Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кандаян, В. Н. Сорокин, Многоточечные аппроксимации Эрмита–Паде бета-функций, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 217–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:35:20

Многоточечные аппроксимации Эрмита–Паде бета-функций

А. А. Кандаян, В. Н. Сорокин

Построены многоточечные аппроксимации Эрмита–Паде для двух бета-функций, образующих систему Никишина с бесконечными дискретными мерами и неограниченными носителями. Исследовано асимптотическое поведение аппроксимаций. Результат проинтерпретирован в терминах векторной задачи равновесия теории логарифмического потенциала при наличии внешнего поля и ограничений на меры.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В работе [1] первый автор изучал многоточечные аппроксимации Паде (интерполяцию рациональными функциями со свободными полюсами) бета-функции.

Через $B(p, q)$ обозначим бета-функцию (интеграл Эйлера первого рода), а именно:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

где $\Gamma(p)$ – гамма-функция (интеграл Эйлера второго рода). Зафиксируем параметр α такой, что $0 < \alpha < 1$. Определим функцию

$$f_\alpha(z) = B(\alpha, z), \quad (1.1)$$

мероморфную во всей комплексной плоскости, имеющую простые полюсы в точках

$$x_m = -m, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.2)$$

с вычетами, равными

$$\mu_m^\alpha = \frac{(1-\alpha)_m}{m!}, \quad (1.3)$$

где

$$(p)_m = p(p+1) \cdots (p+m-1)$$

– символ Похгаммера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3906.2008.1).

Справедливо следующее разложение Миттаг-Лефлера функции $f_\alpha(z)$ в сумму главных лорановских частей:

$$f_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_m^\alpha}{z - x_m}. \quad (1.4)$$

Обозначим через μ^α меру, помещенную в точки (1.2) с массами, равными (1.3). Мера μ^α бесконечная, дискретная, с неограниченным носителем. Разложение (1.4) можно переписать в виде преобразования Коши:

$$f_\alpha(z) = \widehat{\mu^\alpha}(z) = \int \frac{d\mu^\alpha(x)}{z - x}.$$

Зафиксируем параметр $\beta > 0$. Поставим следующую задачу теории приближений.

ЗАДАЧА (P1). Для каждого целого неотрицательного числа n требуется найти многочлены Q_n и P_n такие, что

- 1) $\deg Q_n \leq n, \deg P_n \leq n$;
- 2) $Q_n \not\equiv 0$;
- 3) функции второго рода

$$R_n(z) = Q_n(z)f_\alpha(z) - P_n(z)$$

удовлетворяют интерполяционным условиям

$$R_n(\beta + k) = 0, \quad k = 0, \dots, 2n.$$

Задача (P1) равносильна соотношениям ортогональности с переменным весом для многочленов Q_n :

$$\int Q_n(x) x^l \frac{d\mu^\alpha(x)}{\omega_n(x)} = 0, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad (1.5)$$

где

$$\omega_n(x) = (x - \beta)(x - (\beta + 1)) \cdots (x - (\beta + 2n)).$$

Эта задача имеет единственное (с точностью до нормировки) решение. Все нули многочлена Q_n простые и лежат в промежутке $(-\infty, 0)$. По теореме Чебышева–Маркова–Стилтьеса точки x_m разделяют эти нули.

Ставится вопрос о распределении нулей многочленов Q_n . Для решения этой задачи требуется ввести масштабирование

$$Q_n^*(z) = C_n Q_n(nz), \quad (1.6)$$

где C_n – нормировочная постоянная такая, что старший коэффициент многочлена Q_n^* равен единице. Обозначим через λ предельную меру распределения нулей многочленов Q_n^* . Эта мера имеет равновесный потенциал во внешнем поле, порожденным переменным весом в соотношениях ортогональности (1.5), а именно: $\phi = -V^{\lambda_\omega}$, где λ_ω – классическая мера Лебега на отрезке $[0, 2]$, а V^{λ_ω} – ее логарифмический потенциал:

$$V^{\lambda_\omega}(z) = \int \log \frac{1}{|z - t|} d\lambda_\omega(t), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Теорема о разделении нулей приводит к ограничению на меру λ . Мы приходим к следующей задаче равновесия теории логарифмического потенциала.

