Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Исхоков, Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 201–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:00:26

Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением

С. А. Искоков

В работе доказывается весовое неравенство Гординга для вырождающихся эллиптических операторов в произвольной (ограниченной или неограниченной) области n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и с помощью этого неравенства изучается однозначная разрешимость одной вариационной задачи. Предполагается, что младшие коэффициенты рассматриваемых операторов принадлежат некоторым весовым L_p -пространствам.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть Ω – произвольная (ограниченная или неограниченная) область в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $d(x)$ расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$, если $\partial\Omega \neq \emptyset$. В случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ положим $d(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

Пусть $\sigma(x)$, $\delta(x)$ – положительные функции из класса $C^1(\Omega)$, удовлетворяющие условиям

$$\delta(x) \leq \kappa d(x), \quad |\nabla \delta(x)| \leq \kappa, \quad |\nabla \sigma(x)| \leq \kappa \sigma(x) \delta^{-1}(x) \quad (1.1)$$

для всех $x \in \Omega$.

Работа посвящена изучению разрешимости вариационной задачи Дирихле для дифференциального оператора

$$(Lu) = \sum_{|k|, |l| \leq r} (-1)^{|l|} (b_{kl}(x) u^{(k)}(x))^{(l)}, \quad (1.2)$$

где r – натуральное число, $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – мультииндексы, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Предполагается, что коэффициенты $b_{kl}(x)$ оператора (1.2) имеют вид

$$b_{kl}(x) = a_{kl}(x) \sigma^2(x) \delta^{-2r+|k|+|l|}(x), \quad |k|, |l| \leq r, \quad x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Вариационная задача Дирихле для оператора (1.2) в случае ограниченной области

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \sigma(x) = \rho^\alpha(x), \quad \delta(x) = \rho(x),$$

где $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$, изучалась в работах Никольского, Лизоркина, Кудрявцева и Мирошина (см. [1]–[3] и имеющуюся там библиографию). Случай степенного вырождения в полупространстве

$$\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

рассмотрен в работах [4], [5]. В работе автора [6] рассматривался случай нестепенного вырождения в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В этих работах предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k|, |l| \leq r$, ограничены и удовлетворяют следующему условию эллиптичности:

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \zeta_k \bar{\zeta}_l \geq c \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2, \quad x \in \Omega, \quad \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}, \quad (1.4)$$

где c – положительная постоянная. Здесь мы рассматриваем случай произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и в отличие от вышеупомянутых работ предполагаем, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены при $|k| = |l| = r$, а при $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат некоторым весовым L_p -пространствам. Вместо условия эллиптичности (1.4) предполагаем выполнение более слабого условия

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|, |l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \bar{\xi}^l \geq c |\xi|^{2r} \quad (1.5)$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$; число $c > 0$ не зависит от x и ξ . Доказывается неравенство (см. теорему 3.1), которое является весовым аналогом неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов.

2. Вспомогательные неравенства. Далее всюду в этой работе (если не оговорено другое) считается, что Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, положительные функции $\sigma(x), \delta(x) \in C^1(\Omega)$ удовлетворяют условиям (1.1) и $\varkappa$ – постоянная из (1.1).

Пусть $y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и m – натуральное число. Введем обозначение

$$J_\varepsilon^{(m)}(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \frac{m\varepsilon}{(m+1)\varkappa} \delta(y) \right\}.$$

Так как $\delta(y) \leq \varkappa d(y)$, $y \in \Omega$, то $J_\varepsilon^{(m)}(y) \subset \Omega$ при всех $y \in \Omega$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $m = 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, m – натуральное число и $\chi_\varepsilon^{(m)}(x, y)$ – характеристическая функция шара $J_\varepsilon^{(m)}(y)$. Тогда

$$\left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^n \leq \delta^{-n}(x) \varkappa_n^{-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^n \int_\Omega \chi_\varepsilon^{(m)}(x, y) dy \leq \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^n, \quad (2.1)$$

где $\varkappa_n$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем неравенство

$$(1 - \varepsilon)\delta(y) \leq \delta(x) \leq (1 + \varepsilon)\delta(y) \quad (2.2)$$

для всех $x, y \in \Omega$ таких, что

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa} \delta(y). \quad (2.3)$$

Так как $|\nabla \delta(z)| \leq \varkappa$ для всех $z \in \Omega$, то, используя равенство

$$\delta(x) - \delta(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \delta(y + t(x - y)) dt$$

и условие (2.3), имеем $|\delta(x) - \delta(y)| \leq \varkappa |x - y| < \varepsilon \delta(y)$. Отсюда следует (2.2).

Имеем

$$\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{(m)}(x, y) dy = \int_{G_{\varepsilon}^{(m)}(x)} 1 \cdot dy = |G_{\varepsilon}^{(m)}(x)|,$$

где

$$G_{\varepsilon}^{(m)}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \frac{\varepsilon m}{\varkappa(m+1)} \delta(y) \right\}.$$

Из (2.3) следует, что $\delta(y) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} \delta(x)$ для всех $y \in G_{\varepsilon}^{(m)}(x)$. Поэтому

$$|x - y| < \frac{m\varepsilon}{\varkappa(m+1)(1-\varepsilon)} \delta(x)$$

и, следовательно, $G_{\varepsilon}^{(m)}(x)$ содержится в шаре радиуса $\delta(x)\varepsilon/\varkappa(1-\varepsilon)$, т.е.

$$|G_{\varepsilon}^{(m)}(x)| \leq \varkappa_n \left(\frac{\delta(x)\varepsilon}{\varkappa(1-\varepsilon)} \right)^n.$$

Правое неравенство в (2.1) доказано.

