Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 460–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:19:18

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ И МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

И. И. Шарапудинов

Пусть $\overline{\Omega}_{N+2m} = \{-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+m\}$. Статья посвящена приближению дискретных функций вида $f: \overline{\Omega}_{N+2m} \rightarrow \mathbb{R}$ алгебраическими многочленами на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. На основе двух систем многочленов Чебышева, ортогональных на множествах Ω_{N+m} и Ω_N соответственно, построен линейный оператор $\mathcal{Y}_{n+2m, N} = \mathcal{Y}_{n+2m, N}(f)$, действующий в пространстве дискретных функций, представляющий собой алгебраический многочлен степени не выше $n+2m$, для которого имеет место оценка ($x \in \Omega_N$)

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2m, N}(f, x)| \leq c(m) \Theta_{N, m}(x) \left[\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N} \right) \right]^{m/2-1/4} \frac{E_{n+m}[g, \ell_2(\Omega_{N+m})]}{n^{m-1/2}},$$

где $E_{n+m}[g, \ell_2(\Omega_{N+m})]$ представляет собой наилучшее приближение функции $g(x) = g(x, m, N) = ((N-1+m)/2)^m \Delta^m f(x-m)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n+m$ в пространстве $\ell_2(\Omega_{N+m})$, а функция $\Theta_{N, \alpha}(x)$ зависит лишь от всовой оценки для многочленов Чебышева $\tau_k^{\alpha, \alpha}(x, N)$.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Пусть

$$\overline{\Omega}_{N+2m} = \{-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+m\}.$$

Статья посвящена приближению дискретных функций вида $f: \overline{\Omega}_{N+2m} \rightarrow \mathbb{R}$ алгебраическими многочленами на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. На основе двух систем многочленов Чебышева, ортогональных на множествах Ω_{N+m} и Ω_N соответственно, построен линейный оператор $\mathcal{Y}_{n+2m, N} = \mathcal{Y}_{n+2m, N}(f)$, действующий в пространстве дискретных функций, представляющий собой алгебраический многочлен степени не выше $n+2m$, для которого имеет место оценка ($x \in \Omega_N$)

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2m, N}(f, x)| \leq c(m) \Theta_{N, m}(x) \left[\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N} \right) \right]^{m/2-1/4} \frac{E_{n+m}[g, \ell_2(\Omega_{N+m})]}{n^{m-1/2}}, \quad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00930.

где $E_{n+m}[g, \ell_2(\Omega_{N+m})]$ представляет собой наилучшее приближение функции $g(x) = g(x, m, N) = ((N-1+m)/2)^m \Delta^m f(x-m)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n+m$ в пространстве $\ell_2(\Omega_{N+m})$, а функция $\Theta_{N,\alpha}(x)$ зависит лишь от весовой оценки для многочленов Чебышева $\tau_k^{\alpha,\alpha}(x, N)$, ортонормированных на сетке Ω_N с определенным весом (см. п. 2). Из (1.1) следует, что операторы $\mathcal{Y}_{n+2m,N}(f)$ имеют достаточно хорошие аппроксимативные свойства и в то же время, как это следует из (4.20), они имеют достаточно простую структуру, удобную для их численной реализации.

2. Некоторые сведения о многочленах Чебышева, ортогональных на сетке $\{0, 1, \dots, M-1\}$. Через $T_n^{\alpha,\beta}(x, M)$ ($0 \leq n \leq M-1$) обозначим многочлены Чебышева, образующие ортогональную систему на сетке $\Omega_M = \{0, 1, \dots, M-1\}$ с весом $(\alpha, \beta > -1)$

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, M) = \frac{\Gamma(M)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(M+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(M-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(M-x)}, \quad (2.1)$$

т.е.

$$\sum_{x=0}^{M-1} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x, M) T_m^{\alpha,\beta}(x, M) = \delta_{nm} h_{n,M}^{\alpha,\beta}, \quad (2.2)$$

где

$$h_{n,M}^{\alpha,\beta} = \frac{(M+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(M-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.3)$$

$a^{[0]} = 1$, $a^{[n]} = a(a-1) \cdots (a-n+1)$. При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$.

