Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бахвалов, Непрерывность по Λ -вариации и суммирование методами Чезаро кратных рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 483–500

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 07:52:51

Непрерывность по Λ -вариации и суммирование методами Чезаро кратных рядов Фурье

А. Н. Бахвалов

Построены новые примеры функций ограниченной Λ -вариации, не непрерывных по Λ -вариации. На основе этих примеров показано, что в задаче о суммируемости кратного ряда Фурье методом Чезаро отрицательного порядка условие непрерывности по Λ -вариации, в отличие от одномерного случая, существенно.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Начнем с обозначений. Через C будут обозначаться абсолютные постоянные, а через $C(\cdot)$ – величины, зависящие лишь от перечисленных в скобках параметров (не обязательно одинаковые в различных случаях). Положим $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Для двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ будем писать $a_n \sim b_n$, если существует конечный положительный предел отношения a_n/b_n при $n \rightarrow \infty$.

Все рассматриваемые промежутки предполагаются невырожденными. Для промежутка Δ на прямой через $\Omega(\Delta)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ таких, что $\overline{I_n} \subset \Delta$.

Пусть $I^k = (a^k, b^k)$. Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ положим $f(I^1) = f(b^1) - f(a^1)$; если для функции $m - 1$ переменных уже определено $f(I^1 \times \dots \times I^{m-1})$, то положим

$$f(I^1 \times \dots \times I^m) = f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, b^m) - f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, a^m).$$

Величина $f(I^1 \times \dots \times I^m)$ называется *смешанным приращением* f на I .

Пусть множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества γ и ξ из p и $m - p$ элементов соответственно. Будем обозначать $|\gamma| = p$, $|\xi| = m - p$. Если $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$, то через x^γ будем обозначать элемент $\mathbb{R}^p$, состоящий из компонент x^j , $j \in \gamma$, а для параллелепипеда $I = \bigotimes_{j=1}^m I^j$ через I^γ будем обозначать параллелепипед $\bigotimes_{j \in \gamma} I^j$. Через $f(I^\gamma, x^\xi)$ будем обозначать смешанное приращение f как функции аргументов x^j , $j \in \gamma$, на I^γ при фиксированных значениях x^k , $k \in \xi$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00175) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3252.2010.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ задает класс функций ограниченной Λ -вариации, если она не убывает и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

В дальнейшем мы рассматриваем только такие Λ , и множество последовательностей Λ , удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathbb{L}$. Частичные суммы $\sum_{n=1}^N (1/\lambda_n)$ обозначаются через $\Lambda(N)$. Положим также $H = \{n\}_{n=1}^{\infty}$. Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=n+1}^{\infty}$ будем обозначать через Λ_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$. Тогда $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных $x^1, \dots, x^m$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{\mathbf{x}}(f; \Delta) = \sup_{\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j)} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть непустое множество $\gamma \subset \{1, \dots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \dots < j_p$ и $\xi = \{1, \dots, m\} \setminus \gamma$. Через

$$V_{\Lambda^\gamma}^{x^\gamma}(f; \Delta^\gamma, x^\xi) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\gamma}(f; (\Delta^\gamma, x^\xi))$$

будем обозначать $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацию f как функции переменных $x^{j_1}, \dots, x^{j_p}$ по p -мерному параллелепипеду $\Delta^\gamma = \Delta^{j_1} \times \dots \times \Delta^{j_p}$ при фиксированных значениях x^ξ остальных переменных (если ξ непусто).

Далее, $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных x^γ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^\gamma}^{x^\gamma}(f; \Delta) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\gamma}(f; \Delta) = \sup_{x^\xi \in \Delta^\xi} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\gamma}(f; \Delta^\gamma, x^\xi).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) = \sum_{\substack{\gamma \subset \{1, \dots, m\} \\ \gamma \neq \emptyset}} V_{\Lambda^\gamma}^{x^\gamma}(f; \Delta)$$

называется (полной) $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$. Множество функций, для которых она конечна, называется классом $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -ограниченной вариации (классом Ватермана) и обозначается $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ называется непрерывной по $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации на промежутке Δ , если для любого непустого множества $\gamma = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, m\}$ и для любого $j_k \in \gamma$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_{k-1}}, \Lambda_n^{j_k}, \Lambda^{j_{k+1}}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\gamma}(f; \Delta) = 0.$$

Множество таких функций будем обозначать через $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$.

Если все последовательности Λ^j совпадают и равны Λ , то для краткости будем писать $V_{\Lambda}^{x^{\gamma}}$, V_{Λ} , $\Lambda BV(\Delta)$ и $CLV(\Delta)$. Величину V_H называют *гармонической вариацией*. Мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции измеримы.

Классы ΛBV были определены в одномерном случае Ватерманом [1], в двумерном – Саакяном [2], а для случая более высоких размерностей – Саблиным [3]. В этих работах, а также в работах автора (в частности, [4]) был установлен ряд результатов о сходимости тригонометрических рядов Фурье функций из этих классов. Понятие функции непрерывной по вариации было введено в одномерном случае Ватерманом [5], а в случае более высокой размерности – автором [4] и Драгошанским [6]. При этом Драгошанским были установлены для двумерного изотропного случая ($\Lambda^1 = \Lambda^2$) следующие утверждения.

ТЕОРЕМА А. Пусть последовательность $\Lambda \in \mathbb{L}$, стремящаяся к бесконечности, и число $\beta \in [0, 1)$ таковы, что справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} \leq 2^{\beta}$$

и, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

- а) $\beta \neq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} (1/\lambda_n)^{1/\beta} = A < \infty$;
- б) $\beta \leq 1/2$.

Тогда классы $\Lambda BV([0, 1]^2)$ и $CLV([0, 1]^2)$ не совпадают.

ТЕОРЕМА В. Пусть последовательность $\Lambda \in \mathbb{L}$ и число $\beta \in (1/2, 1]$ таковы, что справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} = 2^{\beta} \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i)^{1/\beta}} = \infty.$$

Тогда классы $\Lambda BV([0, 1]^2)$ и $CLV([0, 1]^2)$ совпадают.

В работе автора [4] была доказана

ТЕОРЕМА С. Пусть последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \frac{1}{\lambda_k^q} < \infty. \quad (1.1)$$

Тогда класс функций ограниченной $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации не совпадает с классом непрерывных по $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации функций.

В п. 2 настоящей работы на основе идей Драгошанского, использованных в теореме А, строятся две существенно более общих конструкции функций из заданных классов Ватермана. Первая из них (лемма 5) обобщает идею п. б) теоремы А на случай целого ряда как изотропных, так и анизотропных классов, для любой размерности $m \geq 2$. Вторая конструкция (лемма 6) обобщает на анизотропный случай идею из п. а).