Рассмотрим множество

$$Q_{\varepsilon}^{(m)}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \frac{\varepsilon m}{\varkappa} \delta(x) \right\}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_m = \frac{m\varepsilon}{(m+1)(1+\varepsilon)}.$$

Аналогично (2.3) доказывается, что

$$(1 - \varepsilon_m) \delta(x) \leq \delta(y) \leq (1 + \varepsilon_m) \delta(x) \quad \text{для всех} \quad x \in Q_{\varepsilon}^{(m)}(x).$$

Поэтому $|x - y| < \varepsilon_m \delta(y)/\varkappa(1 - \varepsilon_m)$ для всех $x \in Q_{\varepsilon}^{(m)}(x)$. Отсюда в силу неравенства $\varepsilon_m/(1 - \varepsilon_m) < m\varepsilon/(m+1)$ следует, что $Q_{\varepsilon}^{(m)}(x) \subset G_{\varepsilon}^{(m)}(x)$. Так как $|Q_{\varepsilon}^{(m)}(x)| = \varkappa_n \delta^n(x) (\varepsilon_m/\varkappa)^n$, то отсюда следует левое неравенство в (2.1).

Лемма 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Неравенство (2.1) остается в силе, если в нем заменить $(1+1/m)$ единицей, а $\chi_{\varepsilon}^{(m)}(x, y)$ — на $\chi_{\varepsilon}(x, y)$, где $\chi_{\varepsilon}(x, y)$ — характеристическая функция шара $J_{\varepsilon}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon \delta(y)/\varkappa\}$.

В следующем пункте мы будем часто использовать неравенство

$$e^{-\varepsilon} \sigma(y) \leq \sigma(x) \leq e^{\varepsilon} \sigma(y), \tag{2.4}$$

которое имеет место для всех $x, y \in \Omega$, удовлетворяющих условию (2.2).

Докажем неравенство (2.4). Так как (см. (1.1)) $|\nabla \sigma(z)| \leq \varkappa \sigma(z) \delta^{-1}(z)$ для всех $z \in \Omega$, то

$$\left| \frac{d}{dt} \ln \sigma(y + t(x - y)) \right| \leq |x - y| \varkappa \delta^{-1}(x + t(x - y)), \quad t \in (0, 1).$$

В силу этого неравенства и условия (2.2) из

$$\ln \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \ln \sigma(y + t(x - y)) dt$$

следует, что

$$\left| \ln \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} \right| \leq \varepsilon \int_0^1 \delta(y) \delta^{-1}(y + t(x-y)) dt.$$

Далее, применяя неравенство (2.3), получим $|\ln(\sigma(x)/\sigma(y))| \leq \varepsilon/(1-\varepsilon)$, откуда и следует (2.4).

Пусть r – натуральное число, $p \geq 1$. Символом $W_p^r(\Omega; \sigma, \delta)$ обозначим пространство всех измеримых в Ω функций $u(x)$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $u^{(k)}(x)$, $|k| = r$, с конечной нормой

$$\|u; W_p^r(\Omega; \sigma, \delta)\| = \left\{ \|u; L_p^r(\Omega; \sigma)\| + \int_{\Omega} \sigma^p(x) \delta^{-rp}(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где

$$\|u; L_p^r(\Omega; \sigma)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^p(x) |u^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Это пространство банахово, и множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в нем (см., например, [6]).

Множество функций $u(x)$, $x \in \Omega$, для которых конечна полунорма $\|u; L_p^r(\Omega; \sigma)\|$, обозначим через $L_p^r(\Omega; \sigma)$, а символом $L_p(\Omega; \sigma)$ обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u; L_p(\Omega; \sigma)\| = \left\{ \int_{\Omega} \sigma^p(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть целое число $m \in [0, r)$, $p \geq 1$, $1 \leq q_1 \leq q_0$, а число q_0 удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{r-m}{n} < \frac{1}{q_0} & \text{при } n - (r-m)p > 0, \\ q_0 - \text{любое конечное число} & \text{при } n - (r-m)p \leq 0. \end{cases}$$

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\|v; L_{q_0}^m(\Omega; \sigma \delta^{n/p-n/q_0-r+m})\| \leq \tau \|v; W_p^r(\Omega; \sigma, \delta)\| + c_0 \tau^{-\mu} \|v; L_{q_1}(\Omega; \sigma \delta^{n/p-n/q_1-r})\| \quad (2.5)$$

для всех $v \in W_p^r(\Omega; \sigma, \delta)$, где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + mn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-m)n^{-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I(0)$ – единичный открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале системы координат. В условиях леммы из интерполяционного неравенства [7] (см. также [8; § 4.7]) следует, что

$$\|u^{(k)}; L_{q_0}(I(0))\| \leq \tau \sum_{|l|=r} \|u^{(l)}; L_p(I(0))\| + \tau \|u; L_p(I(0))\| + c_1 \tau^{-\mu} \|u; L_{q_1}(I(0))\|, \quad (2.6)$$

где k – любой мультииндекс длины m .

Пусть v – произвольная функция из $W_p^r(\Omega; \sigma, \delta)$, y – произвольная точка из Ω . Отображение $z \rightarrow x$, определенное равенством $x = (z-y)2\kappa/\delta(y)$, отображает шар

$$J(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z-y| < \frac{1}{2\kappa} \delta(y) \right\}$$

в единичный шар $I(0)$. Так как $J(y) \subset \Omega$ для любого $y \in \Omega$, то функция

$$\widehat{v}_y(x) = v\left(\frac{1}{2\kappa}x\delta(y) + y\right)$$

принадлежит $W_p^r(I(0))$. Записываем неравенство (2.6) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$, в интегралах полученного неравенства проведем замену переменных интегрирования $z = y + x\delta(y)/2\kappa$, обе стороны неравенства умножим на $\sigma(y)\delta^{-r}(y)$, результат возведем в степень q_0 и проинтегрируем по $y \in \Omega$. В итоге получим неравенство (число $\text{const} \cdot \tau$ вновь обозначим через τ)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-rq_0+|k|q_0-n}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v^{(k)}(z)|^{q_0} dz \right) dy \\ & \leq \tau \sum_{|l|=r} \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-nq_0/p}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v^{(l)}(z)|^p dz \right)^{q_0/p} dy \\ & \quad + \tau \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-rq_0-nq_0/p}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v(z)|^p dz \right)^{q_0/p} dy \\ & \quad + c_1 \tau^{-\mu q_0} \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-rq_0-nq_0/q_1}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v(z)|^{q_1} dz \right)^{q_0/q_1} dy, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\chi(z, y)$ – характеристическая функция множества $J(y)$.