Далее нам понадобятся некоторые свойства многочленов Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x, M)$ ($0 \leq n \leq M-1$) [1]–[3]:

а) *разностный аналог формулы Родрига*

$$\mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = \frac{(-1)^n}{n!(M-1)^{[n]}} \Delta^n \{(M-x+\alpha)_n x^{[n]} \mu(x)\}, \quad (2.4)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$, при этом формула (2.4) определяет многочлен $T_n^{\alpha,\beta}(x, M)$ для произвольных действительных α и β ;

б) *конечная разность первого порядка*

$$\Delta T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{M-1} T_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x, M-1); \quad (2.5)$$

в) *симметрия*

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = (-1)^n T_n^{\beta,\alpha}(M-1-x, M); \quad (2.6)$$

г) *если β – целое число такое, что $-n \leq \beta \leq -1$, то*

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = \frac{(n+\beta)!}{n!} \frac{(n+\alpha)^{[-\beta]} x^{[-\beta]}}{(M-1)^{[-\beta]}} T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta, M+\beta). \quad (2.7)$$

Если, кроме того, α – целое и $-(n + \beta) \leq \alpha \leq -1$, то из (2.6) и (2.7) имеем ($M \geq 2$)

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, M) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]} (M - x - 1)^{[-\alpha]}}{(M - 1)^{[-\beta]} (M - 1 + \beta)^{[-\alpha]}} T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha, -\beta}(x + \beta, M + \alpha + \beta). \quad (2.8)$$

Подробное доказательство свойств (2.4)–(2.7) содержится в [1]. Свойства (2.4)–(2.6) доказаны также в [2]. Свойство (2.7) впервые доказано в [3]. Из (2.2) следует, что многочлены

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(x) = \tau_n^{\alpha, \beta}(x, M) = \{h_{n, M}^{\alpha, \beta}\}^{-1/2} T_n^{\alpha, \beta}(x, M), \quad 0 \leq n \leq M - 1, \quad \alpha, \beta > -1, \quad (2.9)$$

образуют полную ортонормированную систему на $\Omega_M = \{0, 1, \dots, M - 1\}$ с весом $\mu(x)$, т.е.

$$\sum_{x=0}^{M-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha, \beta}(x, M) \tau_m^{\alpha, \beta}(x, M) = \delta_{nm}. \quad (2.10)$$

Через $\ell_2(\Omega_M, \mu)$ мы обозначим M -мерное евклидово пространство, состоящее из дискретных функций $f: \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}$. Скалярное произведение двух функций $f, g \in \ell_2(\Omega_M, \mu)$ определяется равенством

$$(f, g) = \sum_{j=0}^{M-1} f(j)g(j)\mu(j).$$

Равенство (2.10) означает, что система $\{\tau_m^{\alpha, \beta}(x, M)\}_{m=0}^{M-1}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\ell_2(\Omega_M, \mu)$. В случае, когда $\alpha = \beta = 0$ (т.е. когда $\mu(x) = 2/M$), мы будем писать $\ell_2(\Omega_M, \mu) = \ell_2(\Omega_M)$.

Нам понадобится в дальнейшем следующая величина ($0 \leq x \leq M - 1$):

$$\Theta_{M, \alpha}(x) = \max_{1 \leq n \leq M-1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{M} \left(1 - \frac{x}{M}\right)} + \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1/2} |\tau_n^{\alpha, \alpha}(x, M)|. \quad (2.11)$$

Если $n \geq M$, то для удобства мы положим

$$T_n^{\alpha, \beta}(x, M) = x^{[M]}; \quad (2.12)$$

следовательно, если $n \geq M$, то $T_n^{\alpha, \beta}(x, M) = 0$ при всех $x \in \Omega_M$.

3. Некоторые вспомогательные результаты. Здесь мы рассмотрим некоторые свойства многочленов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, L)$ при $\alpha = \beta$. Пусть $T_n(x, L) = T_n^{0, 0}(x, L)$. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 3.1. Если $1 \leq m \leq k \leq L - 1$, то

$$T_k(x, L) = \frac{(-1)^m}{k^{[m]}(L-1)^{[m]}} \Delta^m \{(L-x)_m x^{[m]} T_{k-m}^{m, m}(x-m, L-m)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\alpha = \beta = -m$, $M = L + m$, $n = k + m$, из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} T_{k+m}^{-m,-m}(x, L+m) &= \frac{(-1)^m x^{[m]} (L+m-x-1)^{[m]}}{(L+m-1)^{[m]} (L-1)^{[m]}} T_{k-m}^{m,m}(x-m, L-m) \\ &= \frac{(-1)^m x^{[m]} (L-x)_m}{(L+m-1)^{[m]} (L-1)^{[m]}} T_{k-m}^{m,m}(x-m, L-m). \end{aligned} \quad (3.1)$$