В п. 3 эти конструкции прилагаются к двум задачам. Первая из них – проблема совпадения классов $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ и $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Лемма 5 дает обобщение п. б) теоремы А, состоящее в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m = 2$ и заданы неограниченные последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, причем при каждом j выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}^j}{\lambda_n^j} \leq 2^{\beta_j}, \quad (1.2)$$

где числа $\beta_j \in [0, 1)$ удовлетворяют неравенству $\sum_{j=1}^m \beta_j \leq m - 1$. Тогда в классе $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV([0, 1]^m)$ найдется непрерывная функция, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda_n^1, \dots, \Lambda_n^m}^{\mathbf{x}}(f; [0, 1]^m) > 0.$$

В частности, она не попадает в класс $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V([0, 1]^m)$.

На основе леммы 6 строится другой пример, обобщающий п. а) теоремы А.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m = 2$ и заданы неограниченные последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, причем существуют такие $\beta \in (0, 1)$ и $j, l \in \{1, \dots, m\}$, $l \neq j$, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}^j}{\lambda_n^j} \leq 2^\beta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^l} \right)^{1/\beta} < \infty. \quad (1.3)$$

Тогда в классе $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV([0, 1]^m)$ найдется непрерывная функция, не попадающая в класс $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V([0, 1]^m)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $m \geq 2$ и $b_j \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$, то для совпадения классов

$$(\{n^{b_1}\}, \dots, \{n^{b_m}\})BV([0, 1]^m) \quad \text{и} \quad C(\{n^{b_1}\}, \dots, \{n^{b_m}\})V([0, 1]^m)$$

необходимо и достаточно, чтобы $m = 2$ и $b_1 = b_2 > 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для последовательности $\Lambda^j = \{n^{b_j}\}$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}^j}{\lambda_n^j} = 2^{b_j}.$$

Если $b_l > b_j$ хотя бы для одной пары (j, l) , то выполнены условия (1.2) и по теореме 2 классы не совпадают. Пусть теперь $b_1 = \dots = b_m = b$. Если $b \leq 1 - 1/m$, то применима теорема 1 и классы не совпадают. Если $b > 1/(m - 1)$, то применима теорема С и классы не совпадают. Но при $m \geq 3$ выполнено неравенство $1/(m - 1) < 1 - 1/m$, т.е. три перечисленных выше случая охватывают все возможности. При $m = 2$ оставшийся случай $b_1 = b_2 > 1/2$ подходит под условия теоремы В, и в этом случае классы совпадают. Следствие доказано.

Вторая задача – о суммируемости рядов Фурье методами Чезаро отрицательного порядка. Напомним соответствующие определения (см., например, [7; т. 1, гл. 3, § 1]). Пусть задано $\alpha > -1$, а числа A_n^α определяются из формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = (1 - x)^{-\alpha-1}.$$

Тогда (C, α) -средними ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ называются величины

$$\sigma_n^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} u_k.$$

Как известно (см., например, [7; т. 1, гл. 3, (1.17)]), $A_n^\alpha \sim n^\alpha$.

Если в качестве ряда выступает ряд Фурье интегрируемой на $\mathbb{T}$ функции f в точке x , то эти величины обозначают через $\sigma_n^\alpha(f, x)$. Как показано в [7; т. 1, гл. 3, § 5], средние Чезаро ряда Фурье интегрируемой функции можно выразить формулой

$$\sigma_n^\alpha(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n^\alpha(t) dt,$$

где

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} D_k(t)$$

– ядро метода (C, α) . Это четная функция, и при $t > 0$ справедливо представление

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{A_n^\alpha} \frac{\sin[(n+1/2+\alpha/2)t - \pi\alpha/2]}{(2\sin(t/2))^{\alpha+1}} + \frac{2\theta\alpha}{n(2\sin(t/2))^2} = K_n^{\alpha,*}(t) + R_n^\alpha(t), \quad (1.4)$$

где $\theta = \theta(t, \alpha)$, $|\theta| < 1$. Ядра методов Чезаро при $|t| \leq \pi$ удовлетворяют оценкам

$$|K_n^\alpha(t)| \leq n+1 \leq 2n, \quad |K_n^\alpha(t)| \leq B(\alpha)n^{-\alpha}|t|^{-(\alpha+1)} \quad (1.5)$$

и также удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n^\alpha(t) dt = 1. \quad (1.6)$$

Многомерные определения выглядят следующим образом (см., например, [8; ч. 2, гл. 2]). Пусть задан вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_j > -1$. Тогда прямоугольными средними Чезаро порядка α называются величины

$$\sigma_n^\alpha(f, \mathbf{x}) = \left(\prod_{j=1}^m A_{n_j}^{\alpha_j} \right)^{-1} \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} \left(\prod_{j=1}^m A_{n_j-k_j}^{\alpha_j-1} \right) S_{\mathbf{k}}(f, \mathbf{x}),$$

где $S_{\mathbf{k}}(f, \mathbf{x})$ – прямоугольные суммы ряда Фурье. Кратные средние Чезаро можно также выразить через ядра Чезаро по формуле

$$\sigma_n^\alpha(f, \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \prod_{j=1}^m K_{n_j}^{\alpha_j}(t^j) dt.$$

Мы рассматриваем сходимость таких средних в смысле Прингсхейма, т.е. при независимом стремлении n_j к бесконечности.

Следующий результат был получен в одномерном случае Ватерманом [5], а в общем случае – автором [9].

ТЕОРЕМА D. Пусть $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда для любой функции $f \in (\{n^{\beta_1}\}, \dots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$ ее ряд Фурье равномерно (C, α) -ограничен. Если к тому же f непрерывна по $(\{n^{\beta_1}\}, \dots, \{n^{\beta_m}\})$ -вариации, то ее ряд Фурье (C, α) -суммируется к $f(\mathbf{x}_0)$ в каждой точке непрерывности $\mathbf{x}_0$ и суммируемость равномерна на любом компакте, в окрестности которого функция непрерывна.

Саблин [3] доказал, что в одномерном случае при $-1 < \alpha < 0$ всякая функция ограниченной $\{n^{\alpha+1}\}$ -вариации непрерывна по ней, так что соответствующее условие оказалось несущественным. Для $m \geq 2$ случаи, в которых совпадают классы $(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$ и $C(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})V(\mathbb{T}^2)$, описаны в теореме В и следствии 1, и для этих случаев условие непрерывности по вариации тоже несущественно.

Автором [9] было показано, что для размерности $m \geq 3$ при некоторых соотношениях на α_j условие непрерывности по вариации оказывается существенным для суммируемости и (в отличие от теорем о сходимости) даже для локализации средних. Точнее, имеет место следующая

ТЕОРЕМА E. Пусть $m = 2$, $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$, причем эти числа таковы, что при некотором $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено условие

$$\left(\sum_{j=1}^m \beta_j\right) - \beta_p > 1. \quad (1.7)$$

Тогда существует непрерывная функция f из класса $(\{n^{\beta_1}\}, \dots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$, равная тождественно нулю на $[-1, 1]^m$, ряд Фурье которой не (C, α) -суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.