Из леммы 2.1 следует (см. замечание 2.1)

$$3^{-n} \kappa_n \kappa^{-n} \delta^n(z) \leq \int_{\Omega} \chi(z, y) dy \leq \kappa_n \kappa^{-n} \delta^n(z) \quad \text{для всех } z \in \Omega. \quad (2.8)$$

Далее, используя неравенства (2.3), (2.4) при $\varepsilon = 1/2$, а также (2.8), оценим интегралы, которые присутствуют в неравенстве (2.7). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-rq_0+|k|q_0-n}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v^{(k)}(z)|^{q_0} dz \right) dy \\ & \geq M_1 \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) dy \right) \sigma^{q_0}(z) \delta^{-rq_0+|k|q_0-n}(z) |v^{(k)}(z)|^{q_0} dz \\ & \geq M_1 \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(z) \delta^{-rq_0+|k|q_0}(z) |v^{(k)}(z)|^{q_0} dz. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь и далее через $M_1, M_2, \dots$ обозначены различные положительные постоянные, точные значения которых для нас несущественны. Для оценки сверху интегралов, стоящих в правой части (2.7), мы также воспользуемся следующим обобщенным неравенством Минковского:

$$\int_X \left(\int_Y |F(x, y)|^p dy \right)^{q_0/p} dx \leq \left\{ \int_Y \left(\int_X |F(x, y)|^{q_0} dx \right)^{p/q_0} dy \right\}^{q_0/p},$$

которое справедливо при $1 \leq p \leq q_0 < \infty$.

Имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-nq_0/p}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v^{(l)}(z)|^p dz \right)^{q_0/p} dy \\
 &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} [\sigma(y) \delta^{-n/p}(y) \chi(z, y) |v^{(l)}(z)|]^p dz \right)^{q_0/p} dy \\
 &\leq \left\{ \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} [\sigma(y) \delta^{-n/p}(y) \chi(z, y) |v^{(l)}(z)|]^{q_0} dy \right)^{p/q_0} dz \right\}^{q_0/p} \\
 &\leq M_2 \left\{ \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) dy \right)^{p/q_0} \sigma^p(z) \delta^{-n}(z) |v^{(l)}(z)|^p dz \right\}^{q_0/p} \\
 &\leq M_2 \left\{ \int_{\Omega} (\sigma(z) \delta^{-n/p+n/q_0}(z) |v^{(l)}(z)|)^p dz \right\}^{q_0/p}. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Аналогично доказываются следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-rq_0-nq_0/p}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v(z)|^p dz \right)^{q_0/p} dy \\
 &\leq M_3 \|v; L_p(\Omega; \sigma \delta^{-r-n/p+n/q_0})\|^{q_0}, \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \sigma^{q_0}(y) \delta^{-rq_0-nq_0/q_1}(y) \left(\int_{\Omega} \chi(z, y) |v(z)|^{q_1} dz \right)^{q_0/q_1} dy \\
 &\leq M_4 \|v; L_{q_1}(\Omega; \sigma \delta^{-r-n/q_1+n/q_0})\|^{q_0}. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Так как в неравенстве (2.7) k – произвольный мультииндекс длины m , то из (2.7), (2.9)–(2.12) получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
 \|v; L_{q_0}^m(\Omega; \sigma \delta^{-r+m})\| &\leq \tau \|v; L_p^r(\Omega; \sigma \delta^{-n/p+n/q_0})\| + \tau \|v; L_p(\Omega; \sigma \delta^{-r-n/p+n/q_0})\| \\
 &\quad + c_1 \tau^{-\mu} \|v; L_{q_1}(\Omega; \sigma \delta^{-r-n/q_1+n/q_0})\|
 \end{aligned}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Заменяя в этом неравенстве σ на $\sigma \delta^{n/p-n/q_0}$, получим неравенство (2.5).

Лемма 2.2 доказана.

Аналогично лемме 2.2 доказывается, что если целое число $s \in [0, r]$ и выполняются условия

$$1 \leq p \leq q_0 < \infty, \quad r - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q_0} > 0, \tag{2.13}$$

то справедливо вложение

$$W_p^r(\Omega; \sigma, \delta) \subset W_{q_0}^s(\Omega; \sigma \delta^{-r+s+n/p-n/q_0}, \delta). \tag{2.14}$$

ЛЕММА 2.3. Пусть r, t – натуральные числа, $p \geq 1, q \geq 1$ и положительные функции $\sigma_p(x), \sigma_q(x)$ из класса $C^1(\Omega)$ удовлетворяют условиям

$$|\nabla \sigma_p(x)| \leq c_p \sigma_p(x) \delta^{-1}(x), \quad |\nabla \sigma_q(x)| \leq c_q \sigma_q(x) \delta^{-1}(x) \quad \text{для всех } x \in \Omega,$$

где c_p, c_q – некоторые положительные постоянные.

