Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, Примеры неединственности решений смешанной задачи для уравнения теплопроводности в неограниченных областях, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 67–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:31:05

Примеры неединственности решений смешанной задачи для уравнения теплопроводности в неограниченных областях

Л. М. Кожевникова

Для широкого класса областей вращения построены примеры неединственности решений первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности, подтверждающие точность класса единственности теклиндовского типа.

Библиография: 11 названий.

1. Формулировка результата. Теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классах растущих функций были впервые установлены Хольмгреном [1], Тихоновым [2], Тэклиндом [3]. Предельно широкие классы функций, в которых имеет место единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, найдены в работе Тэклинда [3]. Он показал, что если решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи

$$u_t = \Delta u, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (1.2)$$

в $D^T = (0, T) \times \mathbb{R}_n$ удовлетворяет неравенству

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq \exp(|\mathbf{x}|h(|\mathbf{x}|)), \quad (1.3)$$

то $u(t, \mathbf{x}) = 0$. Здесь $h(r)$ – неубывающая положительная функция такая, что

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = \infty. \quad (1.4)$$

Если же функция $h(r)$ такова, что интеграл (1.4) сходится, то построены решения $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1.1), (1.2), отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие условию (1.3).

Для параболического уравнения высокого порядка Ладыженской [4] получены теоремы единственности решения задачи Коши в классах экспоненциально растущих функций.

Обобщение теоремы Тэклинда на случай первой смешанной задачи и задачи Коши для общего вырождающегося параболического уравнения второго порядка

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00440-а).

и параболических систем методом введения параметра проведено Олейник, Радкевичем в работе [5]. Для второй и третьей смешанных задач теоремы единственности установлены Гагнидзе [6].

Для параболического уравнения второго порядка

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t, \mathbf{x}) u_{x_i})_{x_j} = 0 \quad (1.5)$$

с измеримыми функциями $a_{ij}(t, \mathbf{x})$, $i, j = 1, \dots, n$, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности, Гуциным [7] в случае второй смешанной задачи, Мукминовым [8] для первой смешанной задачи в цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$, где Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, выделены классы единственности, близкие к классу Тэклинда.

А именно, если для обобщенного решения задачи (1.5), (1.2),

$$u|_{S^T} = 0, \quad S^T = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.6)$$

существует такая монотонно неубывающая на полуоси $[1, \infty)$ положительная функция $h(r)$, что выполнено условие (1.4) и для всех $r \geq 1$

$$\int_0^T \int_{\Omega(r)} u^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \leq e^{rh(r)}, \quad (1.7)$$

то $u(t, \mathbf{x}) = 0$ в D^T . Здесь использовано обозначение $\Omega(r) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| < r\}$, $r > 0$.

В работе [9] в близкой форме получен класс единственности решений первой смешанной задачи для уравнений высокого порядка.

Точность тэклиндовских классов единственности для начально-краевых задач ранее не была установлена. В этой работе выделяется семейство неограниченных областей Ω , для которых класс единственности (1.7) решения первой смешанной задачи является точным.

Определим область вращения

$$\Omega(f) = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0, |\mathbf{x}'| < f(x_1)\} \quad (1.8)$$

с положительной функцией $f(x_1)$. От функции f будем требовать только, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью. В частности, это влечет ее измеримость.

В следующей теореме устанавливается точность класса единственности (1.7).

ТЕОРЕМА 1. Для любого $T > 0$ в области $D^T(f) = (0, T) \times \Omega(f)$ существует неотрицательное ненулевое решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1.1), (1.2), (1.6). Если положительная функция $f(x_1)$, $x_1 > 0$, подчиняется требованию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_m(r)r = \infty, \quad f_m(r) = \inf_{(1,r)} f(x_1), \quad (1.9)$$

и $h(r)$ – произвольная монотонно неубывающая на полуоси $[1, \infty)$ положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = C_0 < \infty, \quad (1.10)$$

то найдется число $r_*(h, f, n) > 2$ такое, что для построенного решения при $r \geq r_*$ справедлива оценка (1.7).

2. Вспомогательные сведения. Пусть $\|\cdot\|_Q$ – норма в пространстве $L_2(Q)$; $\Omega^r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_1 < r\}$, $D_{t_1}^{t_2, r} = (t_1, t_2) \times \Omega^r$, причем значения $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$, $r = \infty$ могут быть опущены; $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_1 = r\}$; $B(r, \mathbf{z})$ – шар радиуса r с центром в точке $\mathbf{z}$.

