ – строго убывает по переменной x . Имеют место следующие свойства.

Свойство монотонности. Определим следующую функцию: $\rho(\Delta) \equiv \Delta$. Свойство $\rho(\Delta) > 0$ утверждает, что Δ – положительное число. Данное свойство грубое (см. Г1), поскольку для всех (x, t) справедливо неравенство

$$\rho\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 1 + h \frac{\partial [xf(x, \beta(t))]}{\partial x} > 0$$

при малых h . Так как положительные числа образуют полугруппу по умножению, то ρ – полугрупповое свойство. Следовательно, имеет место $dP/dx > 0$. Значит, P монотонно возрастает.

Свойство сжимаемости. Сделаем замену $y = \ln(x)$, тогда данное уравнение приобретает вид

$$\frac{dy}{dt} = f(\exp(y), \beta(t)). \quad (1.4)$$

Определим функцию $\rho(\Delta) \equiv \Delta(1 - \Delta)$. Соответствующее свойство $\rho(\Delta) > 0$ эквивалентно $\Delta \in (0, 1)$. Положим

$$\Delta = \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + hf'_x(\exp(y), \beta(t)) \exp(y),$$

тогда при обозначении $B = f'_x(\exp(y), \beta(t)) \exp(y)$ получаем

$$\rho = hB[1 + hB].$$

С учетом $B < 0$ убеждаемся в грубости данного свойства (см. условие Γ_2).

Далее, числа из интервала $(0, 1)$ образуют полугруппу по умножению, поэтому имеет место наследование данного свойства. Итак, $0 < \partial P / \partial y < 1$ и, значит, данное отображение является сжимающим. Следовательно, в уравнении (1.3) может существовать лишь одно положительное T -периодическое решение, которое глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+$.

2. Наследование знаковых структур дифференциала. Различные приемы позволяют расширить класс наследуемых свойств. Так, имеет место [1]

ЛЕММА 2. Пусть все свойства ρ_i грубые. Если $\rho = \min(\rho_1, \dots, \rho_n)$ – полугрупповое свойство, тогда DP наследует ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 каждое свойство ρ_i является равномерно локально универсальным. Пусть задана некоторая траектория “длины T ”. Тогда для всех ее точек (X, t) существует такое δ_i , что выполняется неравенство

$$\rho_i[DL(X, t, h)] > 0$$

для каждого $h \in (0, \delta_i)$. Если выбрать $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, то, очевидно, при всех $h \in (0, \delta)$ будет справедливо неравенство

$$\rho[DL(X, t, h)] > 0.$$

Теперь из утверждения 1 следует требуемое.

Такого сорта кусочно-гладкие свойства возникают при описании характера монотонности компонент отображения Пуанкаре. Например, для $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ возникают 16 типичных вариантов знаковой структуры матрицы

$$DP = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Всякая знаковая структура DP может быть задана с помощью операции $\min$. В частности, система неравенств

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_2} < 0, \quad \frac{\partial P_2}{\partial x_1} < 0, \quad \frac{\partial P_2}{\partial x_2} > 0$$

эквивалентна одному неравенству

$$\min\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial P_1}{\partial x_2}, -\frac{\partial P_2}{\partial x_1}, \frac{\partial P_2}{\partial x_2}\right) > 0.$$

Поставим теперь специальный вопрос о “наследовании”. Пусть все DL представляются одной и той же знаковой матрицей Σ для всех X и t . Когда DP задается

той же матрицей Σ ? Такие знаковые таблицы будем называть *знак-инвариантными структурами*.

Изложим решение, основанное на геометрических представлениях. Так, построим изображение матриц $A = (a_{ij})$ в виде ориентированных графов. Согласно [4] граф выглядит следующим образом: если $a_{ij} \neq 0$, то из вершины j “выходит” ребро в вершину i . Величина a_{ij} называется *весом* этого ребра. При $a_{ij} > 0$ ребро считается положительным, и отрицательным при $a_{ij} < 0$. Естественнo считать $\text{sign}(a_{ij})$ знаком ребра $j \rightarrow i$.

Если по цепочке ребер можно пройти от одной вершины до другой, то возникает путь, соединяющей данные точки. Вес пути равен произведению всех весов ребер, а знак пути равен произведению знаков всех ребер.