Для мультииндексов k, l таких, что $|k| < r$, $|l| \leq t$, определим числа q_l, λ_{kl}, s_k посредством следующих соотношений:

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \frac{1}{q} - \frac{t - |l|}{n}, & n > q(t - |l|), \\ \varepsilon_0, \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \frac{1}{q}, & n \leq q(t - |l|), \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p} - \frac{r - |k|}{n} \quad \text{при } n - p(r - |k|) > 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_1, \quad 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{p} \quad \text{при } n - p(r - |k|) \leq 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{s_k} \geq \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}. \quad (2.18)$$

Пусть положительная функция $\sigma_{kl}(x)$, $x \in \Omega$, такова, что

$$\sigma_{kl}(x) \sigma_p^{-1}(x) \sigma_q^{-1}(x) \delta(x)^{r+t-|k|-|l|-n/p-n/q+n/\lambda_{kl}} \leq C < \infty \quad \text{для всех } x \in \Omega. \quad (2.19)$$

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\| \\ & \leq \|v; W_q^t(\Omega; \sigma_q, \delta)\| \{ \tau \|v; W_p^r(\Omega; \sigma_p, \delta)\| + c_0 \tau^{-\mu_k} \|u; L_{s_k}(\Omega; \sigma_p \delta^{-r+n/p-n/s_k})\| \}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k|n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}} \quad (2.21)$$

и положительная постоянная c_0 зависит только от $n, p, r, |k|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|k| < r$, $|l| \leq t$. Число q_l , определенное в (2.15), удовлетворяет условиям

$$q \leq q_l < \infty, \quad t - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} \geq 0,$$

и поэтому в силу вложения (2.14) выполняется неравенство

$$\|v^{(l)}; L_{q_l}(\Omega; \sigma_q, \delta^{-t+|l|+n/q-n/q_l})\| \leq M \|v; W_q^t(\Omega; \sigma_q, \delta)\| \quad (2.22)$$

для всех $v \in W_q^t(\Omega; \sigma_q, \delta)$.

Нетрудно проверить, что при $q_0 = p_k$, $m = |k|$, $q_1 = s_k$, где $p_k = (\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1})^{-1}$ и числа q_l, λ_{kl}, s_k определены соотношениями (2.15)–(2.18), условия леммы 2.2 выполнены. Поэтому для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u^{(k)}; L_{p_k}(\Omega; \sigma_p, \delta^{-r+|k|+n/p-n/p_k})\| \\ & \leq \tau \|u; W_p^r(\Omega; \sigma_p, \delta)\| + c_0 \tau^{-\mu_k} \|u; L_{s_k}(\Omega; \sigma_p \delta^{-r+n/p-n/s_k})\|, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - p_k^{-1} + |k|n^{-1}}{p_k^{-1} - p^{-1} + (r - |k|)n^{-1}}. \quad (2.24)$$

Так как

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l}, \quad (2.25)$$

то в силу условия (2.19) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u^{(k)}v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma_{kl})\| \\ & \leq \|u^{(k)}; L_{p_k}(\Omega; \sigma_p \delta^{n/p-n/p_k-r+|k|})\| \|v^{(l)}; L_{q_l}(\Omega; \sigma_q \delta^{-t+|l|+n/q-n/q_l})\|, \end{aligned}$$

которое доказывается с помощью неравенства Гёльдера.

В силу (2.22), (2.23) из последнего неравенства следует (2.20). Равенство (2.21) следует из (2.24), (2.25).

Лемма 2.3 доказана.

3. Неравенство Гординга. Рассмотрим связанную с оператором (1.2) полуто-
ралинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|, |l| \leq r} \int_{\Omega} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad (3.1)$$

коэффициенты которой имеют вид (1.3).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ ограничены, удовлетворяют условию эллиптичности (1.5) и для любого достаточно малого числа $\nu > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|a_{kl}(y) - a_{kl}(z)| < \nu \quad (3.2)$$

для любого $y \in \Omega$ и любого

$$z \in J_{\varepsilon}(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z - y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa} \delta(y) \right\}.$$

Пусть также коэффициенты $a_{kl}(x)$ при $|k|, |l| \leq r$ и $|k| + |l| \leq 2r - 1$ принадлежат пространству $L_{p_{kl}}(\Omega; \delta^{-n/p_{kl}})$, где

$$p_{kl} = \begin{cases} q_{kl} & \text{при } |k| \leq r - 1, |l| \leq r, \\ q_{lk} & \text{при } |k| = r, |l| \leq r - 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

а числа q_{kl} определяются соотношениями

$$q_{kl} > \begin{cases} \frac{n}{2r - |k| - |l|}, & n > 2(r - |k|), \quad n > 2(r - |l|), \\ \frac{n}{r - |k| + \varepsilon_0 n}, \quad 0 \leq \varepsilon_0 < \frac{1}{2}, & n > 2(r - |k|), \quad n \leq 2(r - |l|), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$q_{kl} = \begin{cases} \frac{n}{r - |l| + \varepsilon_1 n}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}, & n \leq 2(r - |k|), \quad n > 2(r - |l|), \\ \text{любое конечное число} > 1, & n \leq 2(r - |k|), \quad n \leq 2(r - |l|). \end{cases} \quad (3.5)$$

Тогда существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$, что

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geq C_1 \|u, W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\|^2 - C_2 \|u, L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|^2 \quad (3.6)$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)$.

Заметим, что в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ условие (3.2) можно заменить условием $a_{kl} \in C(\bar{\Omega})$, $|k| = |l| = r$. Неравенство (3.6) является весовым аналогом неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов (см., например, [9; с. 245], или [10; с. 72]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Неравенство (3.6) равносильно следующему неравенству:

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geq C_3 \|u, L_2^r(\Omega; \sigma)\|^2 - C_4 \|u, L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|^2 \quad (3.7)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$, C_3, C_4 – положительные постоянные.