В следующих двух теоремах найдены еще два соотношения на $\{\alpha_j\}$ с тем же свойством.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$, причем эти числа таковы, что $\sum_{k=1}^m \beta_k \leq m - 1$. Тогда существует непрерывная функция f из класса $(\{n^{\beta_1}\}, \dots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$, равная тождественно нулю вне $(\pi/2, \pi)^m$, ряд Фурье которой не (C, α) -суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, 2$, причем $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Тогда существует непрерывная функция f из класса $(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$, равная тождественно нулю на $[-1, 1]^2$, ряд Фурье которой не (C, α) -суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $m \geq 2$, $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$, причем эти числа таковы, что классы

$$(\{n^{b_1}\}, \dots, \{n^{b_m}\})BV(\Delta) \quad \text{и} \quad C(\{n^{b_1}\}, \dots, \{n^{b_m}\})V(\Delta)$$

не совпадают (см. выше следствие 1). Тогда существует непрерывная функция из класса $(\{n^{\beta_1}\}, \dots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$, равная тождественно нулю на $[-1, 1]^m$, ряд Фурье которой не (C, α) -суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если хотя бы для одной пары (j, l) выполнено условие $\beta_l > \beta_j$, то можно взять зависящую лишь от двух переменных функцию $g(\mathbf{x}) = f(x^l, x^j)$, где f из теоремы 4. Пусть теперь $\beta_1 = \dots = \beta_m = \beta$. Если $\beta \leq 1 - 1/m$, то пример построен в теореме 3. Если $b > 1/(m - 1)$, то применима теорема Е, поскольку условие (1.1) принимает вид $\sum_{q \neq p} \beta_q = (m - 1)\beta > 1$. Следствие доказано.

2. Конструкция функций. Нам понадобится следующее утверждение, принадлежащее Драгошанскому [6; лемма 2].

ЛЕММА 1. Пусть последовательность $\Lambda \in \mathbb{L}$ и число $\beta \in [0, 1)$ таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n} \leq 2^\beta.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое число $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon, \beta, \Lambda)$, что при любых натуральных N и M , $N \geq \tilde{N}$, $M \leq N$, справедливо неравенство

$$\frac{\Lambda(M)}{\Lambda(N)} \leq C(\beta) \left(\left(\frac{M}{N} \right)^{1-\beta} + \varepsilon \right).$$

ЛЕММА 2 [4; лемма 4]. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ на m -мерном параллелепипеде Δ удовлетворяет условию

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = W_m < \infty,$$

и для любого $j = 1, \dots, m$ найдется такая точка $x_0^j \in \Delta^j$, что $f \equiv 0$ при $x^j = x_0^j$. Тогда

$$f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta).$$

Пусть $\Delta = \bigotimes_{j=1}^m \Delta^j$ — замкнутый ограниченный промежуток. Всюду в этом пункте мы будем предполагать, что на Δ^j заданы последовательности непрерывных функций $\{r_n^j(t)\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющие следующим условиям:

- а) $r_n^j(t) = 0$ в концах промежутка Δ^j ;
- б) существует такая постоянная C_1 , что

$$\max_{\Delta^j} r_n^j - \min_{\Delta^j} r_n^j \leq C_1;$$

- в) существует такая постоянная C_2 , что

$$|r_n^j(x) - r_n^j(y)| \leq C_2 n |x - y|.$$

Обозначим через $\Omega(\Delta^j, \delta)$ совокупность всех систем из $\Omega(\Delta^j)$, в которых длина каждого интервала не превосходит числа $\delta > 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $\Delta = [0, 1]^m$ и заданы неограниченные последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$. Тогда существует положительная убывающая функция натурального аргумента $\psi(N)$, зависящая также от C_2 и Λ^j , обладающая следующими свойствами:

- и) $\psi(N) < 1/(2N)$;

ii) выполнена оценка

$$\sup_{\{I_k\} \in \Omega([0,1], \psi(N))} \frac{1}{\Lambda^j(2N)} \sum_k \frac{|r_N^j(I_k)|}{\lambda_k^j} \leq \frac{1}{2^N}, \quad j = 1, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что для любого j выполнено условие

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{\{I_k\} \in \Omega([0,1], \delta)} \sum_j \frac{|r_N^j(I_k)|}{\lambda_k^j} = 0. \quad (2.1)$$

Согласно условию с) имеет место оценка $|r_N^j(I)| \leq C_2 N |I|$. Поэтому

$$V = \sup_{\{I_k\} \in \Omega([0,1], \delta)} \sum_k \frac{|r_N^j(I_k)|}{\lambda_k^j} \leq C_2 N \sup_{\substack{\{a_k\}: \sum a_k \leq 1 \\ 0 \leq a_k \leq \delta}} \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k^j}.$$

Пусть $d = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Так как Λ^j – неубывающая последовательность, то точная верхняя грань достигается, когда $a_k = \delta$ при $k = 1, \dots, d$, $a_{d+1} = 1 - d\delta$, $a_k = 0$ при $k > d + 1$. Тогда

$$V \leq C_2 N \delta \Lambda^j(d + 1) \leq C_2 N \frac{1}{d} \Lambda^j(d + 1) \leq 2C_2 N \frac{\Lambda^j(d)}{d}.$$

Так как по условию $1/\lambda_k^j \rightarrow 0$, то $\Lambda^j(d) = o(d)$ при $d \rightarrow \infty$, откуда и следует (2.1). Теперь можно по индукции выбирать числа $\psi(N)$ настолько малыми, чтобы $0 < \psi(N) < \psi(N - 1)$ (при $N > 1$) и выполнялись условия i) и ii). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\Delta = [0, 1]^m$ и заданы неограниченные последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, удовлетворяющие условиям леммы 1. Тогда существует такая функция натурального аргумента $\Psi(N)$, зависящая также от Λ^k , C_1 и C_2 , что для любого $M \geq \Psi(N)$ и для функции ψ , определенной в лемме 3, выполнены условия

- iii) $1/(2M) \leq \psi(N)$;
- iv) $\Psi(N) \geq \tilde{N}(1/2^N, \beta_j, \Lambda^j)$ при $j = 1, \dots, m$, где $\tilde{N}$ определено в лемме 1;
- v) $\Lambda^j(2M) \geq 4\Lambda^j(2N)$ при каждом j ;
- vi) для любой системы $\{I_k\} \in \Omega([0, 1])$ и любого j справедлива оценка

$$\frac{1}{\Lambda^j(2M)} \sum_{k: |I_k| \geq \psi(N)} \frac{|r_M^j(I_k)|}{\lambda_k^j} < \frac{1}{2^N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если взять в качестве $\Psi(N)$ достаточно большое число, то условия iii), iv) и v) будут выполнены. Проверим, что можно так увеличить $\Psi(N)$, что vi) тоже будет иметь место. С одной стороны, для произвольного M имеем оценку $|r_M^j(I_k)| \leq C_1$. С другой стороны, число интервалов системы, для которых $|I_k| \geq \psi(N)$, не превосходит $\lfloor 1/\psi(N) \rfloor$. Тогда

$$\frac{1}{\Lambda^j(2M)} \sum_{k: |I_k| \geq \psi(N)} \frac{|r_M^j(I_k)|}{\lambda_k^j} \leq \frac{C_1 \Lambda^j(\lfloor 1/\psi(N) \rfloor)}{\Lambda^j(2M)},$$