ЗАДАЧА (L1). Требуется найти меру λ такую, что

- 1) носитель этой меры $S(\lambda)$ лежит на промежутке $\Delta = (-\infty, 0]$;
- 2) полная вариация меры равна единице: $\|\lambda\| = 1$;
- 3) выполняется ограничение

$$\lambda \leq \lambda_c, \quad (1.7)$$

где λ_c – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

- 4) с некоторой постоянной w справедливо условие равновесия

$$W = 2V^\lambda + \phi \begin{cases} \leq w & \text{на } S(\lambda), \\ \geq w & \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda) \setminus S(\lambda_c - \lambda)). \end{cases}$$

Условие 4) представляет собой обобщенное условие равновесия, с учетом внешнего поля и при условии ограничения на меру. В частности, функция W равна некоторой константе на той части носителя меры, где она не достигает ограничения. В дальнейшем, для краткости, по аналогии с классическим случаем, условие такого типа будем просто называть *условиями равновесия*.

Мерами мы называем положительные борелевские меры. Неравенство (1.7) означает, что разность $\lambda_c - \lambda$ также является мерой.

Из результатов Гончара и Рахманова [2], [3] следует, что задача (L1) имеет единственное решение.

В работе [1] было доказано, что мера λ действительно является предельным распределением нулей многочленов Q_n^* , т.е. что

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \log |Q_n^*(x)| \rightarrow V^\lambda(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus S(\lambda)$. Был получен явный вид этой меры. Ее носителем служит весь промежуток Δ . Она достигает ограничителя (1.7) (констрейнт) на отрезке $[-1/4, 0]$. Результаты были распространены на все комплексные значения параметров α и β . Так называемая слабая асимптотика (1.8) не зависит от выбора этих параметров.

Далее мы изучаем аналогичную конструкцию для аппроксимаций Эрмита–Паде.

2. Постановка задачи. Зафиксируем два параметра α_1 и α_2 такие, что

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1.$$

Система двух функций $\{f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}\}$, определенных в (1.1), образует систему Никишина [4], [5]. Это означает, что функции f_{α_j} являются преобразованиями Коши некоторых мер μ^{α_j} на промежутке Δ . Мера μ^{α_2} абсолютно непрерывна относительно меры μ^{α_1} , т.е. существует производная Радона–Никодима

$$u(x) = \frac{d\mu^{\alpha_2}(x)}{d\mu^{\alpha_1}(x)}.$$

Функция $u(x)$, изначально определенная лишь в точках (1.2), может быть продолжена на всю комплексную плоскость формулой

$$u(x) = \frac{\Gamma(1 - \alpha_1) \Gamma(1 - x - \alpha_2)}{\Gamma(1 - \alpha_2) \Gamma(1 - x - \alpha_1)}$$

как мероморфная функция, имеющая простые полюсы в точках

$$t_k = 1 - \alpha_2 + k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.1)$$

с вычетами, равными $-\nu_k$, где

$$\nu_k = \frac{1}{B(1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1)} \frac{(1 + \alpha_1 - \alpha_2)_k}{k!}.$$

Справедливо разложение Миттаг-Лефлера

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{t_k - x}. \quad (2.2)$$

Обозначим через ν меру, сосредоточенную в полюсах t_k с массами ν_k соответственно. Разложение (2.2) может быть переписано как преобразование Коши

$$u(x) = -\widehat{\nu}(x).$$

Мера ν бесконечная, дискретная, с неограниченным носителем на промежутке $F = [0, +\infty)$. Промежутки Δ и F не перекрываются.

