Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, Е. А. Олин, Глобальное строение локально выпуклых гиперповерхностей в многообразиях Финслера–Адамара, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 163–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 10:57:27

Глобальное строение локально выпуклых гиперповерхностей в многообразиях Финслера–Адамара

А. А. Борисенко, Е. А. Олин

Рассматриваются локально выпуклые компактные погруженные гиперповерхности в пространстве Финслера–Адамара с ограниченной T -кривизной. Доказывается, что при определенных ограничениях на нормальную кривизну такие гиперповерхности являются выпуклыми, вложенными, гомеоморфными сфере. Для этого доказывается обобщение теоремы Рауха для экспоненциального отображения относительно гиперповерхности и показывается выпуклость параллельных гиперповерхностей.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пусть M есть полное финслерово многообразие. Тогда

- 1) множество A называется *выпуклым*, если каждая кратчайшая с концами в A содержится в A ;
- 2) множество A называется *локально выпуклым*, если каждая точка $P \in A$ имеет окрестность U_P такую, что $A \cap U_P$ выпукло.

Адамар доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА [1]. Пусть φ – погружение компактного ориентированного n -мерного многообразия M в евклидово пространство E^{n+1} , $n \geq 2$, со всюду положительной гауссовой кривизной. Тогда $\varphi(M)$ есть выпуклая гиперповерхность.

Чжень и Лашоф обобщили эту теорему на случай знакоопределенной гауссовой кривизны [1]. Для погружения φ компактного ориентированного n -мерного многообразия M в евклидово пространство E^{n+1} они показали эквивалентность следующих утверждений:

- 1) степень сферического отображения равна ± 1 , и гауссова кривизна не меняет знака;
- 2) $\varphi(M)$ есть выпуклая гиперповерхность.

Топологическое погружение $f: N^n \rightarrow M^{n+1}$ многообразия N^n в многообразие M^{n+1} называется *локально выпуклым* в точке $x \in N^n$, если у x есть окрестность U такая, что $f(U)$ является частью границы выпуклого множества в M^{n+1} .

Ван Хейенорт доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА [2]. Пусть $f: N^n \rightarrow E^{n+1}$, $n \geq 2$, есть топологическое погружение связного многообразия N^n . Если f локально выпукло во всех точках и имеет хотя

бы одну точку локальной строгой опорности, а N^n полно в индуцированной этим погружением метрике, то f есть вложение, а $f(N^n)$ – граница выпуклого тела.

Александр [3] (см. также Борисенко [4]) обобщила эту теорему для компактного случая, когда объемлющим пространством является полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны (многообразие Адамара).

ТЕОРЕМА [3], [4]. Пусть $f: N^n \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, есть погружение компактного связного многообразия N^n в полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны M^{n+1} . Если f локально выпукло, то f есть вложение, а $f(N^n)$ – граница выпуклого тела, гомеоморфная сфере S^n .

Целью данной работы является обобщение этой теоремы на случай погружения компактного многообразия в полное односвязное финслерово многообразие неположительной кривизны. Будем называть такие многообразия *многообразиями Финслера–Адамара*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: N \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, есть погружение класса гладкости C^3 компактной гиперповерхности N в полное односвязное финслерово многообразие M^{n+1} . Пусть N и M^{n+1} удовлетворяют следующим условиям:

- 1) флаговая кривизна M^{n+1} удовлетворяет оценке $K \leq -k^2$, $k \geq 0$;
- 2) **T**-кривизна M^{n+1} удовлетворяет оценке $|\mathbf{T}| \leq \delta$, где $0 \leq \delta \leq k$;
- 3) нормальные кривизны гиперповерхности N удовлетворяют неравенству $k_n > 2\delta$.

Тогда f есть вложение, $f(N)$ есть граница выпуклого тела, гомеоморфного шару, и $f(N)$ гомеоморфно сфере S^n .

Также показано, что теорема Александр верна в случае финслеровых пространств с метрикой Бервальда.

В конце статьи мы приводим пример, который основан на недавней работе Ионина [5]. Этот пример показывает необходимость объемлющего пространства быть полным.

2. Основные теоретические сведения. Введем основные понятия финслеровой геометрии, которые нам потребуются в дальнейшем. Более подробно эти вопросы изложены в [6].

Пусть M^n – n -мерное связное C^∞ -многообразие. Обозначим через

$$TM^n = \bigsqcup_{x \in M^n} T_x M^n$$

касательное расслоение M^n . Тогда *финслеровой метрикой* на M^n называется функция $F: TM^n \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $F \in C^\infty(TM^n \setminus \{0\})$;
- 2) F положительно однородна первой степени, т.е. для любой пары $(x, y) \in TM^n$ и любого $\lambda > 0$, $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$;
- 3) для любой пары $(x, y) \in TM^n$ билинейная симметричная форма

$$\mathbf{g}_y: T_x M^n \times T_x M^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [F^2(x, y + su + tv)] \Big|_{s=t=0},$$

положительно определена.