Граф называется *двухпартийным*, если все его вершины можно разбить на два непересекающихся множества (партии) M_1 и M_2 . При этом каждые две вершины из одной партии M_i “дружат” между собой (их ребра положительны), а каждые две вершины из разных партий “враждуют” (их ребра отрицательны). Справедливо [5]

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Знак-инвариантной структуре соответствует двухпартийный граф.*

Пусть первые k вершин составляют первую партию, а остальные – вторую. Для удобства вместо знаков $+$ и $-$ будем писать $+1$ и -1 соответственно. Оказывается, все такие матрицы допускают простое описание. Формально, они задаются квадратной (размера $n \times n$) таблицей $\Sigma(c_1, \dots, c_n) = (\sigma_{ij})$, элементы которой равны $\sigma_{ij} = c_i c_j$. Здесь каждый параметр c_i может принимать одно из двух значений ± 1 . Например, при $n = 2$ существуют только две разные знак-инвариантные структуры

$$\Sigma(1, 1) = \Sigma(-1, -1) = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Sigma(1, -1) = \Sigma(-1, 1) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

В общем случае знаковая структура соответствующей матрицы имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{kk} & -I_{km} \\ -I_{mk} & I_{mm} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $m = n - k$; I_{pq} – блок из q столбцов и p строк, состоящий только из 1. При изменении порядка нумерации вершин данная матрица преобразуется в одну из структур $\Sigma(c_1, \dots, c_n)$.

Из представления (2.1) следует, что матрицы с фиксированной знак-инвариантной структурой $\Sigma = \Sigma(c_1, \dots, c_n)$ образуют полугруппу по умножению.

Из леммы 2 сразу получаем еще один достаточный принцип наследования

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если все локальные матрицы DL принадлежат знак-инвариантной структуре Σ , то и глобальная матрица DP принадлежит Σ .*

Одним из популярных способов построения мультипликативной полугруппы $n \times n$ матриц является следующий. Пусть W – непустая область внутри $\mathbb{R}^n$. Тогда семейство матриц, преобразующих W в себя, является полугруппой. Про такие полугруппы будем говорить, что они допускают геометрическое представление. Так, семейство матриц одной и той же знак-инвариантной структуры оставляют на месте

некоторый ортант. А для семейства марковских матриц инвариантным оказывается тетраэдр. Всякая ли полугруппа допускает геометрическое представление? Нет, поскольку полугруппа вырожденных матриц не допускает геометрического представления [3].

Далее, пусть дифференциал отображения P описывается знак-инвариантной структурой $\Sigma(c_1, \dots, c_n)$. Тогда для точек $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ введем отношение *полупорядка* $A \ll B$, которое имеет место при условии

$$a_i c_i \leq b_i c_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Такой полупорядок порождается некоторым конусом [6]. В частности, “с точки зрения $\Sigma(1, -1)$ ” отношение $A \ll B$ эквивалентно принадлежности вектора $B - A$ четвертому квадранту плоскости. Непосредственно устанавливается утверждение

$$\text{если } A \ll B, \quad \text{то и } P(A) \ll P(B).$$

Пусть $A \ll B$. Рассмотрим конусный отрезок

$$\Pi(A, B) = \{X \mid A \ll X \ll B\}.$$

В двумерном случае множество $\Pi(A, B)$ является прямоугольником, в котором самая “слабая” вершина A находится на северо-западе, а самая “сильная” вершина B лежит на юго-востоке. Из монотонности P сразу вытекает следующее: *под действием P образ конусного отрезка $\Pi(A, B)$ вложен в конусный отрезок $\Pi(P(A), P(B))$.*

3. Приложение к неавтономной динамике экологических сообществ.

Развитые выше геометрические представления применимы к анализу биологических моделей с периодическими коэффициентами.