Зафиксируем параметр $\beta > 0$. Поставим многоточечную задачу Эрмита–Паде второго типа.

ЗАДАЧА (P2). Для каждого целого неотрицательного числа n требуется найти многочлены $Q_n, P_{n,1}, P_{n,2}$ такие, что

- 1) $\deg Q_n \leq 2n, \deg P_{n,1} \leq 2n, \deg P_{n,2} \leq 2n$;
- 2) $Q_n \not\equiv 0$;
- 3) для функций второго рода

$$R_{n,j} = Q_n f_{\alpha_j} - P_{n,j}, \quad j = 1, 2,$$

выполняются интерполяционные условия

$$R_{n,j}(\beta + k) = 0, \quad k = 0, \dots, 3n, \quad j = 1, 2.$$

Задача (P2) равносильна системе соотношений ортогональности с переменным весом

$$\int Q_n(x) x^l \frac{d\mu^{\alpha_j}(x)}{\omega_n(x)} = 0, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2. \quad (2.3)$$

Здесь и далее

$$\omega_n(x) = (x - \beta)(x - (\beta + 1)) \cdots (x - (\beta + 3n)). \quad (2.4)$$

Цель работы состоит в исследовании поведения нулей многочленов Q_n .

3. Системы Никишина. В этом пункте мы напомним предложенную в работе [6] схему, с помощью которой изучаются системы Никишина.

Обозначим

$$R_n(z) = R_{n,1}(z)u(z) - R_{n,2}(z)$$

и рассмотрим следующую комбинацию функций второго рода:

$$\frac{R_n(z)}{\omega_n(z)} = \frac{R_{n,1}(z)}{\omega_n(z)} u(z) - \frac{R_{n,2}(z)}{\omega_n(z)} = \int \frac{R_{n,1}(t)}{\omega_n(t)} \frac{d\nu(t)}{t-z}.$$

Справедливы соотношения ортогональности

$$\int \frac{R_{n,1}(t)}{\omega_n(t)} t^l d\nu(t) = 0, \quad l = 0, \dots, n-1. \quad (3.1)$$

Функция $R_{n,1}/\omega_n$ имеет по крайней мере n перемен знака внутри F . Нули этой функции называются *дополнительными точками интерполяции*. Они разделены точками (2.1). Обозначим P_n многочлен с нулями в точках дополнительной интерполяции, а N – его степень. Тогда будут справедливы соотношения ортогональности

$$\int_{\Delta} Q_n(x) x^l \frac{d\mu^{\alpha_1}(x)}{P_n(x)\omega_n(x)} = 0, \quad l = 0, \dots, n+N-1. \quad (3.2)$$

Многочлен Q_n имеет по крайней мере $n+N$ перемен знака внутри Δ . Следовательно, $N = n$, и $\deg Q_n = 2n$. Нули многочлена Q_n разделены точками (1.2). Соотношения (3.1) можно переписать как условия ортогональности для многочлена P_n :

$$\int_F P_n(t) t^l \frac{R_{n,1}(t)}{P_n(t)\omega_n(t)} d\nu(t) = 0, \quad l = 0, \dots, n-1. \quad (3.3)$$

В частности, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Задача (P2) имеет единственное (с точностью до нормировки) решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Непосредственным вычислением определителей можно доказать, что предложение 1 справедливо для любых комплексных значений параметров таких, что числа α_1 , α_2 , $\alpha_1 - \alpha_2$ не являются целыми.

Обозначим через λ_{Δ} и λ_F предельные распределения нулей масштабированных формулой (1.6) многочленов Q_n^* и P_n^* (пока в предположении, что они существуют). Тогда система соотношений ортогональности (3.2), (3.3) приводит нас к следующей задаче равновесия теории логарифмического потенциала.