Пара (M^n, F) называется *финслеровым многообразием*.

Если положить

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} [F^2(x, y)],$$

то форму $\mathbf{g}_y(u, v)$ можно переписать в виде

$$\mathbf{g}_y(u, v) = g_{ij}(x, y) u^i v^j.$$

Для любого ненулевого векторного поля Y , определенного на $U \subset M^n$, $\mathbf{g}_Y(u, v)$ есть риманова метрика на U .

Для гладкой кривой $c: [a, b] \rightarrow M^n$ на многообразии M^n с финслеровой метрикой F длина определяется интегралом

$$L_F(c) = \int_a^b F(c(t), \dot{c}(t)) dt.$$

Оператор ковариантного дифференцирования Черна (или Рунда)

$$\nabla: T_x M^n \times \Gamma^\infty(TM^n) \rightarrow T_x M^n$$

определяется как

$$\nabla_y U := \{dU^i(y) + U^j N_j^i(x, y)\} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x,$$

где $y \in T_x M^n$, $U \in \Gamma^\infty(TM^n)$ и

$$N_j^i(x, y) = \frac{\partial}{\partial y^j} \left[\frac{1}{4} g^{il}(x, y) \left\{ 2 \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}(x, y) - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}(x, y) \right\} y^m y^k \right].$$

Введенная таким образом связность на многообразии не является, вообще говоря, аффинной связностью. Связность будет аффинной в том и только том случае (см., например, [6; с. 86]), когда финслерова метрика будет *метрикой Бервальда*. По определению это значит, что уравнения геодезических имеют такой же вид, как и в римановой геометрии, или геодезические коэффициенты

$$G^i(x, y) = \frac{1}{4} g^{il}(x, y) \left\{ 2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x, y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x, y) \right\} y^j y^k$$

представимы в виде

$$G^i(x, y) = \Gamma_{jk}^i(x) y^j y^k.$$

Для вектора $y \in T_x M^n \setminus \{0\}$ рассмотрим функции

$$R_k^i(y) = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

Тогда семейство преобразований

$$\mathbf{R} = \left\{ \mathbf{R}_y = R_k^i(y) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k \Big|_x : T_x M^n \rightarrow T_x M^n, y \in T_x M^n \setminus \{0\}, x \in M^n \right\}$$

называется *римановой кривизной* [6; с. 97].

Пусть $P \subset T_x M^n$ – касательная 2-мерная плоскость. Для вектора $y \in P \setminus \{0\}$ определим

$$K(P, y) := \frac{\mathbf{g}_y(\mathbf{R}_y(u), u)}{\mathbf{g}_y(y, y)\mathbf{g}_y(u, u) - \mathbf{g}_y(y, u)^2},$$

где $u \in P$ – такой вектор, что $P = \text{span}\{y, u\}$. Число $K(P, y)$ не зависит от выбора $u \in P$. Число $K(P, y)$ называется *флаговой кривизной* флага (P, y) в $T_x M^n$.

Тогда по аналогии пространствами *Финслера–Адамара* называются односвязные пространства неположительной флаговой кривизны. В таких пространствах выполняется обобщение теоремы Картана–Адамара [7].

Рассмотрим геодезическую $c(t): [a, b] \rightarrow M^n$, где t – параметризация длины дуги. Тогда *полем Якоби* вдоль геодезической c называется векторное поле $J(t)$, удовлетворяющее *уравнению Якоби*:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \nabla_{\dot{c}(t)} J + \mathbf{R}_{\dot{c}(t)}(J) = 0.$$

В отличие от римановой геометрии, флаговая кривизна не описывает до конца все свойства финслеровой метрики. Поэтому в рассмотрение вводятся так называемые неримановы кривизны, которые для римановых метрик обращаются в нуль. Нам понадобится одна из них, **Т**-кривизна [6; с. 153].

Пусть (M^n, F) – финслерово пространство. Для вектора $y \in T_x M^n \setminus \{0\}$ пусть Y – это его продолжение до геодезического поля в некоторой окрестности x . Пусть ∇ – это связность Черна, а $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивита для индуцированной римановой метрики $\tilde{g} = \mathbf{g}_Y$. Для вектора $v \in T_x M^n$ определим

$$\mathbf{T}_y(v) = \mathbf{g}_y(\nabla_v V, y) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_v V, y),$$

где V – такое векторное поле, что $V_x = v$.