Гильбертово пространство $\dot{W}_2^{0,1}(D^T)$ определим как пополнение пространства действительных функций $g(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$ по норме

$$\|g\|_{\dot{W}_2^{0,1}(D^T)} = (\|g\|_{D^T}^2 + \|\nabla g\|_{D^T}^2)^{1/2}.$$

Гильбертово пространство $\dot{W}_2^{0,1}(D^{T,r})$ определим как пополнение пространства действительных функций $g(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty((-1, T+1) \times \mathbb{R}_n)$ по норме $\|g\|_{\dot{W}_2^{0,1}(D^{T,r})}$.

Пространство $\dot{W}_{2,lc}^{0,1}(D^T)$ состоит из таких функций $g(t, \mathbf{x})$, определенных в D^T , для которых, при каждом $r > 0$, найдется функция из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^T)$, совпадающая с $g(t, \mathbf{x})$ в $D^{T,r}$.

Доказательство теоремы основано на неравенстве Гарнака, установленном Мозером [10] для уравнения (1.5). Сформулируем неравенство Гарнака в следующем частном виде: для неотрицательного в цилиндре $D = (0, 9R^2] \times B(2R, \mathbf{w}) \subset \mathbb{R}_{n+1}$ решения уравнения (1.1) справедливо неравенство

$$\max_{D^-} u(t, \mathbf{x}) \leq H \min_{D^+} u(t, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

в котором постоянная $H \geq 1$ зависит только от n ,

$$D^- = (R^2, 2R^2) \times B(R, \mathbf{w}), \quad D^+ = (8R^2, 9R^2) \times B(R, \mathbf{w}).$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что $10C_0\varepsilon_0 \ln H \leq 1$. Выберем число $T_0 \geq 8/\varepsilon_0 + T$ и положим $t_0 = 2T_0$. Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.6) в D^{t_0} назовем функцию $u(t, \mathbf{x}) \in \dot{W}_{2,lc}^{0,1}(D^{t_0})$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{D^{t_0}} (-uv_t + \nabla u \nabla v) d\mathbf{x} dt = 0 \quad (3.1)$$

для любой функции $v(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty(D_{-1}^{t_0})$.

При каждом натуральном $K \geq 3$ в области $D^{t_0, K}(f)$ рассмотрим задачу (1.1), (1.2), (1.6) с граничным условием

$$u|_{x=K} = A_K t \omega_{f(K)}(|\mathbf{x}'|), \quad (3.2)$$

где $\omega_h(y) = \omega(y/h)$, $\omega(y) \in C_0^\infty(-1, 1)$ – функция типа шпалочки. В случае $f(K) = \infty$ в условии (3.2) берем функцию $\omega(|\mathbf{x}'|)$. Постоянную A_K подберем так, чтобы

$$u(t_0, (2, \mathbf{0}')) = 1. \quad (3.3)$$

Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.6), (3.2) в $D^{t_0, K}(f)$ назовем функцию $u_K(t, \mathbf{x}) \in \dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0, K})$, совпадающую в $D^{t_0, K}$ с некоторой функцией из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$, удовлетворяющую граничному условию (3.2) и интегральному тождеству (3.1) для любой функции $v \in C_0^\infty(D_{-1}^{t_0, K})$. Для любого натурального

$K \geq 3$ обобщенное решение задачи (1.1), (1.2), (1.6), (3.2) существует и единственно (см., например, [11]).

Далее покажем, что существует функция $u(t, \mathbf{x}) \in \dot{W}_{2,lc}^{0,1}(D^{t_0})$ такая, что $u_K \rightharpoonup u$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0,N})$ при $K \rightarrow \infty$ и любом фиксированном натуральном N . Для каждого $K \geq 3$ найдем числа μ_K^1 :

$$\|\mu_K^1 u_K\|_{W_2^{0,1}(D^{t_0,3})} = 1.$$

В силу последнего равенства существует подпоследовательность u_{K_i} такая, что $\mu_{K_i}^1 u_{K_i} \rightharpoonup v^1$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0,3})$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда устанавливаем поточечную сходимость этой последовательности в $[0, t_0] \times \Omega$, в частности, в точке $(t_0, (2, \mathbf{0}'))$:

$$\mu_{K_i}^1 u_{K_i}(t_0, (2, \mathbf{0}')) \rightarrow v^1(t_0, (2, \mathbf{0}')) = \mu^1.$$

В силу (3.3) имеем: $\mu_{K_i}^1 \rightarrow \mu^1$ при $i \rightarrow \infty$; следовательно, $u_{K_i} \rightharpoonup v^1/\mu^1$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0,3})$. При этом предельная функция v^1 совпадает в $D^{t_0,3}$ с некоторой функцией из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$. Подпоследовательность u_{K_i} переобозначим через u_K^1 .