ЗАДАЧА (L2). Требуется найти две меры λ_{Δ} и λ_F такие, что

- 1) $S(\lambda_{\Delta}) \subset \Delta = (-\infty, 0]$, $S(\lambda_F) \subset F = [0, +\infty)$;
- 2) $\|\lambda_{\Delta}\| = 2$, $\|\lambda_F\| = 1$;
- 3) выполняются ограничения

$$\lambda_{\Delta} \leq \lambda_{c_{\Delta}}, \quad \lambda_F \leq \lambda_{c_F}, \quad (3.4)$$

где $\lambda_{c_{\Delta}}$ и λ_{c_F} – классические меры Лебега на промежутках Δ и F соответственно;

4) с некоторыми постоянными w_Δ и w_F справедливы условия равновесия

$$\begin{aligned} W_\Delta = 2V^{\lambda_\Delta} - V^{\lambda_F} + \phi &\leq w_\Delta \quad \text{на } S(\lambda_\Delta), \\ &\geq w_\Delta \quad \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda_\Delta) \setminus S(\lambda_{c_\Delta} - \lambda_\Delta)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} W_F = 2V^{\lambda_F} - V^{\lambda_\Delta} &\leq w_F \quad \text{на } S(\lambda_F), \\ &\geq w_F \quad \text{на } F \setminus (S(\lambda_F) \setminus S(\lambda_{c_F} - \lambda_F)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где внешним полем ϕ служит логарифмический потенциал классической меры Лебега l_ω на отрезке $[0, 3]$: $\phi = -V^{l_\omega}$.

Задача (L2) имеет единственное решение. Аналогичные задачи рассматривались ранее в работах [7]–[9].

4. Основные результаты. В работе доказано, что предельное распределение нулей многочленов Q_n^* существует. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Существует предел*

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \log |Q_n^*(x)| \rightarrow V^{\lambda_\Delta}(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus S(\lambda_\Delta)$.

Теорема 1 доказана методом перевала. При этом получен явный вид мер λ_Δ и λ_F . Он приведен ниже в теореме 2. Прежде чем сформулировать теорему 2, введем необходимые обозначения.

Положим

$$x_\pm = \frac{-10 \pm 7\sqrt{7}}{54}.$$

Построим трехлистное накрытие $\mathfrak{R}$ сферы Римана, которое получается склейкой следующих листов:

$$\mathfrak{R}_- = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, x_-], \quad \mathfrak{R}_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-\infty, x_-] \cup [x_+, +\infty]), \quad \mathfrak{R}_+ = \overline{\mathbb{C}} \setminus [x_+, +\infty].$$

На римановой поверхности $\mathfrak{R}$ определим мероморфную функцию θ ее дивизором. Функция θ имеет нуль второго порядка в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_0$ и нуль первого порядка в точке $x = 3$ на листе $\mathfrak{R}_-$. Функция θ имеет полюс второго порядка в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_-$ и полюс первого порядка в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_+$. Нормируем эту функцию условием $\theta = 1$ при $x = \infty$. Обозначим θ_j однозначную ветвь функции θ на проекции листа $\mathfrak{R}_j$, $j = -, 0, +$.

Положим

$$h_\Delta(x) = \log \theta_-(x) + \log \left\{ \frac{x}{x-3} \right\}.$$

Функция $h_\Delta(x)$ голоморфна в области $D_\Delta = \mathbb{C} \setminus \Delta$. При $x \rightarrow \infty$ выделяем главные ветви обоих логарифмов такие, что $\log 1 = 0$. Тогда

$$h_\Delta(x) \sim \frac{2}{x} \quad \text{при } x \in D_\Delta, \quad x \rightarrow \infty.$$

Пусть далее

$$h_F(x) = -\log \theta_+(x).$$

Функция $h_F(x)$ голоморфна в области $D_F = \mathbb{C} \setminus F$. Однозначную ветвь логарифма выделяем условием

$$h_F(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при } x \in D_F, \quad x \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы формулы*

$$\widehat{\lambda}_\Delta = h_\Delta, \quad \widehat{\lambda}_F = h_F.$$

При этом

$$S(\lambda_\Delta) = \Delta, \quad S(\lambda_F) = F.$$

Мера λ_Δ достигает ограничитель на отрезке $[x_-, 0]$, мера λ_F достигает ограничитель на отрезке $[0, x_+]$. Постоянные равновесия w_Δ и w_F равны нулю.