Семейство функций $\{\mathbf{T}_y: T_x M^n \rightarrow \mathbb{R}\}_{y \in T_x M^n \setminus \{0\}}$ называется **Т**-кривизной в точке $x \in M^n$.

Как и в [6; с. 223], мы будем говорить, что **Т**-кривизна ограничена снизу $\mathbf{T} \geq \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, если для всех векторов $y \in T_x M^n \setminus \{0\}$, $u \in T_x M^n$, для всех точек $x \in M^n$ выполняется

$$\mathbf{T}_y(u) \geq \delta \left[\mathbf{g}_y(u, u) - \mathbf{g}_y\left(u, \frac{y}{F(y)}\right)^2 \right] F(y).$$

Аналогично определяется верхняя граница **Т**-кривизны.

Заметим, что для метрик Бервальда **Т**-кривизна обращается в нуль; верно также и обратное утверждение [6; с. 155].

Пусть $\varphi: N \rightarrow M^n$ – это гиперповерхность в M^n . Вектор $\mathbf{n} \in T_{\varphi(x)} M^n$ называется вектором нормали к N в точке $x \in N$, если $\mathbf{g}_n(y, \mathbf{n}) = 0$ для всех $y \in T_x N$. Известно, что такой вектор существует [6; с. 27]. Заметим, что в общем случае несимметричной метрики вектор $-\mathbf{n}$ не будет вектором нормали. Таким образом, можем рассмотреть подрасслоение $\nu(N)$ касательного расслоения TM^n , состоящее из всех нормальных к N векторов с выбранной ориентацией, $\nu(N)$ называется *нормальным расслоением* над N .

Экспоненциальным отображением относительно гиперповерхности N будем называть отображение $\exp_N: \nu(N) \rightarrow M^n$, определяемое равенством

$$\exp_N(x, \mathbf{n}) = \exp_x(\mathbf{n}).$$

Для гиперповерхности N в финслеровом многообразии M^n нормальная кривизна $\mathbf{k}_n$ в точке $x \in N$ в направлении $y \in T_x N$ определяется как

$$\mathbf{k}_n = \mathbf{g}_n(\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)|_{t=0}, \mathbf{n}),$$

где $\dot{c}(0) = y$ и $c(t)$ является геодезической в индуцированной связности в N , $\mathbf{n}$ – выбранная единичная нормаль.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [6; с. 217]. Если в точке $x \in N$ нормальные кривизны $\mathbf{k}_n > 0$, либо $\mathbf{k}_n < 0$, то N локально выпукло в точке x .

Как было замечено выше, для выбранного векторного поля Y , $\mathbf{g}_Y(u, v)$ превращается в риманову метрику на M^n . Полученная риманова метрика обладает рядом полезных свойств.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [6; с. 100]. Для геодезического векторного поля Y рассмотрим наложенную риманову метрику $\tilde{g} = \mathbf{g}_Y$. Обозначим через $K(P, y)$ флаговую кривизну исходной финслеровой метрики, и пусть $\tilde{K}(P, y)$ – секционная кривизна в наложенной метрике. Тогда для любого флага P выполнено равенство

$$K(P, Y) = \tilde{K}(P, Y).$$

Для функции ρ на M^n в точке $x \in M^n$ градиент $\text{grad}(\rho)_x \in T_x M^n$ определяется следующим образом [6; с. 41]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^i}(x) v^i = \mathbf{g}_{\text{grad}(\rho)_x}(\text{grad}(\rho)_x, v), \quad v \in T_x M^n.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [6; с. 216]. Пусть ρ есть функция расстояния класса C^∞ , заданная на открытом множестве $U \subset M^n$. Рассмотрим наложенную риманову метрику $\tilde{g} = \mathbf{g}_{\text{grad}(\rho)_x}$. Пусть s есть расстояние от гиперповерхности N до множества $U \subset M^n$. Пусть $\mathbf{k}_n$ и $\tilde{\mathbf{k}}_n$ суть нормальные кривизны гиперповерхности $N = \rho^{-1}(s)$ в метриках F и $\tilde{g}$ соответственно относительно нормали $\mathbf{n} = \text{grad}(\rho)_x$, $x \in N$. Тогда для вектора $y \in T_x N$ выполнено равенство

$$\mathbf{k}_n(y) = \tilde{\mathbf{k}}_n(y) - \mathbf{T}_n(y).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 [6; с. 235]. Пусть (M, F) – полное односвязное финслерово многообразие с флаговой кривизной $K \leq -k^2$ и $\mathbf{T}$ -кривизной $\mathbf{T} \leq \delta$ такое, что $\delta \leq k$, $k \geq 0$. Тогда шары произвольного радиуса в M выпуклы.