ПРИМЕР 1. При наступлении в среде низких температур (θ) особи некоторых популяций (водоросли, медведи и др.) переходят из *активного* состояния в *пассивное* (спору, спячку и др.), в котором они не питаются, не размножаются, но и не умирают [7]. Когда же температура среды вновь повышается до некоторого (критического) уровня, происходит возврат особей в активное состояние. Интервал благоприятных температур обозначим через I . Далее, введем две ступенчатые “переходные” функции из одного состояния в другое: $p(\theta)$ (активное $\rightarrow$ пассивное) и $q(\theta)$ (пассивное $\rightarrow$ активное). Положим здесь:

$$\begin{aligned} p &= 0 & \text{при } \theta \in I & \quad \text{и} \quad p = N & \text{при других } \theta; \\ q &= N & \text{при } \theta \in I & \quad \text{и} \quad q = 0 & \text{при других } \theta, \end{aligned}$$

где константа $N > 0$ – скорость обмена “активное $\leftrightarrow$ пассивное” состояния. Обычно N достаточно велико. Ниже удобно считать, что приведенные разрывные зависимости заменены подходящими (“корытообразными”) гладкими функциями. Это обстоятельство гарантирует гладкость сдвиг-отображения в моделях.

Теперь к прежней модели (1.3) естественно добавить следующую линейную надстройку:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x f(x, \theta) - p(\theta)x + q(\theta)s, \\ \dot{s} &= p(\theta)x - q(\theta)s, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где θ является T -периодической функцией времени. Решения системы (3.1) растут не быстрее экспоненты, поэтому они продолжаются вперед неограниченно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть в системе (3.1) существует положительное, T -периодическое решение, тогда оно глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+^2$.

Отсюда, в частности, следует единственность положительного T -периодического режима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (3.1) индуцирует гладкое отображение Пуанкаре

$$P: (x_0, s_0) \rightarrow (x_T, s_T).$$

Обозначим через $C^* = (x^*, s^*)$ начало и конец положительного T -периодического решения (3.2). Очевидно, $P(C^*) = C^*$.

Положим

$$x_T = A(x_0, s_0) \quad \text{и} \quad s_T = B(x_0, s_0).$$

Покажем, что эти функции строго возрастают по каждой переменной, т.е. матрица

$$DP = \begin{pmatrix} A'_x & A'_s \\ B'_x & B'_s \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

состоит из положительных элементов для всех $(x_0, s_0) \in \mathbb{R}_+^2$. Для этого построим линейное локальное отображение (L), порожденное системой (3.1):

$$\begin{aligned} x_{t+h} &= x_t + h[F(x_t, \theta) - px_t + qs_t], \\ s_{t+h} &= s_t + h[px_t - qs_t], \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $F(x, \theta) = xf(x, \theta)$. Дифференциал отображения (3.3) имеет вид

$$DL = \begin{pmatrix} 1 + h[F'_x(x, \theta) - p] & hq \\ hp & 1 - hq \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Выполняется следующее свойство (локальной универсальности): при достаточно малом $h > 0$ знаковая структура матрицы DL имеет вид

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}.$$

Согласно принципу наследования грубые свойства матрицы DL “передаются” матрице DP , если семейство всех матриц $\{DL\}$ образует полугруппу по умножению. Здесь эти требования выполняются, поэтому матрица (3.2) оказывается положительной.

Теперь на точках $C_1 = (x_1, s_1)$ и $C_2 = (x_2, s_2)$ определим отношение *полуупорядка*. А именно, положим

$$C_1 \prec C_2, \quad \text{если} \quad x_1 < x_2 \quad \text{и} \quad s_1 < s_2.$$

Так как матрица DP положительна, то отображение P сохраняет данное отношение полуупорядка. Формально, из $C_1 \prec C_2$ следует $P(C_1) \prec P(C_2)$.

Пусть $C_1 \prec C_2$. Рассмотрим так называемый конусный отрезок

$$K(C_1, C_2) = \{(x, s) \mid C_1 \prec (x, s) \prec C_2\}.$$

Геометрически, конусный отрезок представляет собой внутренность прямоугольника, в котором самая слабая точка (m) является юго-западной вершиной, а самая сильная точка (M) – это северо-восточная вершина. При действии P конус $K(C_1, C_2)$ переходит в некоторую криволинейную область, вложенную в $K[P(C_1), P(C_2)]$.