Следующие пункты посвящены доказательству теорем 1 и 2.

5. Формула Родрига. В основе доказательства основных результатов работы лежит явная формула для многочленов Q_n .

Через $\mathcal{D}_\alpha^{(n)}$ мы обозначаем следующий разностный оператор:

$$\mathcal{D}_\alpha^{(n)} = \frac{1}{g_\alpha(x)} \frac{1}{n!} \Delta^n g_{\alpha-n}(x),$$

где

$$g_\alpha(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-x)}{\Gamma(1-x)},$$

а Δ – оператор конечной разности:

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедлива формула Родрига*

$$\frac{Q_n(x)}{\omega_n(x)} = \mathcal{D}_{\alpha_2}^{(n)} \mathcal{D}_{\alpha_1}^{(n)} \frac{1}{\omega_n^*(x)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (5.1)$$

где

$$\omega_n^*(x) = (x - (\beta + 2n)) \cdots (x - (\beta + 3n)),$$

а многочлен $\omega_n(x)$ определен формулой (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к трем утверждениям.

1) Необходимо проверить, что формула (5.1) определяет некоторый многочлен Q_n степени $2n$.

Вначале рассмотрим следующую промежуточную формулу:

$$\frac{\widetilde{Q}_n(x)}{\widetilde{\omega}_n(x)} = \mathcal{D}_{\alpha_1}^{(n)} \frac{1}{\omega_n^*(x)}, \quad (5.2)$$

где

$$\widetilde{\omega}_n(x) = (x - (\beta + n)) \cdots (x - (\beta + 3n)).$$

Последовательно применяя оператор Δ , получим систему рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n^{m+1}(x) &= (x - (\beta + 3n))(-x)\tilde{Q}_n^m(x+1) \\ &\quad - (x - (\beta + 2n - m - 1))(-\alpha_1 + n - m - x)\tilde{Q}_n^m(x),\end{aligned}\quad (5.3)$$

где $m = 0, \dots, n-1$. Начальным условием служит многочлен $\tilde{Q}_n^0 = 1$. Тогда

$$\tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{n!} \tilde{Q}_n^n(x).$$

Из (5.3) следует, что степень многочлена $\tilde{Q}_n^{m+1}$ на единицу больше степени многочлена $\tilde{Q}_n^m$. Таким образом, $\tilde{Q}_n$ – многочлен степени ровно n . Аналогично получаем вторую систему рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}Q_n^{m+1}(x) &= (x - (\beta + 3n))(-x)Q_n^m(x+1) \\ &\quad - (x - (\beta + n - m - 1))(-\alpha_2 + n - m - x)Q_n^m(x),\end{aligned}$$

где $m = 0, \dots, n-1$. Начальным условием служит многочлен $Q_n^0 = \tilde{Q}_n$. Тогда

$$Q_n(x) = \frac{1}{n!} Q_n^n(x).$$

Следовательно, Q_n – многочлен степени $2n$.

2) Проверим, что многочлен Q_n , определенный формулой (5.1), удовлетворяет соотношениям ортогональности (2.3) с мерой $d\mu^{\alpha_2}$.