Вначале рассмотрим случай, когда коэффициенты $a_{kl}(x)$ отличны от нуля только для мультииндексов k, l таких, что $|k| = |l| = r$. Пусть y – произвольная фиксированная точка в Ω . Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_y[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\mathbb{R}^n} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Из неравенства Гординга для сильноэллиптических операторов с постоянными коэффициентами следует, что

$$\sum_{|k|=r} \int_{\mathbb{R}^n} |u^{(k)}(x)|^2 dx \leq M \left\{ \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\mathbb{R}^n} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right\} \quad (3.8)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $I(0), I_m(0)$, $m = 1, 2, \dots$, открытые шары пространства $\mathbb{R}^n$ с центрами в начале координат и радиусами 1, $m/(m+1)$, $m = 1, 2, \dots$, соответственно. Берем функцию φ_m со следующими свойствами:

- 1) $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ для всех $x \in I(0)$;
- 2) $\varphi_m(x) = 1$ для всех $x \in I_m(0)$;
- 3) существует число $C > 0$ такое, что $|\varphi_m^{(k)}(x)| \leq C$ для всех $x \in I(0)$ и всех мультииндексов k таких, что $|k| \leq r$.

Пусть $u(x) \in C^\infty(I(0))$. Тогда, продолжая функцию $v_m(x) = \varphi_m(x)u(x)$ вне $I(0)$ нулем, получаем $v_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Так как $v_m(x) = u(x)$ для всех $x \in I_m(0)$, то из неравенства (3.8) для $v_m(x)$ следует, что

$$\sum_{|k|=r} \int_{I_m(0)} |u^{(k)}(x)|^2 dx \leq M_0 \left\{ \operatorname{Re} B_y[v_m, v_m] + \int_{I(0)} |u(x)|^2 dx \right\}. \quad (3.9)$$

Применяя правило Лейбница дифференцирования произведения функций, представим форму $B_y[v_m, v_m]$ в виде

$$B_y[v_m, v_m] = B_y^{(1)}[v_m, v_m] + B_y^{(2)}[v_m, v_m], \quad (3.10)$$

где

$$B_y^{(1)}[v_m, v_m] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{I(0)} a_{kl}(y) \varphi_m^2(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx,$$

$$B_y^{(2)}[v_m, v_m] = \sum' \int_{I(0)} C_{k,\mu} C_{l,\nu} a_{kl}(y) \varphi_m^{(\mu)}(x) \varphi_m^{(\nu)}(x) u^{(k-\mu)}(x) \overline{u^{(l-\nu)}(x)} dx.$$

Здесь $C_{k,\mu}, C_{l,\nu}$ – некоторые константы и символом $\sum'$ обозначено суммирование по всем мультииндексам k, l, μ, ν таким, что $|k|, |l| \leq r, |k| + |l| \leq 2r - 1, \mu \leq k, \nu \leq l, |\mu + \nu| \neq 0$.

Так как во всех интегралах, составляющих форму $B_y^{(2)}[u, v]$, порядок хотя бы одной из производных $u^{(k)}, v^{(l)}$ не превосходит $r - 1$, то, применяя соответствующие теоремы вложения для пространств Соболева, а также неравенство Юнга с малым параметром, получаем: для любого достаточно малого положительного числа τ существует конечное число $M(\tau) > 0$ такое, что

$$|B_y^{(2)}[v_m, v_m]| \leq \tau \sum_{|k|=r} \int_{I(0)} |u^{(k)}(x)|^2 dx + M(\tau) \int_{I(0)} |u(x)|^2 dx. \quad (3.11)$$

Учитывая свойство 2) функций $\varphi_m(x)$, представим форму $B_y^{(1)}[v_m, v_m]$ в виде

$$B_y^{(1)}[v_m, v_m] = B_{y,m}^{(11)}[u, u] + B_{y,m}^{(12)}[u, u], \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} B_{y,m}^{(11)}[u, u] &= \sum_{|k|=|l|=r} \int_{I_m(0)} a_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx, \\ B_{y,m}^{(12)}[u, u] &= \sum_{|k|=|l|=r} \int_{I^{(m)}(0)} a_{kl}(y) \varphi_m^2(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx, \\ I^{(m)}(0) &= I(0) \setminus I_m(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{m}{m+1} < |x| < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Согласно условию теоремы при $|k| = |l| = r$ коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены. Поэтому, применяя неравенство Коши–Буняковского и принимая во внимание то, что $|I^{(m)}(0)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$|B_{y,m}^{(12)}[u, u]| \leq \mu_m \|u; L_2^r(I(0))\|^2, \quad (3.13)$$

где

$$\|u; L_2^r(I(0))\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{I(0)} |u^{(k)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и положительные числа $\mu_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Из представлений (3.10), (3.12) из (3.9) следует, что

$$\|u; L_2^r(I_m(0))\|^2 - M_0 |B_y^{(2)}[v_m, v_m]| - M_0 |B_{y,m}^{(12)}[u, u]| \leq M_0 \operatorname{Re} B_{y,m}^{(11)}[u, u].$$

Далее, считая число m достаточно большим и применяя неравенство (3.11) при $\tau = 1/m$, а также неравенство (3.13), приходим к неравенству

$$\|u; L_2^r(I_m(0))\|^2 - c_m \|u; L_2^r(I(0))\|^2 - C_m \|u; L_2(I(0))\|^2 \leq M_0 \operatorname{Re} B_{y,m}^{(11)}[u, u] \quad (3.14)$$

для всех $u \in C^\infty(I(0))$, где c_m, C_m – положительные числа и $c_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Пусть v – произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Отображение $z \rightarrow x$, определенное равенством $x = (z - y)\varkappa/\varepsilon\delta(y)$, отображает шар

$$J_\varepsilon(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z - y| < \frac{\varepsilon}{\varkappa} \delta(y) \right\}$$