С другой стороны, повторное применение формулы (2.5) при $\alpha = \beta = -m$, $n = k + m$, $M = L + m$ дает

$$\Delta^m T_{k+m}^{-m,-m}(x, L+m) = \frac{k^{[m]}}{(L+m-1)^{[m]}} T_k^{0,0}(x, L). \quad (3.2)$$

Сопоставляя (3.1) и (3.2), приходим к утверждению леммы 3.1.

ЛЕММА 3.2. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \frac{T_n^{a,a}(x, N)}{T_n^{a,a}(N-1, N)} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!(\alpha+1)_{n-2j} (n+2a+1)_{n-2j} (1/2)_j (a-\alpha)_j}{(n-2j)!(2j)!(a+1)_{n-2j} (n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j (n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{T_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x, N)}{T_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(N-1, N)}, \end{aligned}$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$.

По поводу этой леммы см. [4].

ЛЕММА 3.3. *Если $0 \leq m \leq k$, $x \in \Omega_N$, то имеет место равенство*

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x, N) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_i^k T_{k-m+2i}(x, N),$$

в котором при $k-m+2i \leq N-1$

$$\begin{aligned} \sigma_i^k &= \sigma_i^k(m, N) = \frac{(N+m+k)^{[k-m]} (N+m-k-1)^{[2i]}}{(N+k-m+2i)^{[k-m+2i]}} \\ &\quad \times \frac{(k^{[m]})^2 m^{[i]} (1/2)_i (2k+1-2m+4i)}{(2i)!(2k)^{[2m-2i]} (k-m+1)_i (k+3/2)_i (2k+1)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а если $k-m+2i > N-1$, то $\sigma_i^k(m, N) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение $(x+m)^{[m]} (N-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x, N)$ представляет собой многочлен степени $k+m$; следовательно, мы можем записать ($x \in \Omega_N$)

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x, N) = \sum_{j=0}^{k+m} \gamma_j T_j(x, N), \quad (3.4)$$

где

$$\gamma_j = \frac{1}{h_{j,N}^{0,0}} \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t, N) T_j(t, N), \quad (3.5)$$

в частности, $\gamma_j = 0$, если $j \geq N$ (так как $T_j(t, N) = t^{[N]}$ при $j \geq N$). Поскольку многочлен $T_{k-m}^{m,m}(t, N)$ при $j < k - m$ ортогонален с весом $(x+m)^{[m]}(N-x)_m$ к $T_j(x, N)$, соответствующие $\gamma_j = 0$. Кроме того, сумма (3.5) обращается в нуль, если $k - m$ и j не являются одновременно четными или нечетными. Следовательно, (3.4) можно переписать так:

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x, N) = \sum_{i=0}^m \gamma_{k-m+2i} T_{k-m+2i}(x, N), \quad (3.6)$$

где

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{1}{h_{k-m+2i,N}^{0,0}} \frac{2}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t, N) T_{k-m+2i}(t, N), \quad (3.7)$$

в частности, если $k - m + 2i > N - 1$, то $\gamma_{k-m+2i} = 0$. Для вычисления суммы (3.7) при $k - m + 2i \leq N - 1$ воспользуемся леммой 3.2. Полагая $a = 0$, $\alpha = m$, $n = k - m + 2i$ и учитывая равенство $T_n^{\alpha,\beta}(N-1, N) = \binom{n+\alpha}{n}$, из леммы 3.2 находим

$$\begin{aligned} T_{k-m+2i}(x, N) &= \sum_{j=0}^q \frac{(2k-2m+4i-2j)!(k+m+2i-2j)!}{(k-m+2i-2j)!(2j)!(2k+4i-4j)!} \\ &\quad \times \frac{(1/2)_j m^{[j]} (-1)^j}{(k-m+2i-2j+1)_j (k+2i-2j+3/2)_j} T_{k-m+2i-2j}^{m,m}(x, N), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $q = \min\{m, [(k-m+2i)/2]\}$. Умножим обе части этого равенства на $\mu(x, m, m, N) \times T_{k-m}^{m,m}(x, N)$ и просуммируем от 0 до $N-1$; тогда