Заметим, что

$$g_{\alpha_2}(x_m) = \Gamma(1 - \alpha_2)\mu_m^{\alpha_2}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно,

$$\int_{\Delta} Q_n(x)x^l \frac{d\mu^{\alpha_2}(x)}{\omega_n(x)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} x_m^l (\Delta^n G_n)(x_m),$$

где

$$G_n(x) = g_{\alpha_2-n}(x) \frac{\tilde{Q}_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}.$$

Функция $G_n(x)$ имеет нули в точках $1, \dots, n$. Применим n раз преобразование Абеля – формулу суммирования по частям. Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m^l (\Delta^n G_n)(x_m) = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} G_n(x) (\mathbb{L}\Delta)^n x^l \Big|_{x=x_m},$$

где

$$(\mathbb{L}F)(x) = f(x-1)$$

– оператор левого сдвига. Если $l = 0, \dots, n-1$, то

$$(\mathbb{L}\Delta)^n x^l = 0.$$

Соотношения ортогональности доказаны.

3) Для того, чтобы проверить соотношения ортогональности (2.3) с мерой $d\mu^{\alpha_1}$, достаточно доказать, что операторы $\mathcal{D}_{\alpha_1}^{(n)}$ и $\mathcal{D}_{\alpha_2}^{(n)}$ коммутируют.

Пусть $F(\alpha_1, \alpha_2; x)$ – произвольная рациональная функция от переменной x и параметров α_1, α_2 . Положим

$$F_n(\alpha_1, \alpha_2; x) = \mathcal{D}_{\alpha_2}^{(n)} \mathcal{D}_{\alpha_1}^{(n)} F(\alpha_1, \alpha_2; x), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Требуется доказать, что если F – симметрическая функция от параметров, то F_n также будет симметрической функцией. Из определения F_n легко следует рекуррентная формула

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2; x) &= (x + x^2)F_n(\alpha_1, \alpha_2; x + 2) + (((2n + 1) - (\alpha_1 + \alpha_2))x - 2x^2)F_n(\alpha_1, \alpha_2; x + 1) \\ &\quad + ((n + 1 - \alpha_1)(n + 1 - \alpha_2) - ((2n + 2) - (\alpha_1 + \alpha_2))x + x^2)F_n(\alpha_1, \alpha_2; x), \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку коэффициенты этой формулы симметрично зависят от параметров α_1, α_2 , требуемое утверждение получается индукцией по n .

Поскольку многочлен Q_n степени $2n$ определен соотношениями ортогональности (2.3) единственным образом (с точностью до нормировки), формула Родрига (5.1) доказана с некоторой стандартной нормировкой этих многочленов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Многочлен $Q_n(x)$ является многочленом от параметров α_1, α_2 и β . Поэтому формула Родрига дает аналитическое продолжение этих многочленов на все комплексные значения параметров.

6. Промежуточная асимптотика. Рассмотрим многочлены $\tilde{Q}_n$, определенные формулой (5.2). Эти многочлены удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_{\Delta} \tilde{Q}_n(x) x^l \frac{d\mu^{\alpha_1}(x)}{\tilde{\omega}_n(x)} = 0, \quad l = 0, \dots, n-1. \quad (6.1)$$

Многочлены $\tilde{Q}_n$ служат решением соответствующей интерполяционной задачи.

ЗАДАЧА (P3). Для каждого целого неотрицательного числа n требуется найти многочлены $\tilde{Q}_n$ и $\tilde{P}_n$ такие, что

- 1) $\deg \tilde{Q}_n \leq n, \deg \tilde{P}_n \leq n$;
- 2) $\tilde{Q}_n \not\equiv 0$;
- 3) для функций второго рода

$$\tilde{R}_n = \tilde{Q}_n f_{\alpha_1} - \tilde{P}_n$$

выполняются интерполяционные условия

$$\tilde{R}_n(\beta + k) = 0, \quad k = n, \dots, 3n.$$

Задача (P3) имеет единственное (с точностью до нормировки) решение. Будем изучать асимптотику масштабированных формулой (1.6) многочленов $\tilde{Q}_n^*$. Обозначим через $\tilde{\lambda}$ предельную меру распределения нулей этих многочленов. Ниже будет доказано, что она существует. Из соотношений ортогональности (6.1) следует, что эта мера является решением следующей задачи равновесия теории логарифмического потенциала.