в единичный шар $I(0)$, а $J_\varepsilon^{(m)}(y)$ – в $I_m(y)$. Так как $J_\varepsilon(y) \subset \Omega$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, то функция $\widehat{v}_y(x) = v(x\varepsilon\delta(y)/\varkappa + y)$ определена для всех $x \in I(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(I(0))$. Неравенство (3.14) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$ примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{|k|=r} \left\{ \int_{I_m(0)} |\widehat{v}_y^{(k)}(x)|^2 dx - c_m \int_{I_m(0)} |\widehat{v}_y^{(k)}(x)|^2 dx \right\} \\ & - C_m \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa} \right)^{-2r} \delta^{-2r}(y) \int_{I(0)} |\widehat{v}_y(x)|^2 dx \\ & \leq M_0 \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int_{I_m(0)} a_{kl}(y) \widehat{v}_y^{(k)}(x) \overline{\widehat{v}_y^{(l)}(x)} dx. \end{aligned}$$

В интегралах в обеих частях этого неравенства проведем замену переменных интегрирования $z = y + x\varepsilon\delta(y)/\varkappa$, умножим обе части полученного неравенства на $\sigma^2(y)\delta^{-n}(y)$ и результат проинтегрируем по $y \in \Omega$. В итоге получим

$$\begin{aligned} & \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-n}(y) \left(\int_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \\ & - c_m \sum_{|k|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-n}(y) \left(\int_{J_\varepsilon(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \\ & - C_m \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa} \right)^{-2r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-2r-n}(y) \left(\int_{J_\varepsilon(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy \\ & \leq M_0 \operatorname{Re} B_{\varepsilon, m}[v, v], \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$B_{\varepsilon, m}[v, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-n}(y) a_{kl}(y) \left(\int_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} v^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz \right) dy.$$

Применяя лемму 2.1 (см. также замечание 2.1) и неравенства (2.2), (2.4), оценим интегралы в левой части (3.15). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-n}(y) \left(\int_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \\ & = \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-n}(y) \left(\int_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z, y) |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \\ & \geq e^{-2\varepsilon} (1 - \varepsilon)^n \int_{\Omega} \sigma^2(z) \delta^{-n}(z) |v^{(k)}(z)|^2 \left(\int_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z, y) dy \right) dz \\ & \geq e^{-2\varepsilon} (1 - \varepsilon)^n \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon m}{(1 + \varepsilon)(m + 1)} \right)^n \int_{\Omega} \sigma^2(z) |v^{(k)}(z)|^2 dz, \\ & \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-n}(y) \left(\int_{J_\varepsilon(y)} |v^{(k)}(z)|^2 dz \right) dy \\ & \leq e^{2\varepsilon} (1 + \varepsilon)^n \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon m}{\varkappa(1 - \varepsilon)(m + 1)} \right)^n \int_{\Omega} \sigma^2(z) |v^{(k)}(z)|^2 dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^2(y) \delta^{-2r-n}(y) \left(\int_{J_{\varepsilon}(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy \\ & \leq e^{2\varepsilon} (1 + \varepsilon)^{2r+n} \chi_n \left(\frac{\varepsilon}{\chi(1 - \varepsilon)} \right)^n \int_{\Omega} \sigma^2(z) \delta^{-2r}(z) |v(z)|^2 dz. \end{aligned}$$

С учетом этих неравенств из (3.15) следует, что

$$(1 - \widehat{c}_m) \|v; L_2^r(\Omega; \sigma)\|^2 - \varepsilon^{-2r} \widehat{C}_m \|v; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|^2 \leq \varepsilon^{-n} M_1 \operatorname{Re} B_{\varepsilon, m}[v, v], \quad (3.16)$$

где $\widehat{c}_m, \widehat{C}_m, M_1$ – положительные константы и $\widehat{c}_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Вводим полуторалинейную форму

$$B_{\varepsilon, m}^{(1)}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{(m)}(z, y) a_{kl}(y) dy \right) \sigma^2(z) \delta^{-n}(z) u^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz,$$

где $u, v \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Учитывая ограниченность коэффициентов $a_{kl}(y)$, $|k| = |l| = r$, имеем

$$\begin{aligned} & |B_{\varepsilon, m}^{(1)}[v, v] - B_{\varepsilon, m}[v, v]| \\ & \leq \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{(m)}(z, y) |a_{kl}(y)| |\sigma^2(y) \delta^{-n}(y) - \sigma^2(z) \delta^{-n}(z)| dy \right) \\ & \quad \times |v^{(k)}(z)| |v^{(l)}(z)| dz \\ & \leq M \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{(m)}(z, y) \left| 1 - \left(\frac{\sigma(y)}{\sigma(z)} \right)^2 \left(\frac{\delta(z)}{\delta(y)} \right)^n \right| dy \right) \\ & \quad \times \sigma^2(z) \delta^{-n}(z) |v^{(k)}(z)| |v^{(l)}(z)| dz. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из соотношений (2.3), (2.4) следует, что

$$e^{-2\varepsilon} (1 - \varepsilon)^n \leq \left(\frac{\sigma(y)}{\sigma(z)} \right)^2 \left(\frac{\delta(z)}{\delta(y)} \right)^n \leq (1 + \varepsilon)^n e^{2\varepsilon}$$

для всех $y, z \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству (2.2). Поэтому, применяя лемму 2.1 и неравенство Коши–Буняковского, из (3.17) получим

$$|B_{\varepsilon, m}^{(1)}[v, v] - B_{\varepsilon, m}[v, v]| \leq \varepsilon^n \mu_1(\varepsilon) \|v; L_2^r(\Omega; \sigma)\|^2 \quad \text{для всех } v \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad (3.18)$$

где $\mu_1(\varepsilon) > 0$ и $\mu_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть

$$B_{\varepsilon, m}^{(2)}[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{(m)}(z, y) dy \right) a_{kl}(z) \sigma^2(z) \delta^{-n}(z) u^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz,$$

где $u, v \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Тогда в силу условия (3.2), леммы 2.1 и неравенства Коши–Буняковского для любого достаточно малого $\nu > 0$ существует $\varepsilon_{\nu} > 0$ такое, что

$$|B_{\varepsilon, m}^{(1)}[v, v] - B_{\varepsilon, m}^{(2)}[v, v]| \leq \varepsilon^n \nu \|v; L_2^r(\Omega; \sigma)\|^2 \quad (3.19)$$

для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ и любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\nu})$.