Затем числа μ_K^2 выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\|\mu_K^2 u_K^1\|_{W_2^{0,1}(D^{t_0,4})} = 1.$$

Из последовательности u_K^1 выберем подпоследовательность $u_{K_i}^1$ (переобозначим ее через u_K^2) такую, что $\mu_K^2 u_K^2 \rightharpoonup v^2$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0,4})$. Повторяя предыдущие рассуждения, установим, что $u_K^2 \rightharpoonup v^2/\mu^2$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0,4})$. При этом функция v^2 совпадает в $D^{t_0,4}$ с некоторой функцией из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$. В силу единственности предела имеем равенство $v^1/\mu^1 = v^2/\mu^2$ в $D^{t_0,3}$. Продолжая это построение, выберем диагональную подпоследовательность u_K^K . Для нее имеет место слабая сходимость: $u_K^K \rightharpoonup u$ при $K \rightarrow \infty$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0,N})$ при каждом фиксированном натуральном N . Отсюда, как и выше, следует поточечная сходимость $u_K^K(t, \mathbf{x}) \rightarrow u(t, \mathbf{x})$ при $K \rightarrow \infty$ для $(t, \mathbf{x}) \in D^{t_0}$. Предельная функция $u(t, \mathbf{x})$ принадлежит $\dot{W}_{2,lc}^{0,1}(D^{t_0})$.

Покажем, что $u(t, \mathbf{x})$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.6). По определению обобщенного решения задачи (1.1), (1.2), (1.6), (3.2) при каждом $N \geq 3$ для любой функции $v \in C_0^\infty(D_{-1}^{t_0,N})$ справедливо интегральное тождество (3.1):

$$\int_{D^{t_0}} \{-u_K^K v_t + \nabla u_K^K \nabla v\} d\mathbf{x} dt = 0, \quad K \geq N.$$

Перейдя в нем к пределу при $K \rightarrow \infty$, получим (3.1) для предельной функции $u(t, \mathbf{x})$.

Докажем, что функция $u_K(t, \mathbf{x})$ на сечении $[0, t_0] \times \gamma_r$ достигает своего максимума в точке $(t_0, (r, \mathbf{0}'))$:

$$\max_{(t, \mathbf{x}) \in [0, t_0] \times \gamma_r} u_K(t, \mathbf{x}) = u_K(t_0, (r, \mathbf{0}')), \quad 0 < r \leq K. \quad (3.4)$$

Действительно, из принципа максимума следует, что $u_K(t, \mathbf{x}) \geq 0$,

$$u_{K_t}(t, \mathbf{x}) \geq 0, \quad u_{K_\varrho}(t, \mathbf{x}) \leq 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \overline{D^{t_0, K}}(f), \quad (3.5)$$

где индексы t и ϱ означают производные по t и радиусу $\varrho = |\mathbf{x}'|$ цилиндрической системы координат $(x_1, \varrho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2})$. Поясним, например, последнее неравенство.

Предположим сначала, что $f(x_1) \in C^2(0, \infty)$ и такова, что для фиксированного K граница $\partial\Omega^K(f) \in C^2$. Тогда на границе $\varrho = f(x_1)$ определены значения производной $u_{K\varrho}$. Отметим, что из единственности решения первой смешанной задачи следует осесимметричность функции u_K . Действительно, в противном случае, повернув график функции u_K на ненулевой угол вокруг оси Ox_1 , мы получили бы новое решение задачи (1.1), (1.2), (1.6), (3.2).