ЗАДАЧА (L3). Требуется найти меру $\tilde{\lambda}$ такую, что

- 1) $S(\tilde{\lambda}) \subset \Delta$;
- 2) $\|\tilde{\lambda}\| = 1$;
- 3) выполняется ограничение

$$\tilde{\lambda} \leq \lambda_c, \quad (6.2)$$

где λ_c – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

- 4) с некоторой постоянной $\tilde{w}$ справедливо условие равновесия

$$\begin{aligned} \tilde{W} = 2V^{\tilde{\lambda}} + \tilde{\phi} &\leq \tilde{w} \quad \text{на } S(\tilde{\lambda}), \\ &\geq \tilde{w} \quad \text{на } \Delta \setminus (S(\tilde{\lambda}) \setminus S(\lambda_c - \tilde{\lambda})), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где внешним полем $\tilde{\phi}$ служит логарифмический потенциал классической меры Лебега $l_{\tilde{\omega}}$ на отрезке $[1, 3]$: $\tilde{\phi} = -V^{l_{\tilde{\omega}}}$.

Решение задачи (L3) существует и единственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Справедливы следующие утверждения.

- 1) Существует предел

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \log |\tilde{Q}_n^*| \rightarrow V^{\tilde{\lambda}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus S(\tilde{\lambda})$.

- 2) Носителем меры $\tilde{\lambda}$ является промежуток Δ . Эта мера достигает ограничитель (6.2) на отрезке $[-1/8, 0]$. Плотность меры определена формулой

$$\frac{d\tilde{\lambda}(x)}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{если } -\frac{1}{8} \leq x \leq 0, \\ \arccos \frac{2x^2 - 4x - 1}{2|x|\sqrt{|x-1||x-3|}}, & \text{если } -\infty < x \leq -\frac{1}{8}. \end{cases} \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем равенство (5.2) по интегральной формуле Коши

$$\frac{\tilde{Q}_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)} g_{\alpha_1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g_{\alpha_1-n}(t)}{\omega_n^*(t)} \frac{dt}{\kappa_n(t-x)}, \quad (6.5)$$

где

$$\kappa_n(z) = z(z-1) \cdots (z-n).$$

Для определенности будем считать, что точка x лежит в верхней полуплоскости. Тогда γ – жорданов контур, лежащий в верхней полуплоскости и содержащий внутри себя точки $x, x+1, \dots, x+n$. В формуле (6.5) сделаем масштабирование $x \mapsto nx$ и замену переменной $t \mapsto nt$. Получим

$$\frac{\tilde{Q}_n(nx)}{\tilde{\omega}_n(nx)} g_{\alpha_1}(nx) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^*} \frac{g_{\alpha_1-n}(nt)n dt}{\omega_n^*(nt)\kappa_n(n(t-x))}. \quad (6.6)$$

Контур γ^* лежит в верхней полуплоскости и обходит отрезок $[x, x+1]$.

При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{n}\right) \log \frac{|\tilde{\omega}_n(nx)|}{n^{2n+1}} &\rightarrow V^{l_{\tilde{\omega}}}(x), & x \in \mathbb{C} \setminus [1, 3], \\ \left(-\frac{1}{n}\right) \log \frac{|\omega_n^*(nt)|}{n^{n+1}} &\rightarrow V^{l_{\omega^*}}(t), & t \in \mathbb{C} \setminus [2, 3]; \\ \left(-\frac{1}{n}\right) \log \frac{|\kappa_n(nz)|}{n^{n+1}} &\rightarrow V^{l_{\kappa}}(z), & z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]. \end{aligned}$$