Для гиперповерхности N можем определить оператор Вейнгартена следующим образом. Пусть ρ есть функция расстояния класса C^∞ , определенная на трубчатой окрестности N . Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивита для индуцированной римановой метрики $\tilde{g} = \mathbf{g}_{\text{grad}(\rho)}$. Тогда для вектора нормали $\mathbf{n} = \text{grad}(\rho)|_N$ оператором Вейнгартена называется оператор $S_n(w): T_x N \rightarrow T_x N$, действующий по закону

$$S_n(w) = \tilde{\nabla}_w \mathbf{n}.$$

Оператор S обладает следующими свойствами [6; с. 222]:

- 1) $\mathbf{g}_n(S_n(y), v) = \mathbf{g}_n(y, S_n(v))$;
- 2) $\mathbf{k}_n(y) = \mathbf{g}_n(S_n(y), y)$;

- 3) для операторов Вейнгартена S_t семейства параллельных гиперповерхностей $N_t = \rho^{-1}(t)$ справедливо следующее уравнение Рикатти:

$$\dot{S}_t + S_t^2 + \mathbf{R}_{\dot{c}(t)} = 0;$$

здесь $c(t)$ – интегральная траектория $\text{grad}(\rho)$.

Отсюда можно получить дифференциальное уравнение на нормальные кривизны параллельных гиперповерхностей в соответствующих точках. Оно имеет вид

$$\ddot{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{k}}^2 + f(t) = 0.$$

3. Теоремы сравнения для якобиевых полей. Изначально теорема Рауха была доказана для сравнения длин якобиевых полей вдоль геодезических для различных римановых многообразий. Затем Берже (см., например, [8]) обобщил эту теорему на случай экспоненциального отображения относительно геодезической. Окончательным результатом в этом направлении можно назвать работу Варнера [9], где он доказывает теоремы сравнения для экспоненциального отображения относительно подмногообразия.

Здесь мы доказываем теорему сравнения Рауха для экспоненциального отображения относительно гиперповерхности в финслеровых пространствах.

Рассмотрим гладкую гиперповерхность N в M^n . Выпустим из точки $x \in N$ геодезическую с параметризацией $c(t)$ в направлении вектора нормали к N в x .

Будем называть поле Якоби $J(t)$ вдоль геодезической $c(t)$ *N -якобиевым полем*, если

$$\nabla_{\dot{c}(t)} J(t)|_{t=0} = S_{\dot{c}}(J(t))|_{t=0}.$$

Назовем точку $c(t_0)$ *фокальной точкой* к N вдоль c , если существует такое нетривиальное N -якобиево поле J вдоль c , что $J(t_0) = 0$.

Как и в римановой геометрии, фокальные точки можно рассматривать как точки нерегулярности экспоненциального отображения относительно гиперповерхности.

Введем в рассмотрение индексную форму геодезической относительно гиперповерхности N :

$$I_t(X, Y) = \mathbf{g}_n(S_n(X), Y) + \int_0^t [\mathbf{g}_{\dot{c}}(\nabla_{\dot{c}} X, \nabla_{\dot{c}} Y) - \mathbf{g}_{\dot{c}}(\mathbf{R}_{\dot{c}}(X), Y)] ds,$$

где X, Y – векторные поля вдоль c , $\mathbf{g}_{\dot{c}}$ -ортогональные $\dot{c}$, такие, что $X(0) \in T_x N$, $Y(0) \in T_x N$.

Заметим, что индексная форма симметрична, т.е.

$$I_t(X, Y) = I_t(Y, X).$$

Индексная форма естественно возникает из формулы второй вариации для финслеровых многообразий [6; с. 160].

Докажем экстремальное свойство якобиевых полей – лемму об индексе.

ЛЕММА 1. Пусть N – гладкая гиперповерхность в M^n . Пусть $c: [0, s] \rightarrow M^n$ – нормальная геодезическая такая, что $c(0) \in N$, $\dot{c}(0)$ $\mathbf{g}_{\dot{c}(0)}$ -ортогонально N . Пусть также на c нет точек, фокальных вдоль c к N . Пусть J, Y – такие нетривиальные поля вдоль c , что $J(s) = Y(s)$, и поле J является N -якобиевым. Тогда

$$I_s(J, J) \leq I_s(Y, Y)$$

и равенство имеет место лишь тогда, когда $J = Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем аналогично работе [8]. Пусть $J_1, \dots, J_{n-1}$ – базис пространства N -якобиевых полей вдоль c . Тогда при $t \neq 0$ по линейно независимым векторам $J_i(t)$ можно разложить J и Y следующим образом:

$$J(t) = a^i J_i(t), \quad Y(t) = y^i(t) J_i(t),$$

где a^i – константы.