Построим однопараметрическое семейство конусных отрезков (рис. 1)

$$k(\gamma) = K\left(C^* \gamma, \frac{C^*}{\gamma}\right),$$

где параметр γ изменяется в $(0, 1)$. Очевидно, $k(\gamma) \rightarrow C^*$ при $\gamma \rightarrow 1$, конусные отрезки вложены друг в друга и $k(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ при $\gamma \rightarrow 0$. Для всякого $k(\gamma)$ имеют место $m = \gamma C^*$ и $M = C^*/\gamma$. При $m \prec P(m)$ говорят, что точка m идет вперед, а при $P(M) \prec M$ говорят, что точка M идет назад.

Справедлива

ЛЕММА 3. *Под действием P вершина m идет вперед, а M идет назад.*

Действительно, пусть $(x(t), s(t))$ – положительное, периодическое решение (3.1). В соответствие с прежними соглашениями $x(0) = x^*$ и $s(0) = s^*$.

Обозначим через $y(t)$ и $z(t)$ решение системы (3.1) с другими начальными условиями $y(0) = \gamma x^*$ и $z(0) = \gamma s^*$ при $0 < \gamma < 1$. По сути, это решение, выходящее из точки m . Докажем следующие неравенства:

$$y(t) > \gamma x(t) \quad \text{и} \quad z(t) > \gamma s(t) \quad (3.5)$$

для всех $t \in (0, T]$. Отсюда будет следовать справедливость первой части леммы при $t = T$.

Сначала при $t = 0$ оценим производные переменных y и z . С учетом $\gamma < 1$ и убывания f получаем

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \gamma[x^*f(\gamma x^*, \theta) - px^* + qs^*] > \gamma\dot{x} \quad \text{при} \quad \dot{x} = x^*f(x^*, \theta) - px^* + qs^*, \\ \dot{z} &= \gamma[px^* - qs^*] = \gamma\dot{s}. \end{aligned}$$

Поэтому для малых t имеет место $y(t) > \gamma x(t)$, а затем и $z(t) > \gamma s(t)$.

Далее, предположим противное, что при некотором $\tau < T$ нарушается хотя бы одно из неравенств (3.5). Для наименьшего такого τ возможны три следующих варианта.

Вариант 1. $y(\tau) = \gamma x(\tau)$ и $z(\tau) > \gamma s(\tau)$. Обозначим $X = x(\tau)$, $Z = z(\tau)$ и оценим производную переменной y в точке $t = \tau$:

$$\dot{y} = \gamma[Xf(\gamma X, \theta) - pX + qZ] > \gamma\dot{x}.$$

В силу непрерывности $\dot{y} > \gamma\dot{x}$ имеет место для всех $t < \tau$ и $t \approx \tau$. Для таких t выполняется первое неравенство (3.5), и поэтому равенство $y(\tau) = \gamma x(\tau)$ невозможно.

Вариант 2. $y(\tau) > \gamma x(\tau)$ и $z(\tau) = \gamma s(\tau)$. В точке $t = \tau$ при обозначениях $Y = y(\tau)$ и $Z = z(\tau)$ оценим производную переменной z :

$$\dot{z} = \gamma[pY - qZ] > \gamma\dot{s}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему пункту, устанавливаем противоречие.

Вариант 3. $y(\tau) = \gamma x(\tau)$ и $z(\tau) = \gamma s(\tau)$. Опять-таки, в точке $t = \tau$ получаем $\dot{y} > \gamma\dot{x}$. С учетом $y(t) > \gamma x(t)$ для $t < \tau$ находим $y(\tau) > \gamma x(\tau)$. Противоречие.

Подобным образом устанавливается, что точка M идет назад. Лемма 3 доказана.

Из данной леммы следует: под действием P больший конусный отрезок вложен в меньший (см. рис. 1). Теперь легко устанавливаем глобальную устойчивость C^* .