$$\begin{aligned} &\frac{2^{2m+1}}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \frac{(t+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-t)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(t, N) T_{k-m+2i}(t, N) \\ &= \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!(1/2)_i m^{[i]} (-1)^i}{(k-m)!(2i)!(2k)!(k-m+1)_i (k+3/2)_i} h_{k-m,N}^{m,m}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.7) и (3.9) имеем

$$\gamma_{k-m+2i} = \frac{h_{k-m,N}^{m,m}}{2^{2m} h_{k-m+2i,N}^{0,0}} \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!(1/2)_i m^{[i]} (-1)^i}{(k-m)!(2i)!(2k)!(k-m+1)_i (k+3/2)_i}. \quad (3.10)$$

Если мы воспользуемся равенством (2.3), то с учетом (3.3) мы можем переписать (3.10) так:

$$\begin{aligned}\gamma_{k-m+2i} &= \frac{(-1)^i (N+m+k)^{[k-m]} (N-1)^{[k-m+2i]}}{(N-1)^{[k-m]} (N+k-m+2i)^{[k-m+2i]}} \\ &\quad \times \frac{k!^2 (2k-2m+4i+1)}{(2k+1)(k-m)!(k+m)!} \frac{(2k-2m+2i)!(k+m)!m^{[i]}(1/2)_i}{(2k)!(k-m)!(2i)!(k-m+1)_i(k+3/2)_i} \\ &= (-1)^i \frac{(N+m+k)^{[k-m]} (N+m-k-1)^{[2i]}}{(N+k-2m+2i)^{[k-m+2i]}} \\ &\quad \times \frac{(k^{[m]})^2 m^{[i]}(1/2)_i(2k+1-2m+4i)}{(2i)!(2k)^{[2m-2i]}(k-m+1)_i(k+3/2)_i(2k+1)} \\ &= (-1)^i \sigma_i^k(m, N).\end{aligned}$$

Подставляя это значение в (3.6), приходим к утверждению леммы 3.3.

4. Построение многочленов $\mathcal{Y}_{n+2m,N}(x)$ и приближение дискретных функций. Мы будем считать, что исходная дискретная функция $f = f(x)$ задана на множестве $\overline{\Omega}_{N+2m} = \{-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+m\}$. Для такой функции построим многочлены $\mathcal{Y}_{n+2m,N}(x)$, посредством которых аппроксимируем функцию $f = f(x)$ на множестве $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Предварительно мы рассмотрим некоторые понятия, связанные с конечными разностями.

Пусть функция $F = F(x)$ задана на множестве $\Omega_{N+2m} = \{0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+2m\}$. Введем оператор m -кратного суммирования $(\sum_{t=0}^x)^m$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{t=0}^x\right)^0 F(t) &= F(x), \\ \left(\sum_{t=0}^x\right)^1 F(t) &= \sum_{t=0}^x F(t) = F_1(x), \\ \left(\sum_{t=0}^x\right)^2 F(t) &= \sum_{t=0}^x F_1(t) = \sum_{t=0}^x \sum_{j=0}^t F(j) = F_2(x), \\ &\dots\dots\dots \\ \left(\sum_{t=0}^x\right)^m F(t) &= \sum_{t=0}^x F_{m-1}(t) = F_m(x).\end{aligned}$$

ЛЕММА 4.1. Пусть $m \geq 1$, $x \in \Omega_{N+m}$. Тогда

$$\left(\sum_{t=0}^x\right)^m \Delta^m F(t) = F(x+m) + P_{m-1}(x),$$

где

$$P_{m-1}(x) = - \sum_{l=0}^{m-1} F(l) \left(\sum_{t=0}^x\right)^{m-1-l} 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = 1$, то

$$\left(\sum_{t=0}^x\right)^1 \Delta F(t) = \sum_{t=0}^x \Delta F(t) = F(x+1) - F(0),$$