где числитель последней дроби уже определен, а знаменатель можно сделать сколь угодно большим, увеличивая $\Psi(N)$, а вместе с ним и M . Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть заданы неограниченные последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, причем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}^j}{\lambda_n^j} \leq 2^{\beta_j},$$

где числа $\beta_j \in [0, 1)$ удовлетворяют неравенству $\sum_{j=1}^m \beta_j \leq m - 1$. Тогда для любой возрастающей последовательности $\{N_k\}$, удовлетворяющей условию $N_{k+1} \geq \Psi(N_k)$, где Ψ из леммы 4, функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^m r_{N_s}^j(x^j)}{\prod_{j=1}^m \Lambda^j(2N_s)}$$

непрерывна и принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – отображение промежутка Δ на промежуток $\tilde{\Delta}$, “составленное” из гомеоморфизмов соответствующих ребер. Тогда любой класс Ватермана инвариантен относительно τ . Поэтому без ограничения общности можно считать, например, что $\Delta = [0, 1]^m$. Также в силу линейности класса можно считать, что $C_1 = C_2 = 1$, иначе заменим функции $r_n^j(x)$ функциями $(1/\max\{C_1, C_2\})r_n^j(x)$.

В силу условия v) леммы 4 ряд, определяющий функцию f , сходится равномерно, поэтому она непрерывна. Согласно условию а) на функции r_n^j функция f равна нулю на границе куба $[0, 1]^m$, так что по лемме 2 достаточно оценить ее старшую компоненту вариации. Итак, пусть заданы системы $U^j = \{I_k^j\} \in \Omega([0, 1])$, а V – соответствующая им вариационная сумма. Тогда

$$V \leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{1}{\prod_{j=1}^m \Lambda^j(2N_s)} \frac{|r_{N_s}^1(I_{k_1}^1)| \cdots |r_{N_s}^m(I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \cdots \lambda_{k_m}^m} = \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m H_s^j, \quad (2.2)$$

где

$$H_s^j = \frac{1}{\Lambda^j(2N_s)} \sum_{k_j} \frac{|r_{N_s}^j(I_{k_j}^j)|}{\lambda_{k_j}^j}.$$

Оценим одну величину H_s^j . Пусть U_s^j – набор тех интервалов из U^j , для которых $\psi(N_s) < |I_k^j| < \psi(N_{s-1})$. Обозначим через L_s^j сумму длин интервалов из U_s^j . Поскольку интервалы попарно не пересекаются, то $\sum_s L_s^j \leq 1$. Имеем

$$H_s^j \leq \frac{1}{\Lambda^j(2N_s)} \left(\sum_{k: |I_k^j| \geq \psi(N_{s-1})} + \sum_{k: |I_k^j| \leq \psi(N_s)} + \sum_{k: I_k^j \in U_s^j} \right) \frac{|r_{N_s}^j(I_k^j)|}{\lambda_k^j} = \sum_{l=1}^3 H_s^j(l).$$

Так как $N_s \geq \Psi(N_{s-1})$, то в силу условия vi) из леммы 4 выполнена оценка

$$H_s^j(1) < \frac{1}{2N_s} \leq \frac{1}{2^s}.$$

В силу условия ii) из леммы 3 выполнены неравенства

$$H_s^j(2) < \frac{1}{2N_s} \leq \frac{1}{2^s}.$$

Оценим третью сумму. Поскольку $C_2 = 1$, то $|r_{N_s}^j(I_k^j)| \leq \min\{1, N_s |I_k^j|\}$. Тогда

$$\begin{aligned} H_s^j(3) &\leq \frac{1}{\Lambda^j(2N_s)} \sum_{k: I_k^j \in U_s^j} \frac{\min\{1, N_s |I_k^j|\}}{\lambda_k^j} \\ &\leq \frac{1}{\Lambda^j(2N_s)} \sup_{\substack{\{a_k\}: \\ a_k \geq 0}} \sum_{a_k \leq L_s^j} \frac{\min\{1, N_s a_k\}}{\lambda_k^j} \leq \frac{1}{\Lambda^j(2N_s)} \sup_{\substack{\{a_k\}: \\ 0 \leq a_k \leq 1/(N_s)}} \sum_k \frac{N_s a_k}{\lambda_k^j}. \end{aligned}$$

Рассуждая как в доказательстве леммы 3, получаем, что

$$H_s^j(3) \leq \frac{1}{\Lambda^j(2N_s)} \sum_{k=1}^{\lfloor N_s L_s^j \rfloor + 1} \frac{1}{\lambda_k^j} = \frac{\Lambda^j(\lfloor N_s L_s^j \rfloor + 1)}{\Lambda^j(2N_s)}.$$

С учетом леммы 1 и условия iv) леммы 4 имеем оценку

$$H_s^j(3) \leq C(\beta^j) \left(\left(\frac{\lfloor N_s L_s^j \rfloor + 1}{2N_s} \right)^{1-\beta^j} + \frac{1}{2^s} \right) \leq C(\beta^j) \left((L_s^j)^{1-\beta^j} + \frac{1}{2^s} \right).$$

Складывая, получаем

$$H_s^j \leq C(\beta^j) \left((L_s^j)^{1-\beta^j} + \frac{1}{2^s} \right) + \frac{1}{2^{s-1}} \leq C'(\beta^j) \left((L_s^j)^{1-\beta^j} + \frac{1}{2^s} \right). \quad (2.3)$$

Подстановка в (2.2) дает неравенство

$$V \leq C(\beta) \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m \left((L_s^j)^{1-\beta_j} + \frac{1}{2^s} \right).$$

Для следующей оценки нам понадобится обобщенное неравенство Гёльдера [10; § 2.8, теорема 12]: если $\sum_{j=1}^m (1/p_j) = 1$, то

$$\sum_{s=1}^{\infty} \prod_{j=1}^m A_s^j \leq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{s=1}^{\infty} (A_s^j)^{p_j} \right)^{1/p_j}. \quad (2.4)$$

Так как по условию теоремы $\sum_{j=1}^m \beta_j \leq m-1$, то $\sum_{j=1}^m (1-\beta_j) \geq 1$. Но $0 < 1-\beta_j \leq 1$ для каждого j . Поэтому найдутся такие $\{p_j\}$, $p_j > 1$, зависящие лишь от $\{\beta_j\}$, что $1-\beta_j \geq 1/p_j$, т.е. $\zeta_j = (1-\beta_j)p_j \geq 1$, и $\sum_{j=1}^m 1/p_j = 1$. Применяя (2.4) с этими параметрами, получим, что

$$V \leq C(\beta) \prod_{j=1}^m \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left((L_s^j)^{1-\beta_j} + \frac{1}{2^s} \right)^{p_j} \right)^{1/p_j} \leq 2C(\beta) \prod_{j=1}^m \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left((L_s^j)^{\zeta_j} + \frac{1}{2^{sp_j}} \right) \right)^{1/p_j}.$$

Здесь $\sum_s (1/2^{sp_j}) < 1$; с другой стороны, так как $L_s^j \geq 0$, $\sum_s L_s^j \leq 1$ и $\zeta_j \geq 1$, то $(L_s^j)^{\zeta_j} \leq L_s^j$, и окончательно получаем, что

$$V \leq 2C(\beta) \prod_{j=1}^m \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} L_s^j \right)^{1/p_j} \leq 4C(\beta).$$

Таким образом, вариационные суммы для старшей компоненты вариации функции f равномерно ограничены. Лемма доказана.