Рис. 1. Образ конусного отрезка при действии P в системе (3.1)

ПРИМЕР 2. Согласно общим допущениям динамика двух взаимодействующих конкурентов описывается системой:

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1, x_2, t), \quad \dot{x}_2 = x_2 f_2(x_1, x_2, t), \quad (3.6)$$

где любая функция роста f_i строго убывает по каждой переменной x_1 и x_2 ; $f_1(\infty, x_2, t) < 0$ и $f_1(x_1, \infty, t) < 0$; по переменной t гладкая функция f_i является T -периодической. Дифференциал локального отображения системы (3.6) является матрицей, в которой элементы задаются грубым образом. Кроме того, DL является знак-инвариантной структурой $\Sigma(1, -1)$, поэтому знаковая структура дифференциала отображения Пуанкаре (P) имеет тот же вид. Обозначим через P_1 и P_2 координатное представление P . В силу предыдущего каждая функция

$$x_i^T = P_i(x_1^0, x_2^0)$$

возрастает по “своей” переменной x_i^0 и убывает по “чужой” переменной x_{3-i}^0 .

Поведение переменных (3.6) определяется расположением двух изоклин, каждая из которых задается следующим множеством точек из $\mathbb{R}_+^2$:

$$E_i = \{(x_i^0, x_2^0) \mid x_i^0 = x_i^T > 0\},$$

где $i = 1, 2$. Приведем эквивалентный способ определения данной изоклины

$$x_i = P_i(x_1, x_2). \quad (3.7)$$

Если продуктивность популяций достаточно высока, то множества E_1 и E_2 не пусты. В этом случае уравнения $P_1(x_1, 0) = x_1$ и $P_2(0, x_2) = x_2$ имеют единственное, положительное решение (r_1 и r_2 соответственно). Так как $\partial P_i / \partial x_{3-i} < 0$, то уравнение (3.7) разрешимо в форме $x_{3-i} = E_i(x_i)$ при $x_i \in (0, r_i]$. Очевидно, $0 = E_i(r_i)$. График всякой изоклины соединяет оси координат (рис. 2).

Рис. 2. Векторное поле P системы (3.6) на границе конусного отрезка

Каждая изоклина разбивает $\mathbb{R}_+^2$ на две части: ограниченную, примыкающую к началу координат, и неограниченную. Будем говорить, что точка *лежит ниже* изоклины, если она принадлежит к ограниченной части.

Кривая E_i “мягко притягивает” к себе векторное поле P по i -й координате. Например, если (x_1^0, x_2^0) лежит ниже E_1 , тогда (и только тогда) $x_1^T > x_1^0$. “Мягкость” заключается в том, что точка (x_1^T, x_2^0) также находится ниже E_1 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть изоклина E_1 лежит выше E_2 , тогда в системе (3.6) первый конкурент вытесняет второго.

Приведем идею обоснования этого утверждения. А именно, с помощью “высокой” кривой E_1 построим “матрешку”: k -параметрическое семейство стягивающихся конусных отрезков

$$\Pi(k) = \{X = (x_1, x_2) \mid A_k \ll X \ll B\},$$

где k из $[0, 1]$. Здесь подвижная самая “слабая” вершина $A_k = \langle kr_1, E_1(kr_1) \rangle$ лежит на кривой E_1 , а самая “сильная” вершина B закреплена в точке $\langle r_1 + \zeta, 0 \rangle$, где константа $\zeta > 0$. При $k = 1$ получаем наименьший прямоугольник $\Pi(1) = [r_1, r_1 + \zeta]$, который вырождается в отрезок на оси x_1 . А при $k \rightarrow 0$ образуется наибольший прямоугольник $\Pi(0)$. Под действием отображения P большие прямоугольники переходят в малые. В пределе возникает $\Pi(1)$ – это и означает, что вторая популяция вымирает.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим теперь общую модель взаимодействия n конкурентов

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1, \dots, x_n, t), \quad \dots, \quad \dot{x}_n = x_n f_n(x_1, \dots, x_n, t), \quad (3.8)$$

где каждая f_i убывает по любой переменной $x_1, \dots, x_n$; для всякого t выполняется $f_i(X, t) < 0$ при достаточно большом векторе $X = (x_1, \dots, x_n)$; по переменной t гладкая функция f_i является T -периодической. При количестве конкурентов больше двух применение прежнего геометрического подхода сталкивается с принципиальными трудностями: знаковая структура DL не является знак-инвариантной (диагональ положительна, а все остальные элементы отрицательны). Поэтому возникают проблемы с определением свойств отображения Пуанкаре; далее, какие геометрические объекты представляют изоклины

$$E_i = \{(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}_+^n \mid x_i^0 = x_i^T > 0\}$$

системы (3.8) и др.

