Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников, В. Н. Чугунов, О функциях, порождающих нормальные теплицевы матрицы, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 503–507

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:26:45

О функциях, порождающих нормальные теплицевы матрицы

Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников, В. Н. Чугунов

Любой комплексной функции можно поставить в соответствие ряд Фурье, с которым часто связывают последовательность $\{T_n\}$ теплицевых $(n \times n)$ -матриц. В данной работе приводится классификация функций, ряд Фурье которых порождает последовательность нормальных теплицевых матриц, и описывается процедура построения ряда Фурье, для которого в последовательности $\{T_n\}$ найдется бесконечная подпоследовательность нормальных матриц.

Библиография: 3 названия.

1. Напомним, что любой комплексной периодической интегрируемой функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2)$$

С рядом (1) часто связывают последовательность $\{T_n\}$ теплицевых $(n \times n)$ -матриц, составленных из коэффициентов (2):

$$T_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{-n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Изучение спектральных характеристик последовательностей теплицевых матриц, начало которому было положено в классической работе Серё (см. [1]), и в настоящее время является активным полем для исследований. Хорошо известно, что собственные значения теплицевых матриц, порожденные гладкими функциями, становятся

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00115) и программы фундаментальных исследований отделения математических наук РАН “Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач” по проекту “Матричные методы и технологии для задач со сверхбольшим числом неизвестных”.

все более неустойчивыми с ростом размера матрицы. Поэтому несомненный интерес, как с теоретической, так и с практической точки зрения, представляет описание класса функций f , для которых спектральная задача для последовательности теплицевых матриц была бы хорошо поставлена. Это верно, например, для последовательности, составленной из нормальных матриц.

Описание нормальных теплицевых матриц имеет замечательно простой вид и дается следующей теоремой [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – комплексная матрица, одновременно нормальная и теплицева. Тогда справедливо хотя бы одно из двух утверждений:

- A – матрица вида $\alpha I + \beta H$, где α и β – комплексные числа, H – эрмитова теплицева матрица;
- A представляет собой ϕ -циркулянт для некоторого комплексного числа ϕ , по модулю равного единице, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \phi a_{n-1} & \phi a_{n-2} & \dots & \phi a_1 \\ a_1 & a_0 & \phi a_{n-1} & \dots & \phi a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \phi a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В данной работе в п. 2 мы укажем необходимые и достаточные условия на ряд (1), обеспечивающие нормальность всех матриц T_n , а в заключительном пункте опишем процедуру построения такого ряда Фурье, для которого в последовательности $\{T_n\}$ найдется бесконечная подпоследовательность нормальных матриц.

2. В этом пункте сначала докажем следующий критерий.

ТЕОРЕМА 2. Ряд (1) порождает последовательность нормальных теплицевых матриц тогда и только тогда, когда он является комплексным кратным ряда, удовлетворяющего соотношениям

$$a_{-k} = \bar{a}_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

или ряда вида

$$a_0 + b \left(\phi e^{-ix} + \psi e^{-i2x} + \sum_{k=-\infty}^{k=-3} (\bar{\phi}\psi)^{-k-2} \psi e^{ikx} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (\phi\bar{\psi})^{k-1} e^{ikx} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где b , ϕ и ψ – комплексные числа и $|\phi| = |\psi| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ряд (1) порождает последовательность нормальных теплицевых матриц. Так как умножение на комплексное число сохраняет свойство нормальности матрицы, то условия на ряд определяются с точностью до комплексного множителя.

Сначала покажем, что в последовательности $\{T_n\}$ все матрицы одновременно имеют либо тип а), либо тип б) из теоремы 1. При этом будем считать, что если матрица имеет тип а) и б) одновременно, то она является матрицей типа а). Предположим, что существуют матрицы T_k и T_l типа а) и б) соответственно. Если $k > l$, то из эрмитовости матрицы, получающейся из T_k обнулением главной диагонали,

следует, что и T_l имеет тип а). Значит, $k < l$ и найдется такое число m , что матрицы $T_1, T_2, \dots, T_m$ имеют тип а), а все остальные являются ϕ -циркулянтами. Рассмотрим T_m и T_{m+1} . Для них выполнены условия

$$\begin{aligned} a_{-j} &= \bar{a}_j, & j &= 1, 2, \dots, m-1, \\ a_{-j} &= \phi a_{m+1-j}, & j &= 1, 2, \dots, m, & |\phi| &= 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$a_{-m} = \phi a_1 = \phi \bar{a}_{-1} = \phi \bar{\phi} \bar{a}_m = |\phi|^2 \bar{a}_m = \bar{a}_m,$$

т.е. T_{m+1} имеет тип а). Значит, все матрицы имеют либо тип а), либо тип б).

Если в последовательности $\{T_n\}$ каждая матрица является линейным многочленом от эрмитовой матрицы, то исследуемый ряд должен удовлетворять условиям (5).