Таким образом, в цилиндрических координатах функция $u_K(t, x_1, \varrho)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_{Kx_1x_1} + u_{K\varrho\varrho} + \frac{n-2}{\varrho} u_{K\varrho} = u_{Kt}$$

при $t \in (0, t_0]$ и $(x_1, \varrho) \in \Gamma^K(f) = \{(x_1, \varrho) \in \mathbb{R}_2 \mid 0 < x_1 < K, 0 < \varrho < f(x_1)\}$. Продифференцировав уравнение по ϱ , получаем

$$u_{K\varrho x_1 x_1} + u_{K\varrho\varrho\varrho} + \frac{n-2}{\varrho} u_{K\varrho\varrho} = \frac{n-2}{\varrho^2} u_{K\varrho} + u_{Kt\varrho}. \quad (3.6)$$

Поскольку функция u_K положительна внутри области, то $u_{K\varrho}(t, x_1, \varrho)|_{\varrho=f(x_1)} \leq 0$. Ввиду четности по аргументу ϱ выполнено однородное условие на оси симметрии: $u_{K\varrho}(t, x_1, \varrho)|_{\varrho=0} = 0$. По выбору функции $\omega_{f(K)}(\varrho)$ имеем $u_{K\varrho}(t, K, \varrho) \leq 0$. Очевидно, что $u_{K\varrho}(t, 0, \varrho) = 0$ из начального условия находим, что $u_{K\varrho}(0, x_1, \varrho) = 0$. Функция $u_{K\varrho}$ не имеет положительного максимума в $(0, t_0) \times \Gamma^K(f)$. Иначе, из уравнения (3.6) в точке максимума получаем $u_{K\varrho x_1 x_1} + u_{K\varrho\varrho\varrho} > 0$, что невозможно.

В случае области $\Omega^K(f)$ с негладкой границей $\partial\Omega^K(f)$ следует приблизить ее изнутри последовательностью ограниченных гладких областей, сходящейся к $\Omega^K(f)$, и перейти к поточечному пределу решений в этих областях, сохраняющему монотонность по ϱ предельной функции.

Согласно условию (1.9) найдется $R_0 > 0$ такое, что при $\hat{r} \geq R_0$ справедливо неравенство $2 \leq \varepsilon_0 \hat{r} f_m(\hat{r})$. Выберем число $\hat{r} \geq \hat{r}_0 = \max\{R_0, 3/\varepsilon_0\}$. Положим

$$R = \frac{1}{\varepsilon_0 \hat{r}}, \quad s_j = \hat{r} - R - 2jR, \quad j = 0, \dots, \infty.$$

Зафиксируем номер $L \geq 1$ такой, что $2 \in [s_L, s_{L-1})$. Далее, рассмотрим последовательность $z_j = s_{L-j}$, $j = 0, \dots, L$. Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j &= (z_j, \mathbf{0}'), \quad t_j = t_0 - 8jR^2, \quad j = 0, \dots, L, \\ \mathbf{w}_j &= \left(\frac{z_{j-1} + z_j}{2}, \mathbf{0}' \right), \quad j = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Покажем справедливость неравенств

$$t_j \geq R^2, \quad j = 1, \dots, L. \quad (3.7)$$

При построении последовательности точек $(t_j, \mathbf{v}_j)$, $j = 0, \dots, L$, происходит спуск по времени на величину $\Delta t = 8R^2L$; оценим ее. Очевидно,

$$L \leq \frac{\hat{r} - 2 - R}{2R} + 1 < \frac{\hat{r}}{2R} + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, ввиду выбора $\hat{r}$, R , справедливы неравенства

$$L \leq \frac{\varepsilon_0 \hat{r}^2}{2} + \frac{1}{2} \leq \varepsilon_0 \hat{r}^2, \quad (3.8)$$

тогда $\Delta t \leq 8/\varepsilon_0 < T_0$. Согласно выбору $\hat{r}$, R , неравенства (3.7) вытекают теперь из следующей цепочки:

$$t_j \geq t_L = t_0 - \Delta t \geq T_0 > \frac{8}{\varepsilon_0} \geq \frac{1}{\varepsilon_0^2 \hat{r}^2} = R^2, \quad j = 1, \dots, L.$$

Выбор чисел $\hat{r}$, R обеспечивает вложения $B(\mathbf{w}_j, 2R) \subset \Omega_1^{\hat{r}}(f)$, $j = 1, \dots, L$. Запишем неравенство Гарнака (2.1)

$$u_K(t_j, \mathbf{v}_j) \leq H \min_{B(\mathbf{w}_j, R)} u_K(t_{j-1}, \mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, L, \quad K \geq \hat{r}. \quad (3.9)$$

Применяя неравенство (3.9) L раз, находим, что

$$u_K(t_L, (z_L, \mathbf{0}')) \leq H^L u_K(t_0, (2, \mathbf{0}')), \quad K \geq \hat{r}. \quad (3.10)$$