Для второй конструкции нам понадобится также последовательность $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ непрерывных функций с неперекрывающимися носителями $[a_k, b_k] \subset \Delta_1$, обладающих следующим свойством: в некоторой точке $c_k \in (a_k, b_k)$ функция q_k равна единице, а на $[a_k, c_k]$ и $[c_k, b_k]$ она не убывает и не возрастает соответственно.

ЛЕММА 6. Пусть заданы неограниченные последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, $j = 1, 2$, причем существует такое $\beta \in (0, 1)$, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n}^2}{\lambda_n^2} \leq 2^\beta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^1} \right)^{1/\beta} = A < \infty.$$

Тогда для любой последовательности $\{N_k\}$, удовлетворяющей условию $N_{k+1} \geq \Psi(N_k)$, где Ψ из леммы 4, функция

$$f(\mathbf{x}) = f(x^1, x^2) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_s(x^1) r_{N_s}^2(x^2)}{\Lambda^2(2N_s)}$$

непрерывна и принадлежит классу $(\Lambda^1, \Lambda^2)BV(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 5, можно взять, например, $\Delta = [0, 1]^2$ и положить $C_1 = C_2 = 1$. В силу условия v) леммы 4 ряд, определяющий функцию f , сходится равномерно, поэтому она непрерывна. Согласно условиям на функции q_n и r_n^2 функция f равна нулю на границе куба $[0, 1]^2$, так что по лемме 2 достаточно оценить ее старшую компоненту вариации. Итак, пусть заданы системы $U^j = \{I_k^j\} \in \Omega([0, 1])$, $j = 1, 2$. Рассмотрим вариационную сумму V ; тогда

$$V = \sum_{k_1, k_2} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times I_{k_2}^2)|}{\lambda_{k_1}^1 \lambda_{k_2}^2} \leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k_1, k_2} \frac{1}{\Lambda^2(2N_s)} \frac{|q_s(I_{k_1}^1)| \cdot |r_{N_s}^2(I_{k_2}^2)|}{\lambda_{k_1}^1 \lambda_{k_2}^2} = \sum_{s=1}^{\infty} G_s H_s, \quad (2.5)$$

где

$$H_s = \frac{1}{\Lambda^2(2N_s)} \sum_{k_2} \frac{|r_{N_s}^2(I_{k_2}^2)|}{\lambda_{k_2}^2}, \quad G_s = \sum_{k_1} \frac{|q_s(I_{k_1}^1)|}{\lambda_{k_1}^1}.$$

Пусть U_s – набор тех интервалов из U^2 , для которых $\psi(N_s) < |I_k^2| < \psi(N_{s-1})$. Обозначим через L_s сумму длин интервалов из U_s . Поскольку интервалы попарно не пересекаются, то $\sum_s L_s \leq 1$. Аналогично оценке (2.3) получаем, что

$$H_s \leq C(\beta) \left((L_s)^{1-\beta} + \frac{1}{2^s} \right).$$

Оценим теперь G_s . Пусть $V_s = \{k_1 : I_{k_1}^1 \cap (a_s, b_s) \neq \emptyset\}$ (напоминаем, что $[a_s, b_s]$ – носитель функции q_s), а $k(s)$ – наименьший элемент V_s . Тогда, обозначая через $V(q_s; [0, 1])$ обычную вариацию функции на отрезке, имеем

$$G_s = \sum_{k_1 \in V_s} \frac{|q_s(I_{k_1}^1)|}{\lambda_{k_1}^1} \leq \frac{1}{\lambda_{k(s)}^1} \sum_{k_1 \in V(s)} |q_s(I_{k_1}^1)| \leq \frac{V(q_s; [0, 1])}{\lambda_{k(s)}^1} = \frac{2}{\lambda_{k(s)}^1}.$$

Подставляя в (2.5), получаем, что

$$V \leq C(\beta) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{k(s)}^1} \left(L_s^{1-\beta} + \frac{1}{2^s} \right) \leq C(\beta) + C(\beta) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{L_s^{1-\beta}}{\lambda_{k(s)}^1}.$$

Заметим, что для любого номера k как правый, так и левый конец I_k^1 может принадлежать не более чем одному интервалу (a_s, b_s) . Поэтому в последовательности $\{k(s)\}_{s=1}^\infty$ каждый номер k может встречаться не более чем для двух s с ненулевым G_s . Тогда справедлива оценка

$$V_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{L_s^{1-\beta}}{\lambda_{k(s)}^1} \leq 2 \sup_{\substack{\{l_k\}: l_k \geq 0 \\ \sum l_k \leq 1}} \frac{l_k^{1-\beta}}{\lambda_k^1}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с $p = 1/(1 - \beta)$, $q = 1/\beta$, получаем, что

$$V_0 \leq 2 \sup_{\substack{\{l_k\}: l_k \geq 0 \\ \sum l_k \leq 1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} l_k \right)^{1-\beta} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^1} \right)^{1/\beta} \right)^\beta \leq 2A^\beta.$$

Тогда и величина V ограничена равномерно по $\Omega([0, 1])$. Теорема доказана.

3. Приложения к построению примеров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $r(x)$ – 1-периодическая функция, линейная на $[0, 1/2]$ и на $[1/2, 1]$, равная нулю в точках 0 и 1 и единице в точке $1/2$. Положим

$$r_n^j(x) = r_n(x) = r(nx).$$

Последовательность $\{N_s\}$ зададим условиями $N_1 = 1$, $N_s = \Psi(N_{s-1})$, где функция Ψ из леммы 4. Функция $f(x)$ с этими параметрами, определенная в лемме 5, по этой лемме непрерывна и принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV([0, 1]^m)$.