Теперь исследуем ситуацию, когда все матрицы T_n имеют тип б). Это означает, что каждая матрица T_n является ϕ_n -циркулянтom порядка n для некоторого комплексного числа ϕ_n с единичным модулем и справедливы соотношения

$$a_{-i} = \phi_n a_{n-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad n \geq 2. \quad (7)$$

Элемент a_1 должен быть отличен от нуля, так как в противном случае получаем, что $\{T_n\}$ – последовательность скалярных матриц и соответствующий ряд (1) состоит из одного члена a_0 , подчиняясь соотношениям (5). Обозначим $a_1 = b$ и рассмотрим (7) для $n = m$ и $i = n-1$

$$a_{-(m-1)} = \phi_m a_1 = \phi_m b \quad \text{для всех } m \geq 2. \quad (8)$$

При $m = 2$ имеем $a_{-1} = \phi_2 b$. С другой стороны соотношение (7) при $n = m$ и $i = 1$ имеет вид

$$a_{-1} = \phi_m a_{m-1} \quad \text{для всех } m \geq 2,$$

или

$$a_{m-1} = \bar{\phi}_m a_{-1} = \bar{\phi}_m \phi_2 b \quad \text{для всех } m \geq 2. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7), получим

$$\phi_{n-i+1} \phi_{i+1} = \phi_n \phi_2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad n \geq 2. \quad (10)$$

Из (10) для $n \geq 4$ можем вывести соотношения

$$\phi_n \phi_2 = \phi_{n-1} \phi_3 = (\bar{\phi}_2 \phi_3) \phi_{n-1} \phi_2,$$

из которого видна связь между числами ϕ_n

$$\phi_n = (\bar{\phi}_2 \phi_3)^{n-3} \phi_3 \quad \text{для всех } n \geq 4. \quad (11)$$

Несложно проверить, что подстановка (8), (9) и (11) в (7) дает тождественное равенство. Учитывая (8), (9), (11) и переопределяя $\phi_2 = \phi$, $\phi_3 = \psi$, получаем формулу (6) ряда (1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ряд (6) не может быть рядом Фурье никакой интегрируемой функции, так как его коэффициенты не стремятся к нулю при стремлении k к бесконечности.

Последнее замечание приводит к легко доказываемому следствию из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ. Ряд (1) интегрируемой функции $f(x)$ порождает последовательность нормальных матриц тогда и только тогда, когда $f(x)$ является комплексным кратным вещественной функции.

Рассмотрим частный случай ряда (6). При $\psi = \phi$ он имеет вид

$$a_0 + b \left(\phi \sum_{k=-\infty}^{k=-1} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{ikx} \right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

ЛЕММА. Ряд (12) получается формальным дифференцированием ряда Фурье периодически продолженной на всю числовую прямую с периодом 2π функции

$$g(x, \phi) = a_0 x + \frac{b(1-\phi)(\pi-x)}{2i} - b(1+\phi) \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, \quad x \in (0, 2\pi). \quad (13)$$

Утверждение леммы легко получить, обратившись к классическим источникам, например [3].

3. Теперь опишем один из способов построения ряда (1), порождающего такую последовательность $\{T_n\}$ теплицевых матриц (3), в которой найдется бесконечная подпоследовательность $\{T_{n_k}\}$ нормальных матриц. В такой подпоследовательности может присутствовать лишь конечное число матриц, являющихся линейными многочленами от эрмитовых матриц, в противном случае все матрицы из $\{T_n\}$ имеют тип а). Важно отметить, что множество рассматриваемых теперь рядов значительно шире тех, которым был посвящен предыдущий пункт. Однако и в этом случае среди абсолютно интегрируемых функций нам подходят лишь вещественные функции и комплексные их кратные.

При построении требуемого ряда будем считать, что в $\{T_{n_k}\}$ все матрицы имеют тип б). Возьмем любые две последовательности, подчиняющиеся следующим требованиям: элементами первой являются натуральные числа $\{n_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условию $n_{k+1} \geq 2n_k - 1$, которые будут определять порядки матриц, являющихся нормальными; вторую образуют комплексные числа $\{\phi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, с единичным модулем, задающие вид T_{n_k} как ϕ_k -циркулянта.

Сам алгоритм нахождения коэффициентов ряда (1) сформулируем в терминах вычисления элементов матриц $\{T_{n_k}\}$ по индукции. Базис индукции состоит в том, что в качестве матрицы T_{n_1} берем произвольный ϕ_1 -циркулянт порядка n_1 . Предположим теперь, что матрица T_{n_k} сконструирована. Достроим ее до $T_{n_{k+1}}$. Введем два числа

$$r_1 = \left\lceil \frac{n_{k+1} - 1}{2} \right\rceil - n_k, \quad r_2 = \left\lfloor \frac{n_{k+1} - 1}{2} \right\rfloor - n_k$$

и зададим произвольно комплексными числами коэффициенты (2) ряда Фурье

$$a_j, \quad j = n_k, n_k + 1, \dots, n_k + r_1, \quad \text{и} \quad a_{-j}, \quad j = n_k, n_k + 1, \dots, n_k + r_2.$$

Если положить

$$\begin{aligned} a_{-j} &= \phi_{n_{k+1}} a_{n-j}, & j &= n_k + r_2 + 1, \dots, n_{k+1} - 1, \\ a_j &= \bar{\phi}_{n_{k+1}} a_{-(n-j)}, & j &= n_k + r_1 + 1, \dots, n_{k+1} - 1, \end{aligned}$$

то получаем матрицу $T_{n_{k+1}}$ как $\phi_{n_{k+1}}$ -циркулянт, которая является нормальной матрицей по теореме 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] U. Grenander, G. Szegő, *Toeplitz Forms and their Applications*, California Monogr. in Math. Sci., Univ. of California Press, Berkeley, 1958.
- [2] Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, “Критерий нормальности комплексной теплицевой матрицы”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **36**:2 (1996), 3–10.
- [3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.

Н. Л. Замарашкин

Институт вычислительной математики РАН

E-mail: kolya@bach.inm.ras.ru

Поступило

17.11.2009

Исправленный вариант

08.04.2010

Е. Е. Тыртышников

Институт вычислительной математики РАН

E-mail: tee@bach.inm.ras.ru

В. Н. Чугунов

Институт вычислительной математики РАН

E-mail: vadim@bach.inm.ras.ru