Пусть

$$A(t) = y'^i(t) J_i(t), \quad B(t) = y^i(t) J'_i(t).$$

Тогда $Y' = A + B$, и мы имеем, что

$$I_s(Y, Y) = \mathbf{g}_n(S_n(Y), Y) + \int_0^s [\mathbf{g}_{\dot{c}}(A, A) + 2\mathbf{g}_{\dot{c}}(A, B) + \mathbf{g}_{\dot{c}}(B, B) - \mathbf{g}_{\dot{c}}(\mathbf{R}_{\dot{c}}Y, Y)] dt.$$

Из тождества Лагранжа [10; с. 135] получаем, что

$$\mathbf{g}_{\dot{c}}(J_i, J'_j) - \mathbf{g}_{\dot{c}}(J_j, J'_i) = \text{const}.$$

Отсюда в силу N -якобиевости

$$\mathbf{g}_{\dot{c}}(J_i, J'_j) - \mathbf{g}_{\dot{c}}(J_j, J'_i) = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{g}_{\dot{c}}(Y, B)' = y'^i y^j \mathbf{g}_{\dot{c}}(J_i J'_j) + y^i y'^j \mathbf{g}_{\dot{c}}(J'_i, J_j) + y^i y^j \mathbf{g}_{\dot{c}}(J'_i, J'_j) + y^i y^j \mathbf{g}_{\dot{c}}(J_i, J''_j).$$

Отсюда следует

$$I_s(Y, Y) = \mathbf{g}_n(S_n(Y), Y)|_0 + \mathbf{g}_{\dot{c}}(Y, B)|_0^s + \int_0^s \mathbf{g}_{\dot{c}}(A, A) dt - \int_0^s y^i y^j \mathbf{g}_{\dot{c}}(J_i, J''_j + \mathbf{R}_{\dot{c}} J_j) dt.$$

В силу N -якобиевости полей получаем, что

$$\mathbf{g}_n(S_n(Y), Y) - \mathbf{g}_{\dot{c}}(Y, B)|_0 = 0.$$

Далее, так как $J(s) = Y(s)$, то $a^i = y^i(s)$. Поэтому

$$\mathbf{g}_{\dot{c}}(Y, B)|_s = \mathbf{g}_{\dot{c}}(J, a^i J'_i)|_s = \mathbf{g}_{\dot{c}}(J, J')|_s = I_s(J, J).$$

Последнее равенство доказывается в [10; с. 177].

Следовательно,

$$I_s(Y, Y) = I_s(J, J) + \int_0^s \mathbf{g}_{\dot{c}}(A, A) dt.$$

Отсюда и следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Берем два финслеровых многообразия M^n и $\overline{M}^n$. В M^n рассматриваем гиперповерхность N , нормальную геодезическую $c: [0, s] \rightarrow M^n$ такую, что $c(0) \in N$ и $\dot{c}(0)$ $\mathbf{g}_{\dot{c}(0)}$ -ортогонально N . Обозначим через J нетривиальное N -якобиево поле вдоль c такое, что $J(0) \neq 0$. В $\overline{M}^n$ рассматриваем аналогичную конструкцию, элементы которой будем отличать чертой сверху. Предположим также, что

$$\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J(t), J(t))|_0 = \overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\overline{J}(t), \overline{J}(t))|_0.$$

Вначале сделаем “пересадку” векторного поля $J(t)$ в многообразие $\overline{M}^n$ вдоль нормальной геодезической $\bar{c}(t)$, $0 \leq t \leq t^*$. Будем следовать [10]. Выберем $\mathbf{g}_{\dot{c}(0)}$ -ортонормированный базис в $T_{c(0)}M^n$ с $E_n = \dot{c}(0)$. Разнесем этот базис до параллельного вдоль $c(t)$. Получили набор $E_i(t)$ $\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}$ -ортонормированных полей вдоль $c(t)$ с $E_n(t) = \dot{c}(t)$. Проведем аналогичную конструкцию в $\overline{M}^n$. Получили набор $F_i(t)$ $\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}$ -ортонормированных полей вдоль $\bar{c}(t)$ с $F_n(t) = \dot{\bar{c}}(t)$.