Зафиксируем теперь натуральное число N и оценим снизу $(\Lambda_N^1, \dots, \Lambda_N^m)$ -вариацию функции f . Возьмем число p , для которого $N_p > N$, и пусть

$$I_{p,k}^j = \left(\frac{k-1}{2N_p}, \frac{k}{2N_p} \right)$$

независимо от j для $k = N+1, \dots, 2N_p$. Тогда

$$\{I_{p,k}^j\}_{k=N+1}^{2N_p} \in \Omega([0, 1]),$$

и им соответствуют вариационные суммы

$$\begin{aligned} W(p) &= \sum_{k_1=N+1}^{2N_p} \dots \sum_{k_m=N+1}^{2N_p} \frac{|f(I_{k_1,p}^1 \times \dots \times I_{k_m,p}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m} \\ &\geq \sum_{k_1=N+1}^{2N_p} \dots \sum_{k_m=N+1}^{2N_p} \frac{|r_{N_p}(I_{k_1,p}^1)| \dots |r_{N_p}(I_{k_m,p}^m)|}{\Lambda^1(2N_p) \dots \Lambda^m(2N_p) \lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m} \\ &\quad - \sum_{s \geq 1, s \neq p} \left(\sum_{k_1=N+1}^{2N_p} \dots \sum_{k_m=N+1}^{2N_p} \frac{|r_{N_s}(I_{k_1,p}^1)| \dots |r_{N_s}(I_{k_m,p}^m)|}{\Lambda^1(2N_s) \dots \Lambda^m(2N_s) \lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $|I_{k,p}^j| = 1/(2N_p)$. Условие i) леммы 3 и условие iii) леммы 4 гарантируют, что $1/(2N_p) \notin (\psi(N_s), \psi(N_{s-1}))$ при $s \neq p$, а тогда в силу условия ii) леммы 3

при $s < p$ и условия vi) леммы 4 при $s > p$ выполняется оценка

$$\sum_{k_j=N+1}^{2N_p} \frac{|r_{N_s}(I_{k_j,p}^j)|}{\Lambda^j(2N_s)\lambda_{k_j}^j} \leq \frac{1}{2^s}.$$

Учитывая, что $|r_{N_p}(I_{k_j,p}^j)| = 1$, получаем неравенство

$$W(p) \geq \prod_{j=1}^m \frac{\sum_{k_j=N+1}^{2N_p} (1/\lambda_{k_j}^j)}{\Lambda^j(2N_p)} - \sum_{s \geq 1, s \neq p} \frac{1}{(2^s)^m} \geq \left(\prod_{j=1}^m \frac{\Lambda^j(2N_p) - \Lambda^j(N)}{\Lambda^j(2N_p)} \right) - \frac{1}{2}.$$

Поскольку N фиксировано, то при увеличении p каждый сомножитель стремится к единице. Тогда при достаточно больших p получаем оценку $W(p) \geq 1/4$. Как следствие, для любого N

$$V_{\Lambda_N^1, \dots, \Lambda_N^m}(f; [0, 1]^m) > \frac{1}{4}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из соображений симметрии мы можем считать, что $l = 1, j = 2$. Пусть $r(x)$ – 1-периодическая функция, линейная на $[0, 1/2]$ и на $[1/2, 1]$, равная нулю в точках 0 и 1 и единице в точке $1/2$. Положим

$$r_n^2(x) = r(nx).$$

Далее, возьмем последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $a + 0 = 1$, $a_n \downarrow 0$, положим $b_n = a_{n-1}$, $n \geq 1$, и $c_n = (a_n + b_n)/2$. Функции $q_n(x)$ возьмем равными нулю вне (a_n, b_n) , единице в точке c_n и линейными на отрезках $[a_n, c_n]$ и $[c_n, b_n]$. Последовательность $\{N_s\}$ зададим условиями $N_1 = 1$, $N_s = \Psi(N_{s-1})$, где функция Ψ из леммы 4. Функция $f(x^1, x^2)$ с этими параметрами, определенная в лемме 6, по этой лемме непрерывна и принадлежит классу $(\Lambda^1, \Lambda^2)BV([0, 1]^2)$. Тогда функция $g(\mathbf{x}) = f(x^1, x^2)$ непрерывна и принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV([0, 1]^m)$. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x^j, j \neq 2} V_{\Lambda_n^2}^{x^2}(g; [0, 1], \{x^j\}_{j \neq 2}) > 0;$$

отсюда по определению следует, что функция не является непрерывной по вариации. Зафиксируем n , возьмем любое $N_s > n$, $x^1 = c_s$, а при $m \geq 3$ еще и $x^3 = \dots = x^m = 0$ (функция g от них не зависит) и систему интервалов

$$\{I_{s,j}^2\} = \left\{ \left(\frac{j-1}{2N_s}, \frac{j}{2N_s} \right) \right\}_{j=1}^{2N_s}.$$

Тогда, учитывая, что $q_l(c_s) = 0$ при $l \neq s$, $q_s(c_s) = 1$ и $|r_{N_s}(I_{s,j}^2)| = 1$, получаем, что

$$\begin{aligned} \sup_{x^j, j \neq 2} V_{\Lambda_n^2}^{x^2}(g; [0, 1], \{x^j\}_{j \neq 2}) &\geq V_{\Lambda_n^2}^{x^2}(f; [0, 1], c_s) \geq \sum_{j=1}^{2N_s} \frac{|f(c_s, I_{s,j}^2)|}{\lambda_{n+j}^2} \\ &\geq \frac{1}{\Lambda^2(2N_s)} \sum_{j=1}^{2N_s} \frac{1}{\lambda_{n+j}^2} > \frac{\Lambda^2(2N_s) - \Lambda^2(n)}{\Lambda^2(2N_s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Итак, для любого n имеет место оценка

$$\sup_{x^j, j \neq 2} V_{\Lambda_n^2}^{x^2}(g; [0, 1], \{x^j\}_{j \neq 2}) \geq 1.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим $\Lambda^j = \{n^{\beta_j}\}$. Обозначим через u_n^j и v_n^j первый и последний нули функции

$$\sin \left[\left(n + \frac{\alpha_j + 1}{2} \right) t - \frac{\pi \alpha_j}{2} \right]$$

на отрезке $[\pi/2, \pi]$. Определим функции

$$r_n^j(t) = \sin \left[\left(n + \frac{\alpha_j + 1}{2} \right) t - \frac{\pi \alpha_j}{2} \right] \cdot \chi_{[u_n^j, v_n^j]}(t).$$

Нетрудно видеть, что применима лемма 5 с $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ и β_j из определения Λ^j , и при достаточно быстро растущих $\{\Lambda_s\}$ функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^m r_{N_s}^j(x^j)}{\prod_{j=1}^m \Lambda^j(2N_s)}$$

принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$. При этом $\Lambda^j(n) \sim n^{-\alpha_j}$. Оценим средние Чезаро функции f в нуле. В силу равномерной сходимости определяющего ее ряда

$$\sigma_{\mathbf{n}}^{\alpha}(f, \mathbf{0}) = \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_{\mathbf{n}}^{\alpha}(f_s, \mathbf{0}).$$