поэтому утверждение леммы имеет место. Пусть оно справедливо для $m-1 \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\sum_{t=0}^x\right)^m \Delta^m F(t) &= \sum_{t=0}^x \left(\sum_{j=0}^t\right)^{m-1} \Delta^{m-1} \Delta F(j) \\ &= \sum_{t=0}^x (\Delta F(t+m-1) + P_{m-2}(t)) = \sum_{t=0}^x \Delta F(t+m-1) + \sum_{t=0}^x P_{m-2}(t) \\ &= F(x+m) - F(m-1) - \sum_{t=0}^x \sum_{l=0}^{m-2} F(l) \left(\sum_{j=0}^t\right)^{m-2-l} 1 \\ &= F(x+m) - F(m-1) - \sum_{l=0}^{m-2} F(l) \sum_{t=0}^x \left(\sum_{j=0}^t\right)^{m-2-l} 1 \\ &= F(x+m) - F(m-1) - \sum_{l=0}^{m-2} F(l) \left(\sum_{t=0}^x\right)^{m-1-l} 1 \\ &= F(x+m) - \sum_{l=0}^{m-1} F(l) \left(\sum_{t=0}^x\right)^{m-1-l} 1. \end{aligned}$$

Лемма 4.1 доказана.

ЛЕММА 4.2. Если $1 \leq m \leq k$, то

$$\left(\sum_{t=0}^x\right)^m \Delta^m \{t^{[m]}(N+m-t)_m T_{k-m}^{m,m}(t-m, N)\} = (x+m)^{[m]}(N-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x, N).$$

Утверждение этой леммы непосредственно вытекает из леммы 4.1, так как для функции $F(x) = x^{[m]}(N+m-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x-m, N)$ мы имеем $F(0) = F(1) = \dots = F(m-1) = 0$.

Положим $F(x) = f(x-m)$. Эта функция определена на множестве $\Omega_{N+2m} = \{0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+2m\}$, поэтому функция

$$g(x) = g(x, m, N) = \left(\frac{N-1+m}{2}\right)^m \Delta^m F(x)$$

задана на $\Omega_{N+m} = \{0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+m\}$. Мы можем разложить эту функцию в конечный ряд по многочленам $\tau_n(x, N+m)$:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N-1+m} \widehat{g}_k \tau_k(t, N+m) = \sum_{k=0}^{N-1+m} \widehat{g}_k \{h_{k, N+m}^{0,0}\}^{-1/2} T_k(t, N+m), \quad (4.1)$$

где

$$\widehat{g}_k = \frac{2}{N+m} \sum_{j=0}^{N-1+m} g(j) \tau_k(j, N+m) \quad (4.2)$$

– коэффициенты Фурье функции $g(t)$ по системе Чебышева $\{\tau_n(x, N+m)\}_{n=0}^{N-1+m}$. Воспользовавшись леммой 3.1, перепишем (4.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{N-1+m}{2} \right)^m \Delta^m F(t) \\ &= Q_{m-1}(t) + \frac{(-1)^m}{(N-1+m)^{[m]}} \sum_{k=m}^{N-1+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]}} \frac{\Delta^m \{t^{[m]}(N+m-t)_m T_{k-m}^{m,m}(t-m, N)\}}{\sqrt{h_{k, N+m}^{0,0}}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $Q_{m-1}(x)$ – многочлен степени не выше $m-1$. Подействуем на обе части равенства (4.3) оператором m -кратного суммирования и воспользуемся леммами 4.1 и 4.2. Тогда получим

$$\begin{aligned} F(x+m) + P_{m-1}(x) &= \left(\frac{2}{N-1+m} \right)^m \left(\sum_{t=0}^x \right)^m Q_{m-1}(x) \\ &+ (-1)^m \frac{2^m (x+m)^{[m]} (N-x)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \sum_{k=m}^{N-1+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]}} \frac{T_{k-m}^{m,m}(x, N)}{\sqrt{h_{k, N+m}^{0,0}}}. \end{aligned}$$

Поскольку $F(x) = f(x-m)$, последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$f(x) = D_{2m-1}(x, N) + \mathcal{F}_m(x, N), \quad (4.4)$$

где

$$D_{2m-1}(x, N) = \left(\frac{2}{N-1+m} \right)^m \left(\sum_{t=0}^x \right)^m Q_{m-1}(x) - P_{m-1}(x) \quad (4.5)$$

– многочлен степени не выше $2m-1$,

$$\mathcal{F}_m(x, N) = \frac{(-2)^m (x+m)^{[m]} (N-x)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \sum_{k=m}^{N-1+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]}} \frac{T_{k-m}^{m,m}(x, N)}{\sqrt{h_{k, N+m}^{0,0}}}. \quad (4.6)$$