Теперь разложим $J(t) = \varphi^i(t)E_i(t)$ и определим новое поле $\tilde{J}(t) = \varphi^i(t)F_i(t)$. Оно обладает следующими свойствами [10; с. 240]:

- 1) $J(t)$ и $\tilde{J}(t)$ имеют разрывы при одинаковых значениях t ;
- 2) $\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J(t), J(t)) = \overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\tilde{J}(t), \tilde{J}(t))$;
- 3) $\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J(t), \dot{c}(t)) = \overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\tilde{J}(t), \dot{\bar{c}}(t))$;
- 4) $\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J'(t), J'(t)) = \overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\tilde{J}'(t), \tilde{J}'(t))$;
- 5) если $J(t^*) \neq 0$ и $\mathbf{g}_{\dot{c}(t^*)}(J(t^*), \dot{c}(t^*)) = 0$, то $\tilde{J}(t)$ может быть выбрано так, что

$$\tilde{J}(t^*) = \xi \sqrt{\mathbf{g}_{\dot{c}(t^*)}(J(t^*), J(t^*))},$$

где ξ – единичный вектор, $\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t^*)}$ -ортогональный $\dot{\bar{c}}(t^*)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для всех $t \in [0, s]$ и для всех флагов $P \subset T_{c(t)}M$ и $\bar{P} \subset T_{\bar{c}(t)}\overline{M}$ вдоль геодезических c , $\bar{c}$ таких, что флаг $\bar{P}$ – это флаг P , “пересажженный” в $\overline{M}$, выполнено неравенство

$$K(\dot{c}(t), P) \leq K(\dot{\bar{c}}(t), \bar{P});$$

каждое максимальное собственное значение оператора $\bar{S}$ меньше или равно минимальному собственному значению оператора S . Пусть также нет точек, фокальных вдоль $\bar{c}$ к $\bar{N}$. Тогда для всех $t \in [0, s]$ выполнено неравенство

$$\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J(t), J(t)) \geq \overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\bar{J}(t), \bar{J}(t))$$

и на c также нет фокальных точек гиперповерхности N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве будем следовать стандартной технике теорем сравнения, см., например, [10; с. 245], [8], [9].

Докажем, что для любого $t \in (0, s]$

$$\frac{\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J'(t), J(t))}{\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J(t), J(t))} \geq \frac{\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\bar{J}'(t), \bar{J}(t))}{\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\bar{J}(t), \bar{J}(t))}.$$

Это будет эквивалентно неравенству

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{\mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J(t), J(t))}{\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t)}(\bar{J}(t), \bar{J}(t))} \geq 0$$

и утверждению теоремы.

Фиксируем произвольное $t^* \in (0, s]$. Выберем такое поле $\tilde{J}$, чтобы

$$\tilde{J}(t^*) = \frac{\sqrt{\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t^*)}(J(t^*), J(t^*))}}{\sqrt{\overline{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t^*)}(\bar{J}(t^*), \bar{J}(t^*))}} \bar{J}(t^*).$$

Обозначим

$$\lambda = \mathbf{g}_{\dot{c}(t^*)}(J(t^*), J(t^*)), \quad \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{g}}_{\dot{\bar{c}}(t^*)}(\bar{J}(t^*), \bar{J}(t^*)).$$

Тогда

$$\frac{1}{\lambda} I_{t^*}(J, J) \geq \frac{1}{\lambda} I_{t^*}(\tilde{J}, \tilde{J}) \geq \frac{1}{\lambda} I_{t^*}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\bar{\lambda}}} \bar{J}, \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\bar{\lambda}}} \bar{J}\right) = \frac{1}{\bar{\lambda}} I_{t^*}(\bar{J}, \bar{J}).$$

Первое неравенство выполнено в силу ограничения на кривизну, оператор Вейнгартена и свойств “пересадки” поля (см. лемму 9.5.1 в [10; с. 242]), а второе в силу леммы об индексе (лемма 1).

В силу якобиевости полей $I_{t^*}(J, J) = \mathbf{g}_{\dot{c}(t)}(J(t^*), J'(t^*))$. В силу произвольности t^* получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 2 и утверждения 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. В финслеровом пространстве с неположительной флаговой кривизной и ограниченной $\mathbf{T}$ -кривизной $\mathbf{T} \leq \delta$, $\delta \geq 0$, экспоненциальное отображение относительно гиперповерхности с нормальными кривизнами $\mathbf{k}_n \geq \delta$ в направлении внешней нормали будет невырожденным.

Из следствия 1 вытекает, что все внешние параллельные гиперповерхности будут регулярными.

4. О выпуклости параллельных гиперповерхностей. Известным в римановой геометрии является факт, что в пространствах неположительной кривизны внешние, а в пространствах неотрицательной кривизны внутренние эквидистантные гиперповерхности к выпуклой гиперповерхности будут выпуклыми. Мы доказываем аналогичный результат при более сильных ограничениях на нормальную кривизну для пространств Финслера–Адамара.