Прежде всего, оценим $\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, \mathbf{0})$. Согласно (1.4) имеем

$$\begin{aligned} & \sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, \mathbf{0}) \\ &= \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\pi \Lambda^j(2N_p) A_{N_p}^{\alpha_j}} \int_{u_{N_p}^j}^{v_{N_p}^j} \frac{\sin^2[(N_p + (\alpha_j + 1)/2)t^j - \pi \alpha_j/2]}{(2 \sin(t^j/2))^{\alpha_j+1}} dt^j \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\alpha_j}{\pi \Lambda^j(2N_p) N_p} \int_{u_{N_p}^j}^{v_{N_p}^j} \frac{\sin[(N_p + (\alpha_j + 1)/2)t^j - \pi \alpha_j/2]}{(2 \sin(t^j/2))^2} \theta(t^j, \alpha_j) dt^j \right). \end{aligned}$$

В каждом сомножителе второе слагаемое стремится к нулю с ростом N_p , что сразу видно, поскольку подынтегральные функции равномерно ограничены на $[\pi/2, \pi]$, а $\Lambda^j(2N_p)N_p \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$. В первом слагаемом

$$\begin{aligned} & \int_{u_{N_p}^j}^{v_{N_p}^j} \frac{\sin^2[(N_p + (\alpha_j + 1)/2)t^j - \pi \alpha_j/2]}{(2 \sin(t^j/2))^{\alpha_j+1}} dt^j \\ &= \frac{1}{2} \int_{u_{N_p}^j}^{v_{N_p}^j} \frac{dt^j}{(2 \sin(t^j/2))^{\alpha_j+1}} - \frac{1}{2} \int_{u_{N_p}^j}^{v_{N_p}^j} \frac{\cos[2(N_p + (\alpha_j + 1)/2)t^j - \pi \alpha_j]}{(2 \sin(t^j/2))^{\alpha_j+1}} dt^j, \end{aligned}$$

где последний интеграл стремится к нулю по теореме о среднем, а

$$\int_{u_{N_p}^j}^{v_{N_p}^j} \frac{dt^j}{(2 \sin(t^j/2))^{\alpha_j+1}} \geq \int_{u_{N_p}^j}^{v_{N_p}^j} \frac{dt^j}{(t^j)^{\alpha_j+1}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt^j}{(t^j)^{\alpha_j+1}}.$$

Учитывая асимптотику

$$\Lambda^j(2N_p)A_{N_p}^{\alpha_j} = \left(\sum_{k=1}^{2N_p} \frac{1}{k^{\alpha_j+1}} \right) A_{N_p}^{\alpha_j} \sim (2N_p)^{-\alpha_j} (N_p)^{\alpha_j},$$

получаем, что существует величина $c_0 = c_0(m, \alpha) > 0$, для которой $\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, \mathbf{0}) \geq c_0$ при достаточно больших N_p .

Пусть теперь $s > p$. Тогда, пользуясь второй из оценок (1.5), находим, что

$$|\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_s, \mathbf{0})| \leq \prod_{j=1}^m \left| \frac{1}{\Lambda^j(2N_s)} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{B(\alpha_j) dt^j}{(N_p)^{\alpha_j} (t^j)^{\alpha_j+1}} \right| \leq C_3(\alpha) \prod_{j=1}^m \left(\frac{N_s}{N_p} \right)^{\alpha_j}. \quad (3.1)$$

Уточним теперь по индукции последовательность $\{N_s\}$. Возьмем $N_1 = 10$. Пусть $\{N_s\}_{s=1}^{p-1}$ уже выбраны. Рассмотрим функцию

$$g_p(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{p-1} f_s(\mathbf{x}).$$

Так как g_p принадлежит более узким классам Ватермана (и даже классу ограниченной вариации в смысле Харди), то к ней применима теорема D, и $\sigma_{\mathbf{n}}^{\alpha}(g_p, \mathbf{0}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{n} \rightarrow \infty$. Поэтому можно выбрать $N_p \geq \Psi(N_{p-1})$ столь большим, что

$$|\sigma_n^{\alpha}(g_p, \mathbf{0})| < \frac{c_0}{4} \quad \text{при } n \geq N_p.$$

Кроме того, при необходимости еще увеличим N_p так, чтобы при всех $s < p$ выполнялось неравенство

$$\left(\frac{N_p}{N_s} \right)^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} \leq \frac{c_0}{4C_3(\alpha)2^{p-s}},$$

где $C_3(\alpha)$ из оценки (3.1). Теперь для построенной последовательности $\{N_s\}$ имеем

$$\begin{aligned} |\sigma_{N_p}^{\alpha}(f, \mathbf{0})| &\geq \sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, \mathbf{0}) - |\sigma_{N_p}^{\alpha}(g_p, \mathbf{0})| - \sum_{s=p+1}^{\infty} |\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_s, \mathbf{0})| \\ &\geq c_0 - \frac{c_0}{4} - C_3(\alpha) \sum_{s=p+1}^{\infty} \left(\frac{N_s}{N_p} \right)^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} \geq \frac{3c_0}{4} - \frac{c_0}{4} \sum_{s=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s-p}} = \frac{c_0}{2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть заданы числа

$$\alpha_j \in (-1, 0) \quad \text{и} \quad \beta_j = \alpha_j + 1, \quad j = 1, 2,$$

удовлетворяющие условиям теоремы. Обозначим $\Lambda^j = \{n^{\beta_j}\}$, $j = 1, 2$. Так как $\Lambda^1(2N_s) \sim (2N_s)^{-\alpha_1}$, $A_{N_s}^{\alpha_1} \sim (N_s)^{\alpha_1}$, то найдется такое положительное ρ_1 , что выполнено $\Lambda^1(2N_s)A_{N_s}^{\alpha_1} \leq \rho_1$ при достаточно больших N_s . Обозначим

$$\rho = \frac{1}{16\pi\rho_1} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{(t)^{\beta_1}}.$$

Пусть $\{N_k\}$ – строго возрастающая последовательность положительных чисел, которую мы определим ниже по индукции, вместе с последовательностями $\{c_k\}$, $\{d_k\}$ и $\{\delta_k\}$. Положим

$$\nu_{j,k} = N_k + \frac{1 + \alpha_j}{2}.$$

Числа a_k и b_k определим как первый и последний нули функции $\sin(\nu_{1,k}t - \pi\alpha_1/2)$ на отрезке $[\pi/2, \pi]$. Положим

$$r_k(t) = \chi_{[a_k, b_k]}(t) \cdot \sin\left(\nu_{1,k}t - \frac{\pi\alpha_1}{2}\right).$$

Возьмем $N_1 = 10$, $c_1 = 1/4$, $d_1 = 1/2$, $\delta_1 = 1/2$. За $q_1(t)$ возьмем функцию, равную нулю вне $[1/4, 1/2]$, единице в точке $3/8$ и кусочно-линейную на отрезках $[1/4, 3/8]$ и $[3/8, 1/2]$.