Далее, заметим, что для любой вещественнозначной функции $\Phi(z) \in L_1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} c_{n,m} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^m(z, y) dy \right) \delta^{-n}(z) \Phi(z) dz \\ \leq \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^n \int_{\Omega} \Phi(z) dz + \left[\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^n - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^n \right] \int_{\Omega} \Phi^{-}(z) dz, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $\Phi^{-}(z) = (|\Phi(z)| - \Phi(z))/2$, $c_{n,m} = \varkappa^n(1+m^{-1})^n/\varkappa_n$.

Действительно, так как функции $\Phi^{+}(z) = (|\Phi(z)| + \Phi(z))/2$ и $\Phi^{-}(z)$ неотрицательны, то в силу леммы 2.1 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} c_{n,m} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^m(z, y) dy \right) \delta^{-n}(z) \Phi^{+}(z) dz &\leq \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^n \int_{\Omega} \Phi^{+}(z) dz, \\ c_{n,m} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^m(z, y) dy \right) \delta^{-n}(z) \Phi^{-}(z) dz &\geq \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^n \int_{\Omega} \Phi^{-}(z) dz. \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенства $\Phi(z) = \Phi^{+}(z) + \Phi^{-}(z)$ следует (3.20).

Применяя неравенство (3.20) при

$$\Phi(z) = \operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(z) \sigma^2(z) v^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)},$$

в силу ограниченности коэффициентов $a_{kl}(z)$, $|k| = |l| = r$, для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ получим

$$\operatorname{Re} B_{\varepsilon,m}^{(2)}[v, v] \leq \varepsilon^n M \{ \operatorname{Re} B[v, v] + \mu_2(\varepsilon) \|v; L_2^r(\Omega; \sigma)\|^2 \}, \quad (3.21)$$

где $M > 0$ и $\mu_2(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-n} - (1+\varepsilon)^{-n}$.

Теперь объединяя (3.16), (3.18), (3.19) и (3.21), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} (1 - \hat{c}_m - \mu_1(\varepsilon) - M\mu_2(\varepsilon) - \nu) \|v; L_2^r(\Omega; \sigma)\|^2 - \hat{c}_m \varepsilon^{-2r} \|v; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|^2 \\ \leq M \operatorname{Re} B[v, v] \quad \text{для всех } v \in C_0^{\infty}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Так как $\hat{c}_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $\mu_1(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\mu_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то, подбирая число m достаточно большим, а числа ε , ν — достаточно малыми, из (3.22) получим (3.7).

Таким образом, теорема 3.1 в случае когда коэффициенты $a_{kl}(x)$ отличны от нуля только при $|k| = |l| = r$, доказана.

Теперь перейдем к общему случаю. Положим

$$\begin{aligned} B_0[u, v] &= \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \\ B_1[u, v] &= B[u, v] - B_0[u, v], \quad u, v \in C_0^{\infty}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Согласно вышедоказанному результату для формы $B_0[u, v]$ имеет место оценка вида (3.7), т.е. существуют числа $C_5 > 0$, $C_6 \geq 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} B_0[u, u] \geq C_5 \|u; L_2^r(\Omega; \sigma)\|^2 - C_6 \|u; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|^2 \quad (3.24)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Полуторалинейную форму $B_1[u, v]$ представим в виде

$$B_1[u, v] = B_{11}[u, v] + B_{12}[u, v], \quad (3.25)$$

где

$$B_{1i}[u, v] = \sum^{(i)} \int_{\Omega} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \quad i = 1, 2,$$

где $\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам k, l : $|k| < r, |l| \leq r$, а $\sum^{(2)}$ – по мультииндексам k, l : $|k| = r, |l| < r$.

Пусть числа q_{kl} определены соотношениями (3.4), (3.5). Положим

$$\lambda_{kl} = \frac{q_{kl}}{q_{kl} - 1}.$$

Числа λ_{kl} , $|k| < r, |l| \leq r$, удовлетворяют условиям леммы 2.3 при $t = r, p = q = 2$. Поэтому, применяя неравенство Гёльдера и затем лемму 2.3 при $t = r, p = q = s_k = 2$, получим

$$\begin{aligned} |B_{11}[u, v]| &\leq \sum^{(1)} \int_{\Omega} a_{kl}(x) \sigma^2(x) \delta^{-2r+|k|+|l|}(x) |u^{(k)}(x)| |v^{(l)}(x)| dx \\ &\leq \sum^{(1)} \|a_{kl}; L_{q_{kl}}(\Omega; \delta^{-n/q_{kl}})\| \|u^{(k)} v^{(l)}; L_{\lambda_{kl}}(\Omega; \sigma^2 \delta^{-2r+|k|+|l|+n/q_{kl}})\| \\ &\leq M \|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| \{\tau \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| + c_0 \tau^{-\mu} \|u; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где τ – любое положительное число и $\mu = \max_{|k| < r} \mu_k$. Здесь мы также воспользовались равенством (1.3) и условием $a_{kl} \in L_{q_{kl}}(\Omega; \delta^{-n/q_{kl}})$.

Так как $B_{12}[u, v]$ содержит $u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)}$ при $|l| < r, |k| = r$, то, меняя ролями $u(x)$ и $v(x)$ и действуя так же, как в (3.26), имеем

$$|B_{12}[u, v]| \leq M \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| \{\tau \|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| + c'_0 \tau^{-\mu} \|v; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|\}. \quad (3.27)$$

Неравенства (3.26) и (3.27) имеют одинаковую правую часть при $u = v$. Поэтому, используя неравенство

$$\|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| \|u; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\| \leq \nu \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\|^2 + \frac{1}{4\nu} \|u; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|^2,$$

где ν – достаточно малое положительное число, из (3.25)–(3.27) получим

$$|B_1[u, v]| \leq \tau \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\|^2 + c_1 \tau^{-2\mu} \|u; L_2(\Omega; \sigma \delta^{-r})\|^2. \quad (3.28)$$

Ввиду равенства $B[u, v] = B_0[u, v] + B_1[u, v]$ из (3.24) и (3.28) следует неравенство (3.6).