ЛЕММА 2. Пусть для некоторого $\lambda \geq 0$ гладкая функция f удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$f'(t) \leq f^2(t) - \lambda^2.$$

Предположим, что $f(0) \leq -\lambda$. Тогда $f(t) \leq -\lambda$ для всех $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что f не может принимать значения, большие $-\lambda$. Предположим противное: пусть $t_0 > 0$ будет первой точкой, где $f(t_0) > -\lambda$. Обозначим через t_1 , $0 < t_1 < t_0$, самое большое значение, при котором $f(t_1) = -\lambda$. Тогда найдется значение t_2 , $t_1 < t_2 < t_0$, такое, что $f'(t_2)$ будет больше 0, $f(t_2) > -\lambda$ и, следовательно, в этой точке f не будет удовлетворять нашему дифференциальному неравенству. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Бишоп в работе [11] получил более сильный результат в римановой геометрии, чем утверждение 1 в финслеровой. Он доказал, что если вторая фундаментальная форма гиперповерхности неотрицательно определена, то гиперповерхность локально выпукла в этой точке. Утверждение 1 накладывает более сильное условие на нормальные кривизны. Остается открытым вопрос, верно ли обобщение результата Бишоп на произвольное финслерово пространство, но в случае пространств Бервальда можно дать положительный ответ. Доказательство Бишоп переносится дословно, пользуясь афинностью связности для метрик Бервальда. Мы не будем приводить его здесь, см. [11]. Тогда в утверждении 1 мы можем заменить строгие неравенства нестрогими для метрик Бервальда.

ТЕОРЕМА 3. В финслеровом многообразии с флаговой кривизной $K \leq -k^2$, $k \geq 0$, и $\mathbf{T}$ -кривизной $\mathbf{T} \leq \delta$ такой, что $0 \leq \delta \leq k$, рассмотрим гиперповерхность N с нормальными кривизнами $\mathbf{k}_n > 2\delta$. Тогда все внешние эквидистантные гиперповерхности являются локально выпуклыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N_t – это внешняя параллельная поверхность к N . То есть, $N_t = \exp_N(tv(N))$. При таком отображении точка $x \in N$ переходит в точку $\exp_x(t\mathbf{n})$. Рассмотрим наложенную риманову метрику $\tilde{g}$, ассоциированную с геодезическим векторным полем, выпущенным в нормальном направлении из точки x . Тогда флаговые кривизны у наложенной и исходной метрик в этом направлении совпадают (утверждение 2). Из уравнения Рикатти для оператора Вейнгартена в наложенной римановой метрике следует, что в соответствующих точках нормальные кривизны в наложенной римановой метрике связаны уравнением

$$-\tilde{\mathbf{k}}_n(t) = \tilde{\mathbf{k}}_n^2(t) + g(t).$$

Здесь $g(t) \leq -k^2 \leq -\delta^2$ в силу ограничений на кривизну.

Применяя утверждение 3, получим $\tilde{\mathbf{k}}_n(0) > \delta$. Из леммы 2 следует, что $\tilde{\mathbf{k}}_n(t) > \delta$ для всех $t \geq 0$. Следовательно, $\mathbf{k}_n(t) \geq \tilde{\mathbf{k}}_n(t) - \delta > 0$, $t \geq 0$. И теорема следует из утверждения 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пользуясь замечанием 1, можно показать, что для пространств Бервальда строгие неравенства на нормальные кривизны можно заменить нестрогими.

5. Доказательство теоремы 1. При доказательстве будем следовать идее [4]. Пусть $F = f(N)$ – локально выпуклое погружение n -мерного компактного многообразия N в $(n+1)$ -мерное полное односвязное финслерово многообразие M , удовлетворяющее наложенным условиям на кривизну.

Определим внешнюю эквидистанту F , которую назовем F_r . Она локально выпукла по теореме 3. Пусть S – это сфера в M достаточно большого радиуса такого, что шар, который ограничивает эта сфера, содержит F_r и F при достаточно малом r . По утверждению 4 этот шар будет выпуклым.

Зададим отображение

$$\nu: F_r \rightarrow S,$$

ставящее в соответствие точке F_r точку пересечения геодезического луча, нормального к F_r , со сферой S . В силу отсутствия фокальных точек (следствие 1) и выпуклости тела, ограниченного сферой, разные точки переходят в разные. Следовательно, ν есть локальный гомеоморфизм и, следовательно, накрытие. Сфера при $n \geq 2$ является односвязным множеством, значит, ν есть гомеоморфизм. Следовательно, эквидистанта F_r гомеоморфна сфере S и гомеоморфизм задается отображением ν . Заметим, что вне сферы нормальные геодезические лучи не могут пересекаться. В противном случае обозначим через p точку пересечения лучей и рассмотрим сферу $\tilde{S}$, проходящую через p так, чтобы шар, ограниченный $\tilde{S}$, содержал F_r и F при достаточно малом r . Построим отображение $\tilde{\nu}: F_r \rightarrow \tilde{S}$, аналогичное ν . Тогда $\tilde{\nu}$ будет гомеоморфизмом, приходим к противоречию.