Тем не менее, здесь возможен окольный путь. Так, в (3.8) изменим направление времени ($t \rightarrow -t$) и в новой системе переименуем переменные

$$\dot{y}_i = -y_i f_i(y_1, \dots, y_n, -t), \quad (3.9)$$

где $i = 1, \dots, n$. Обозначим через $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ — отображение Пуанкаре в (3.9). Поскольку Q — обратное отображение к P , то векторное поле Q получается путем обращения стрелок в векторном поле P . Очевидно, неподвижные точки P и Q совпадают. Многие полученные результаты в системе (3.9) доставляют ценную информацию и для модели (3.8). Имеет место

ЛЕММА 4. *В системе (3.9) матрица DQ является знак-инвариантной структурой $\Sigma(1, \dots, 1)$, диагональные элементы которой больше 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведем в (3.9) монотонную замену $y_j = \exp(z_j)$ для всех j . Тогда получаем вспомогательную систему:

$$\dot{z}_i = -f_i(\exp(z_1), \dots, \exp(z_n), -t), \quad (3.10)$$

где $i = 1, \dots, n$. Обозначим через $R = (R_1, \dots, R_n)$ сдвиг-отображение за период T , индуцированное (3.10). Рассмотрим дифференциал $DL = (d_{ij})$ локального отображения данной системы. Его знаковая структура состоит из одних плюсов, а на диагонали “сидят” элементы, большие единицы. Данное свойство (ρ) выразимо в форме

$$\rho(D) = \min(d_{11} - 1, \dots, d_{nn} - 1, d_{12}, \dots, d_{n,n-1}) > 0.$$

Каждый из аргументов операции $\min$ является грубым свойством. Такие матрицы образуют полугруппу по умножению. Согласно лемме 2 дифференциал глобального отображения R обладает тем же свойством. Следовательно, получаем

$$\frac{\partial R_i}{\partial z_i} > 1 \quad \text{для всех } i \quad \text{и} \quad \frac{\partial R_i}{\partial z_j} > 0 \quad \text{для всех } i \neq j. \quad (3.11)$$

Из правого неравенства (3.11) следует $\partial Q_i / \partial y_j > 0$ для всех $j \neq i$.

Обоснование неравенства $\partial Q_i / \partial y_i > 1$ проведем на примере $i = 1$. Сначала отметим, что

$$Q_1(y_1, \dots, y_n) = \exp[R_1(\ln y_1, \dots, \ln y_n)],$$

и на J_1 имеет место

$$\exp[R_1(\ln y_1, \dots, \ln y_n)] = y_1.$$

Поэтому с учетом левого неравенства (3.11) легко устанавливаем $\partial Q_1/\partial y_1 > 1$.

Итак, в координатном представлении $y_i^T = Q_i(y_1^0, \dots, y_n^0)$ функция Q_i возрастает по каждой переменной и, более того, $\partial Q_i/\partial y_i > 1$. Эти обстоятельства позволяют применить к (3.9) развитые выше геометрические методы анализа.

Так, каждая изоклина системы (3.9)

$$J_i = \{(y_1^0, \dots, y_n^0) \in \mathbb{R}_+^n \mid y_i^0 = y_i^T > 0\}$$

допускает простое исследование. А именно, воспользуемся эквивалентным представлением изоклины $y_i = Q_i(y_1, \dots, y_n)$. С учетом приведенных выше свойств функции Q_i можно выразить y_i через остальные переменные. Обозначим данную функцию $y_i = J_i(y_1, \dots, y_n)$, тогда J_i убывает по всем своим переменным. Важно отметить, что “монотонная” поверхность J_i “отталкивает” от себя векторное поле Q по i -й координате. Очевидно, если $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ лежит ниже J_1 , тогда (и только тогда) $y_1^T < y_1^0$. Установим признак отбора, основанный на взаимном расположении изоклин [8]. Определим в $\mathbb{R}_+^n$ следующее k -параметрическое семейство вложенных призм (рис. 3).