Пусть N_k , c_k , d_k и δ_k уже определены при $k < s$. Введем функции

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{f_k(x^1)q_k(x^2)}{\Lambda^1(2N_k)}, \quad g_s(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{s-1} \varphi_k(\mathbf{x}).$$

Так как g_s принадлежит более узким классам Ватермана (и даже классу ограниченной вариации в смысле Харди), то к ней применима теорема D, и $\sigma_{\mathbf{n}}^{\alpha}(g_s, \mathbf{0}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{n} \rightarrow \infty$. Поэтому найдется такое $M_{s,1}$, что при любом $n > M_{s,1}$ выполнена оценка $|\sigma_n^{\alpha}(g_s, \mathbf{0})| < \rho/4$. Далее, возьмем $\delta_s = \min\{\delta_{s-1}/2, c_{s-1}\}$. Заметим, что в силу (1.6) и второй из оценок (1.5) найдется такое $M_{s,2}$, что при всех $n > M_{s,2}$ выполняются оценки

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta_s} K_n^{\alpha_2}(t) dt > \frac{5}{12}.$$

Зафиксируем теперь число $N_s > \max\{M_{s,1}, M_{s,2}, \Psi(N_{s-1})\}$, столь большое, что

$$\frac{2(N_{s-1})\delta_s}{\pi\Lambda^1(2N_s)(N_{s-1})^{\alpha_1}} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{B(\alpha_1)}{(t)^{\beta_1}} dt \leq \frac{\rho}{8}, \quad (3.2)$$

где $B(\alpha_1)$ – константа во втором из неравенств (1.5). Тогда по свойствам интеграла Лебега можно выбрать точки c_s и d_s , для которых $[c_s, d_s] \subset (0, \delta_s)$ и

$$\frac{1}{\pi} \int_{c_s}^{d_s} K_{N_s}^{\alpha_2}(t) dt > \frac{1}{3},$$

а затем такую непрерывную функцию q_s с носителем на $[c_s, d_s]$, удовлетворяющую условиям, сформулированным в п. 2 перед леммой 6, что

$$\sigma_{N_s}^{\alpha_2}(q_s, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{c_s}^{d_s} q_s(t) K_{N_s}^{\alpha_2}(t) dt > \frac{1}{4}. \quad (3.3)$$

Тогда по лемме 6 функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

непрерывна и принадлежит классу $(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$.

Оценим теперь ее чезаровские средние. Прежде всего, с учетом (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{N_s}^{\alpha_1} \left(\frac{r_{N_s}}{\Lambda^1(2N_s)}, 0 \right) &= \frac{1}{\pi \Lambda^1(2N_s)} \int_{a_s}^{b_s} \sin \left(\nu_{1,s} t - \frac{\pi \alpha_1}{2} \right) K_{N_s}^{\alpha_1}(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi \Lambda^1(2N_s) A_{N_s}^{\alpha_1}} \int_{a_s}^{b_s} \frac{\sin^2(\nu_{1,s} t - \pi \alpha_1/2)}{(2 \sin(t/2))^{\alpha_1+1}} dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi \Lambda^1(2N_s)} \int_{a_s}^{b_s} \sin \left(\nu_{1,s} t - \frac{\pi \alpha_1}{2} \right) R_{N_s}^{\alpha_1}(t) dt = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$J_1 > \frac{1}{\rho_1 \pi} \int_{a_s}^{b_s} \frac{\sin^2(\nu_{1,s} t - \pi \alpha_1/2)}{t^{\alpha_1+1}} dt = \frac{1}{2\pi \rho_1} \int_{a_s}^{b_s} \frac{dt}{(t)^{\alpha_1+1}} - \frac{1}{2\pi} \int_{a_s}^{b_s} \frac{\cos(2\nu_{1,s} t - \pi \alpha_1)}{(t)^{\alpha_1+1}} dt,$$

где при увеличении s первый интеграл стремится к 8ρ , а второй (по теореме о среднем) — к нулю. С другой стороны,

$$|J_2| \leq \frac{1}{\pi N_s \Lambda^1(2N_s)} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{(2 \sin(t/2))^2} \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$. Таким образом, $\sigma_{N_s}^{\alpha_1}(f_s, 0) > 4\rho$ при достаточно больших s . Вместе с (3.3) это дает при достаточно больших s оценку $|\sigma_{N_s}^{\alpha}(\varphi_s, \mathbf{0})| > \rho$. Пусть теперь $k > s$. Тогда вторая из оценок (1.5) дает неравенство

$$\left| \sigma_{N_s}^{\alpha_1} \left(\frac{r_{N_k}}{\Lambda^1(2N_k)}, 0 \right) \right| \leq \frac{1}{\Lambda^1(2N_k)(N_s)^{\alpha_1}} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{B(\alpha_1)}{(t)^{\beta_1}} dt.$$

Далее, с учетом первой из оценок (1.5) получаем, что

$$|\sigma_{N_s}^{\alpha_2}(q_k, 0)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{c_k}^{d_k} K_{N_s}^{\alpha_2}(t) dt \right| \leq \frac{2}{\pi} N_s(d_k - c_k) \leq \frac{2}{\pi} N_s \delta_k.$$

Соединяя эти оценки, получаем с учетом (3.2) и условий на выбор δ_k , что при $k > s$ имеет место неравенство

$$|\sigma_{N_s}^{\alpha}(\varphi_k, \mathbf{0})| \leq \frac{\rho}{8} \cdot \frac{\delta_k}{\delta_{s+1}} \leq \frac{\rho}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^{(k-s-1)}.$$

Учитывая, что ряд (3.4) сходится равномерно на $\mathbb{T}^2$, получаем окончательно, что

$$\begin{aligned} |\sigma_{N_s}^{\alpha}(f, \mathbf{0})| &\geq |\sigma_{N_s}^{\alpha}(\varphi_s, \mathbf{0})| - |\sigma_{N_s}^{\alpha}(g_s, \mathbf{0})| - \sum_{k=s+1}^{\infty} |\sigma_{N_s}^{\alpha}(\varphi_k, \mathbf{0})| \\ &\geq \rho - \frac{\rho}{4} - \frac{\rho}{8} \sum_{k=s+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{(k-s-1)} \geq \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Автор благодарен профессору М. И. Дьяченко за обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of bounded generalized variation", *Studia Math.*, **44**:1 (1972), 107–117.
- [2] А. А. Саакян, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **21**:6 (1986), 517–529.
- [3] А. И. Саблин, "Λ-вариация и ряды Фурье", *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 10, 66–68.
- [4] А. Н. Бахвалов, "Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье", *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 3–20.
- [5] D. Waterman, "On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation", *Studia Math.*, **55**:1 (1976), 87–95.
- [6] О. С. Драгошанский, "Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных", *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 57–82.
- [7] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965.
- [8] Л. В. Жижиашвили, *Некоторые вопросы теории тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных*, Изд-во Тбилисск. ун-та, Тбилиси, 1993.
- [9] А. Н. Бахвалов, "О суммировании рядов Фурье функций из многомерных классов ограниченной Λ-вариации", *Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"*, Изд-во ТулГУ, Тула, 2009, 13–16.
- [10] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

А. Н. Бахвалов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: anbakh@rol.ru

Поступило

25.11.2009