Пусть $n \geq 2m$,

$$\mathcal{J}_{m,n}(x, N) = \frac{(-2)^m (x+m)^{[m]} (N-x)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \sum_{k=m}^{n-m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]}} \frac{T_{k-m}^{m,m}(x, N)}{\sqrt{h_{k, N+m}^{0,0}}}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{J}_{m,n}(x, N) = \frac{(-2)^m (x+m)^{[m]} (N-x)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \sum_{k=n-m+1}^{n+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]}} \frac{T_{k-m}^{m,m}(x, N)}{\sqrt{h_{k, N+m}^{0,0}}}, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{R}_{m,n}(x, N) = \frac{(-2)^m (x+m)^{[m]} (N-x)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]}} \frac{T_{k-m}^{m,m}(x, N)}{\sqrt{h_{k, N+m}^{0,0}}}. \quad (4.9)$$

В силу леммы 3.3 мы можем записать

$$\mathcal{J}_{m,n}(x, N) = \Phi_{m,n}(x, N) + \Psi_{m,n}(x, N), \quad (4.10)$$

где

$$\Phi_{m,n}(x, N) = \frac{(-2)^m (N+m)^{[m]} (N+m+1)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \times \sum_{k=n-m+1}^{n+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]} \sqrt{h_{k,N+m}^{0,0}}} \sum_{i=0}^{[(n+m-k)/2]} (-1)^i \sigma_i^k T_{k-m+2i}(x, N), \quad (4.11)$$

$$\Psi_{m,n}(x, N) = \frac{(-2)^m (N+m)^{[m]} (N+m+1)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \times \sum_{k=n-m+1}^{n+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]} \sqrt{h_{k,N+m}^{0,0}}} \sum_{i=[(n+m-k)/2]+1}^m (-1)^i \sigma_i^k T_{k-m+2i}(x, N). \quad (4.12)$$

Далее, полагая

$$\mathcal{U}_{m,n}(x, N) = \Phi_{m,n}(x, N) + \mathcal{J}_{m,n}(x, N), \quad (4.13)$$

$$\mathcal{V}_{m,n}(x, N) = \Psi_{m,n}(x, N) + \mathcal{R}_{m,n}(x, N), \quad (4.14)$$

из (4.6)–(4.10) имеем

$$\mathcal{F}_m(x, N) = \mathcal{U}_{m,n}(x, N) + \mathcal{V}_{m,n}(x, N), \quad (4.15)$$

при этом $\mathcal{U}_{m,n}(x, N)$ – алгебраический многочлен степени не выше n . Поскольку в силу леммы 3.3 и равенства (4.9)

$$\mathcal{R}_{m,n}(x, N) = \frac{(-2)^m (N+m)^{[m]} (N+m+1)_m}{(N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \times \sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \frac{\hat{g}_k}{k^{[m]} \sqrt{h_{k,N+m}^{0,0}}} \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_i^k T_{k-m+2i}(x, N), \quad (4.16)$$

из (4.12), (4.14) и (4.16) следует, что

$$\mathcal{V}_{m,n}(x, N) = \sum_{k=n+1}^{N-1} v_k T_k(x, N), \quad x \in \Omega_N. \quad (4.17)$$

Сопоставляя (4.4), (4.15) и (4.17), мы имеем

$$f(x) = S_{n,N}(f, x) + \mathcal{V}_{m,n}(x, N), \quad x \in \Omega_N, \quad (4.18)$$

где

$$S_{n,N}(f, x) = D_{2m-1}(x, N) + \mathcal{U}_{m,n}(x, N) \quad (4.19)$$

представляет собой частную сумму порядка n ряда Фурье функции f по системе $\tau_k(x, N) = \tau_k^{0,0}(x, N)$ ($0 \leq k \leq N-1$).