$$\pi(k) = \{(y_1, \dots, y_n) \mid kr_1 \leq y_1 \leq r_1 + \zeta \text{ и } Q_1(kr_1, y_2, \dots, y_n) \leq kr_1\},$$

где ζ – некоторая положительная константа и $0 < k \leq 1$; r_1 удовлетворяет уравнению $r_1 = Q_1(r_1, 0, \dots, 0)$. Отметим, что $\pi(1)$ – самая малая призма – вырождается в отрезок $[r_1, r_1 + \zeta]$, лежащий на первой оси координат. При $k \rightarrow 0$ возникает самая большая призма. Справедлива

ЛЕММА 5. Пусть изоклина J_1 расположена выше всех других изоклин. Тогда на боковой поверхности $\pi(k)$ векторное поле отображения Q направлено наружу.

Рис. 3. Взаимосвязь динамических систем (3.8) и (3.9)

Вся подготовительная работа произведена с помощью “хорошего” отображения Q . Теперь последний шаг можно осуществить в рамках “плохого” отображения P .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть в системе (3.8) изоклина E_1 расположена выше всех других изоклин E_i , тогда первый конкурент вытесняет остальных.

Действительно, во вспомогательной системе (3.9) изоклина J_1 также будет расположена выше остальных. Обозначим через $\Pi(k)$ образ $\pi(k)$ под действием Q (рис. 3). С увеличением k криволинейная призма (k) сокращается и, наконец, $\Pi(1)$ вырождается в отрезок $[r_1, r_1 + \xi]$ на оси OX_1 .

Векторное поле P на границе $\Pi(k)$ направлено строго вовнутрь. Под действием P фазовая точка (3.8) переходит из большой криволинейной призмы в меньшую. В пределе данная точка оказывается в $\Pi(1)$. Это означает: все популяции, кроме первой, вымирают.

4. Заключение. В ряде случаев обнаружено: если все дифференциалы DL содержат нули на определенных местах, то и матрица DP их “наследует”. Например, пусть задана некоторая знак-инвариантная структура Σ размера $(m+n) \times (m+n)$. Заменим в ней юго-западный блок размера $m \times n$ сплошь нулями. Полученную знаковую структуру (“правильный осколок Σ ”) обозначим через σ , в частности:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix} \rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}$$

или

$$\Sigma = \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix} \rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} + & + & - \\ 0 & + & - \\ 0 & - & + \end{pmatrix}.$$

Матрицы такого сорта образуют мультипликативную полугруппу. Здесь можно показать: если знаковая структура всех DL имеет вид σ , то и знаковая структура DP относится к тому же типу.

Последнее. В предлагаемом принципе наследования для непрерывных динамических систем требования локальной универсальности и полугруппы, вероятно, являются обязательными. Насколько условие грубости является необходимым, остается открытой проблемой.

Автор искренне признателен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Ильичев, “Локальные и глобальные свойства неавтономных динамических систем и их приложение в моделях конкуренции”, *Сиб. матем. журн.*, **44:3** (2003), 622–635.
- [2] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1984.
- [3] В. Г. Ильичев, “Наследуемые свойства неавтономных динамических систем и их приложение в моделях конкуренции”, *Изв. вузов. Матем.*, 2002, № 6, 26–36.
- [4] Ф. С. Робертс, *Дискретные математические модели с приложениями к социальным биологическим и экологическим задачам*, Теория и методы системного анализа, Наука, М., 1986.
- [5] В. Г. Ильичев, О. А. Ильичева, “Знак-инвариантные структуры матриц и дискретные модели”, *Дискрет. матем.*, **11:4** (1999), 89–100.

- [6] П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, *Геометрические методы нелинейного анализа. Нелинейный анализ и его приложения*, Наука, М., 1975.
- [7] Р. С. Ушатинская, *Скрытая жизнь и анабиоз*, Наука, М., 1990.
- [8] В. Г. Ильичев, “Универсальные константы запаса и критерии отбора в переменной среде”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 691–704.

В. Г. Ильичев

Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону

E-mail: vitaly369@yandex.ru

Поступило

04.06.2009

Исправленный вариант

07.12.2010