Согласно принципу максимума, условиям (1.2), (1.6), и соотношению (3.4) для любой точки $(t, \mathbf{x}) \in D^{T, z_L}$ при всех $K \geq \hat{r}$ выводим неравенства

$$0 \leq u_K(t, \mathbf{x}) \leq \max_{D^{T, z_L}(f)} u_K(t, \mathbf{x}) \leq u_K(t_L, (z_L, \mathbf{0}')).$$

Далее, применяя (3.10), (3.3), заключаем, что при $K \geq \hat{r}$

$$0 \leq u_K(t, \mathbf{x}) \leq H^L \leq \exp(L \ln H), \quad (t, \mathbf{x}) \in D^{T, \hat{r}-1}(f).$$

Используя (3.8), предельным переходом при $K \rightarrow \infty$ получаем оценку

$$0 \leq u(t, \mathbf{x}) \leq \exp(\varepsilon_0 \hat{r}^2 \ln H), \quad (t, \mathbf{x}) \in D^{T, \hat{r}-1}(f).$$

Делая замену $\hat{r} - 1 = r$, полагая $r_0 = \hat{r}_0 - 1$, перепишем ее в виде

$$0 \leq u(t, \mathbf{x}) \leq \exp\left(\frac{9}{4} \varepsilon_0 r^2 \ln H\right), \quad (t, \mathbf{x}) \in D^{T, r}(f), \quad r \geq r_0 > 2. \quad (3.11)$$

Из условия (1.10) в силу монотонности функции $h(x)$ для $r \geq 2$ справедливы неравенства

$$C_0 \geq \int_1^r \frac{dx}{h(x)} \geq \frac{r-1}{h(r)} \geq \frac{r}{2h(r)},$$

поэтому

$$r \leq 2C_0 h(r), \quad r \geq 2. \quad (3.12)$$

Следствием неравенств (3.11), (3.12) является оценка

$$u^2(t, \mathbf{x}) \leq \exp(9C_0 \varepsilon_0 r h(r) \ln H), \quad (t, \mathbf{x}) \in D^{T, r}(f), \quad r \geq r_0 > 2. \quad (3.13)$$

Очевидно, $\text{mes } \Omega(r) \leq C_1 r^n$ и найдется $R_1 > 2$ такое, что при $r \geq R_1$ в силу (3.12) верны неравенства

$$TC_1 r^n \leq \exp\left(\frac{\varepsilon_0}{2} r^2 \ln H\right) \leq \exp(\varepsilon_0 C_0 r h(r) \ln H). \quad (3.14)$$

Соединяя (3.13), (3.14), для $r \geq r_* = \max\{r_0, R_1\}$ выводим

$$\int_0^T \int_{\Omega(r)} u^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \leq T \operatorname{mes} \Omega(r) \max_{D^{T,r}} u^2(t, \mathbf{x}) \leq \exp(10C_0\varepsilon_0 rh(r) \ln H).$$

Согласно выбору ε_0 , получаем неравенство (1.7).

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову, А. К. Гушину за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Holmgren, “Sur les solutions quasi analytiques de l’équation de la chaleur”, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, **18**:9 (1924).
- [2] A. Tychonoff, “Théorèmes d’unicité pour l’équation de la chaleur”, *Матем. сб.*, **42**:2 (1935), 199–216.
- [3] S. Täcklind, “Sur les class quasianalytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique”, *Nova Acta Reg. Soc. Sci. Uppsal. Ser. 4*, **10**:3 (1936), 3–55.
- [4] О. А. Ладыженская, “О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **27**:2 (1950), 175–184.
- [5] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений”, *УМН*, **33**:5 (1978), 7–76.
- [6] А. Г. Гагидзе, “О единственности решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **13**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988, 123–126.
- [7] А. К. Гушин, “О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **119**:4 (1982), 451–508.
- [8] Ф. Х. Мукминов, “О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **181**:11 (1990), 1486–1509.
- [9] Л. М. Кожевникова, “Классы единственности решений первой смешанной задачи для уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях”, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 59–102.
- [10] J. Moser, “A Harnack inequality for parabolic differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**:1 (1964), 101–134.
- [11] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

Л. М. Кожевникова

Стерлитамакская государственная педагогическая академия
им. З. Бишевой
E-mail: kosul@mail.ru

Поступило

05.11.2009