Вместе с $S_{n,N}(f, x)$ мы также введем сумму

$$\mathcal{Y}_{n+2m,N}(f, x) = S_{n,N}(f, x) + \Psi_{m,n}(x, N). \quad (4.20)$$

Будем рассматривать многочлены $\mathcal{Y}_{n+2m,N}(f, x)$ как аппарат приближения дискретных функций $f: \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$. Сопоставляя (4.14), (4.18) и (4.20), заметим, что

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2m,N}(f, x) = \mathcal{R}_{m,n}(x, N), \quad x \in \Omega_N. \quad (4.21)$$

Это означает, что $\mathcal{R}_{m,n}(x, N)$ равно отклонению многочлена $\mathcal{Y}_{n+2m,N}(f, x)$ от функции $f(x)$ в точке $x \in \Omega_N$, поэтому представляет интерес вопрос об оценке $|\mathcal{R}_{m,n}(x, N)|$ при $x \in \Omega_N$. С этой целью из (4.9) и (2.11) заметим, что

$$\begin{aligned} & |\mathcal{R}_{m,n}(x, N)| \\ & \leq \Theta_{N,m}(x) \frac{(x+m)^{[m]}(N-x)_m 2^m}{(\sqrt{(x+1)/N \cdot (1-x/N)} + 1/N)^{m+1/2} (N-1+m)^{[m]} (N-1+m)^m} \\ & \quad \times \sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \left\{ \frac{h_{k-m,N}^{m,m}}{h_{k,N+m}^{0,0}} \right\}^{1/2} \frac{|\widehat{g}_k|}{k^{[m]}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Через $c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ будем обозначать положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров и, вообще говоря, различные в разных местах. Из равенства (2.3) нетрудно заметить, что

$$\left\{ \frac{h_{k-m,N}^{m,m}}{h_{k,N+m}^{0,0}} \right\}^{1/2} \leq c(m). \quad (4.23)$$

Кроме того, нетрудно увидеть, что $(0 \leq x \leq N-1)$

$$\begin{aligned} & \frac{(x+m)^{[m]}(N-x)_m 2^m}{(N-1+m)^{[m]}(N-1+m)^m} \Big/ \left(\sqrt{\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)} + \frac{1}{N} \right)^{m+1/2} \\ & \leq c(m) \left[\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right) \right]^m \Big/ \left(\sqrt{\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)} \right)^{m+1/2} \\ & = c(m) \left[\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right) \right]^{m/2-1/4}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Сопоставляя (4.22)–(4.24), находим

$$|\mathcal{R}_{m,n}(x, N)| \leq c(m) \Theta_{N,m}(x) \left[\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right) \right]^{m/2-1/4} \sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \frac{|\widehat{g}_k|}{k^{[m]}}.$$

Отсюда в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} & |\mathcal{R}_{m,n}(x, N)| \leq c(m) \Theta_{N,m}(x) \left[\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right) \right]^{m/2-1/4} \\ & \quad \times \left(\sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \widehat{g}_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \frac{1}{(k^{[m]})^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Далее,

$$\left(\sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \frac{1}{(k[m])^2} \right)^{1/2} \leq c(m)n^{-m+1/2}, \quad \left(\sum_{k=n+m+1}^{N-1+m} \hat{g}_k^2 \right)^{1/2} \leq E_{n+m}[g, \ell_2(\Omega_{N+m})], \quad (4.26)$$

где $E_{n+m}[g, \ell_2(\Omega_{N+m})]$ представляет собой наилучшее приближение функции $g = g(x)$ алгебраическими многочленами степени не выше k в пространстве $\ell_2(\Omega_{N+m})$.

Сопоставляя (4.21), (4.25), (4.26), приходим к следующему результату

ТЕОРЕМА. Пусть m – натуральное число, $f = f(x)$ дискретная функция вида $f: \overline{\Omega}_{N+2m} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\overline{\Omega}_{N+2m} = \{-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+m\}$,

$$g(x) = g(x, m, N) = \left(\frac{N-1+m}{2} \right)^m \Delta^m f(x-m), \quad x \in \Omega_{N+m}.$$

Тогда для $x \in \Omega_N$ имеет место следующая оценка:

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2m, N}(f, x)| \leq c(m) \Theta_{N, m}(x) \left[\frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x}{N} \right) \right]^{m/2-1/4} \frac{E_{n+m}[g, \ell_2(\Omega_{N+m})]}{n^{m-1/2}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шарапудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.
- [2] Karlin S., McGregor J. L. The Hahn polynomials, formulas and an application // Scripta Math. 1961. V. 26. P. 33–46.
- [3] Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Чебышева–Хана // Матем. сб. 1991. Т. 183. № 3. С. 408–420.
- [4] Gasper G. Positivity and special functions // Theory and Appl. Spec. Funct. / ed. R. A. Askey, 1975. P. 375–433.

Дагестанский государственный педагогический университет
E-mail: sharapud@datacom.ru

Поступило
09.03.1999