Возьмем поверхность F_{r+t_0} , параллельную F_r , которая лежит вне шара, ограниченного S . Такая поверхность существует в силу полноты объемлющего пространства. Локально она является эквидистантой F , поэтому локально выпукла. Кроме

того, она уже является компактной вложенной выпуклой гиперповерхностью без самопересечений и является границей некоторого тела.

Теорема Шмидта, доказанная в [2], гласит, что открытое связное множество в E^n , имеющее локальную опорную плоскость в каждой граничной точке, является выпуклым. Аналогично рассуждая, можно показать, что тело, ограниченное поверхностью F_{r+t_0} , является выпуклым, и сама F_{r+t_0} гомеоморфна сфере.

Берем поверхности F_{r+t_0-t} , параллельные F_{r+t_0} и лежащие внутри тела, ограниченного F_{r+t_0} . При малых t поверхность F_{r+t_0-t} является вложенной, локально выпуклой, а значит, и глобально выпуклой. Обозначим через t_1 точную верхнюю грань таких t , что поверхность F_{r+t_0-t} является вложенной. Пусть $t_1 < r + t_0$. Тело, ограниченное $F_{r+t_0-t_1}$, является выпуклым телом, а сама $F_{r+t_0-t_1}$ является выпуклой поверхностью. На ней должны быть точки самокасания. Возможно два случая: внутреннее самокасание и внешнее. Внутреннее самокасание невозможно из-за гомеоморфизма ν – две точки склеивались бы в одну на сфере. Внешнее самокасание невозможно, так как в таком случае на предыдущем этапе у нас было бы самопересечение, но мы выбирали t_1 как точную верхнюю грань. Отсюда следует, что $t_1 = r + t_0$ и F является границей выпуклого тела. Взяв точку внутри тела, получаем, что F гомеоморфна сфере. Теорема доказана.

Заметим, что пользуясь замечанием 2 и дословно повторив предыдущее доказательство, можно получить следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f: N \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, есть погружение компактно-го связного многообразия N в полное односвязное финслерово многообразие M^{n+1} с метрикой Бервальда неположительной флаговой кривизны. Если f локально выпукло, то f есть вложение, а $f(N)$ – граница выпуклого тела, гомеоморфная сфере S^n .

ПРИМЕР. В работе [5] был построен пример неполного односвязного риманового пространства отрицательной кривизны, которое содержит замкнутую геодезическую. Если мы рассмотрим трубчатую окрестность вокруг такой замкнутой геодезической, то получим локально-выпуклую гиперповерхность (так как функция расстояния от выпуклого множества в римановом многообразии неположительной кривизны выпукла), но полученная гиперповерхность будет, очевидно, гомеоморфна тору $S^n \times S^1$, где $n + 1$ – это размерность объемлющего пространства. Таким образом, условие полноты является существенным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1970.
- [2] J. Van Heijenoort, “On locally convex manifolds”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **5**:3 (1952), 223–242.
- [3] S. Alexander, “Locally convex hypersurfaces of negatively curved spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **64**:2 (1977), 321–325.
- [4] А. А. Борисенко, “О локально выпуклых гиперповерхностях в многообразиях Адамара”, *Матем. заметки*, **67**:4 (2000), 498–507.
- [5] В. К. Ионин, “Замкнутые геодезические в односвязных римановых пространствах отрицательной кривизны”, *Сиб. матем. журн.*, **41**:5 (2000), 1076–1080.
- [6] Z. Shen, *Lectures on Finsler Geometry*, World Sci. Publ., Singapore, 2001.

- [7] D. Egloff, “Uniform Finsler Hadamard manifolds”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **66**:3 (1997), 323–357.
- [8] Ю. Д. Бурого, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства*, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1980.
- [9] F. W. Warner, “Extension of the Rauch comparison theorem to submanifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122**:2 (1966), 341–356.
- [10] D. Bao, S.-S. Chern, Z. Shen, *An Introduction to Riemann–Finsler Geometry*, Grad. Texts in Math., **200**, Springer-Verlag, New York, NY, 2000.
- [11] R. L. Bishop, “Infinitesimal convexity implies local convexity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **24**:2 (1974), 169–172.

А. А. Борисенко

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,

Украина

E-mail: borisenk@univer.kharkov.ua

Поступило

02.02.2009

Исправленный вариант

16.06.2009

Е. А. Олин

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,

Украина

E-mail: evolin@mail.ru