Теорема 3.1 доказана.

4. О разрешимости вариационной задачи. Как известно из общей теории эллиптических уравнений (см., например, [10; гл. 3]) неравенство Гординга играет важную роль в исследовании разрешимости задачи Дирихле методом гильбертова пространства. В этом пункте применением весового неравенства Гординга (3.6) мы изучим разрешимость следующей вариационной задачи.

ЗАДАЧА D_λ . Для заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \delta))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U, v] + \lambda \int_\Omega \sigma^2(x) \delta^{-r}(x) U(x) \overline{v(x)} dx = \langle F, v \rangle \quad \text{для всех } v \in C_0^\infty(\Omega), \quad (4.1)$$

принадлежащее пространству $W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda > \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \delta))'$ задача D_λ имеет единственное решение $U(x)$ и при этом выполняется оценка

$$\|U; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| \leq \|F; (W_2^r(\Omega; \sigma, \delta))'\|, \quad (4.2)$$

где число $M > 0$ не зависит от F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правую часть уравнения (4.1) обозначим через $B^{(\lambda)}[U, v]$. Тогда в силу теоремы 3.1 (см. неравенство (3.6)) при $\lambda \geq C_2 \geq 0$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} B^{(\lambda)}[u, u] \geq C_1 \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\|^2 \quad (4.3)$$

для всех $u \in W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)$.

Так как при $|k| = |l| = r$ коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, то полуторалинейная форма $B_0[u, v]$ (см. (3.20)) ограничена в $W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)$. В силу этого факта из неравенств (3.23), (3.24) следует, что

$$|B^{(\lambda)}[u, v]| \leq M_\lambda \|u; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| \|v; W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)\| \quad (4.4)$$

для всех $u, v \in W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)$.

Неравенства (4.3), (4.4) позволяют нам применить теорему Лакса–Мильграма, согласно которой существует оператор A , который является гомеоморфизмом пространств $W_2^r(\Omega; \sigma, \delta)$ и $(W_2^r(\Omega; \sigma, \delta))'$ и при этом выполняется определенное единственным образом представление

$$B^{(\lambda)}[u, v] = \langle Au, v \rangle \quad \text{для всех } u, v \in W_2^r(\Omega; \sigma, \delta).$$

Следовательно, для заданного $F \in (W_2^r(\Omega; \sigma, \delta))'$ функция $U = A^{-1}F$ является единственным решением задачи D_λ . Из ограниченности оператора A^{-1} следует неравенство (4.2).

Теорема 4.1 доказана.

ПРИМЕР. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с $(n-1)$ -мерной достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, r – натуральное и α – вещественное числа, $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$. Символом $W_{2,\alpha}^r(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|u; W_{2,\alpha}^r(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega (\rho^\alpha(x) |u^{(k)}(x)|)^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (4.5)$$

Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (4.5) обозначим через $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^r(\Omega)$.

Пусть полуторалинейная форма $B[u, v]$ определена равенством (3.1) и ее коэффициенты имеют вид

$$b_{kl}(x) = \rho^{2\alpha-2r+|k|+|l|}(x)a_{kl}(x).$$

Предположим, что $-1/2 < \alpha < r - 1/2$, $\alpha + 1/2 \notin \{1, 2, \dots, r\}$ и целое число s_0 определено неравенствами $r - \alpha - 1/2 < s_0 < r - \alpha + 1/2$. Тогда при $\sigma(x) = \rho^\alpha(x)$, $\delta(x) = \rho(x)$ задача D_λ эквивалентна следующей задаче.

Задача D'_λ . Для заданного функционала $F \in (\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения (4.1) из пространства $W_{2,\alpha}^r(\Omega)$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial n^s} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{для всех } s = 0, 1, \dots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали.

Из теоремы 4.1 следует, что если выполняется условие эллиптичности (1.5), $a_{kl} \in C(\bar{\Omega})$ при $|k| = |l| = r$ и $a_{kl} \in L_{p_{kl}}(\Omega; \rho^{-n/p_{kl}})$ при $|k| + |l| \leq 2r - 1$, где p_{kl} такие же, как в теореме 3.1, то существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in (\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^r(\Omega))'$ задача D'_λ имеет единственное решение и выполняется оценка вида (4.5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Кудрявцев, “Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений”, Тр. МИАН, **55**, Изд-во АН СССР, М., 1959, 3–182.
- [2] С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, Н. В. Мирошин, “Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений”, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, № 8, 4–30.
- [3] Н. В. Мирошин, “Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора”, *Дифференц. уравнения*, **24**:3 (1988), 455–464.
- [4] С. А. Исмоков, “О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **31**:4 (1995), 641–653.
- [5] С. А. Исмоков, “On solvability and smoothness of a solution of the variational Dirichlet problem for degenerate elliptic equations in the half-space”, *Матем. заметки ЯГУ*, **5**:2 (1999), 86–106.
- [6] С. А. Исмоков, “О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением”, *Дифференц. уравнения*, **39**:11 (2003), 1536–1542.
- [7] L. Nirenberg, “On elliptic partial differential equations”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **13**:3 (1959), 115–162.
- [8] V. I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, Teubner-Texte Math., **137**, B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [9] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [10] Ю. В. Егоров, *Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы*, Учеб. пособие, МГУ, М., 1985.

С. А. Исмоков

Институт математики АН Республики Таджикистан,
г. Душанбе
E-mail: sulaimon@mail.ru

Поступило
22.09.2008