Здесь $l_{\tilde{\omega}}$, l_{ω^*} , l_{κ} – классические меры Лебега на соответствующих отрезках. При вычислении асимптотики интеграла (6.6) в него войдут комплексные логарифмические потенциалы

$$\mathcal{V}^{l_{\omega^*}}(t) = \int_2^3 \log \frac{1}{t-s} ds = (t-3) \log(t-3) - (t-2) \log(t-2) + 1, \quad (6.7)$$

$$\mathcal{V}^{l_{\kappa}}(z) = \int_0^1 \log \frac{1}{z-x} dx = (z-1) \log(z-1) - z \log z + 1. \quad (6.8)$$

В формулах (6.7) и (6.8) берем главные ветви логарифмов при $t > 3$ и $z > 1$ соответственно. Функция (6.8) при $z = t - x$ не является однозначной на контуре γ^* , но ее производная и экспонента суть однозначные функции. По формуле Стирлинга

$$\left(-\frac{1}{n}\right) \log g_{\alpha_1-n}(nt) - (1 - \pi i - \log n) \rightarrow (t-1) \log(t-1) - t \log t, \quad n \rightarrow \infty,$$

где аргументы чисел t и $t-1$ лежат на интервале $(0, \pi)$. Слабый предел левой части равенства (6.6) с точностью до нормировочной постоянной равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \log \left| \int_{\gamma^*} e^{nS(x,t)} dt \right|, \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned} S(x, t) &= (t-3) \log(t-3) - (t-2) \log(t-2) + (t-x-1) \log(t-x-1) \\ &\quad - (t-x) \log(t-x) + t \log t - (t-1) \log(t-1). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Однозначные ветви логарифмов выделены указанным выше способом. Для нахождения предела (6.9) применим метод перевала. Найдем критические точки функции (6.10):

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) = \log \frac{(t-3)(t-x-1)t}{(t-2)(t-x)(t-1)} = 0,$$

что равносильно квадратному уравнению

$$t^2 - t - 2x = 0. \quad (6.11)$$

В области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/8]$ выделим следующую ветвь корня уравнения (6.11):

$$t_*(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 8x}}{2}, \quad (6.12)$$

где

$$\sqrt{1+8x} > 0 \quad \text{при} \quad x > -\frac{1}{8}.$$

Критическая точка (6.12) дает асимптотику интеграла (6.9).

Положим

$$S_*(x) = S(x, t_*(x)). \quad (6.13)$$

Тогда предел в (6.9) равен $-\operatorname{Re} S_*(x)$. Таким образом, мера $\tilde{\lambda}$ существует и вычисляется по формуле

$$V^{\tilde{\lambda}} = V^{l_{\tilde{\omega}}} - \operatorname{Re} S_* - 1.$$

Найдем формальную комплексную производную

$$\tilde{h} = \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} S_* - V^{l_{\tilde{\omega}}}).$$

Имеем

$$\tilde{h}(x) = \log \left\{ \frac{\sqrt{1+8x} - 2x + 1}{\sqrt{1+8x} - 2x - 1} \frac{x-1}{x-3} \right\}. \quad (6.14)$$

Функция $\tilde{h}(x)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Ветвь логарифма выделяем условием

$$\tilde{h}(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad x \rightarrow \infty.$$

Точки $x = 1$ и $x = 3$ являются устранимыми особыми точками.

Плотность меры $\tilde{\lambda}$ вычисляется по формуле Сохоцкого

$$\frac{d\tilde{\lambda}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \tilde{h}(x - i \cdot 0), \quad -\infty < x < 0.$$

Если $-1/8 < x < 0$, то выражение, стоящее под знаком логарифма в формуле (6.14), отрицательно и в силу указанного выше выбора ветви его аргумент равен π . Таким образом,

$$\frac{d\tilde{\lambda}(x)}{dx} = 1, \quad -\frac{1}{8} < x < 0.$$

Другими словами, мера $\tilde{\lambda}$ достигает ограничитель (6.2) на отрезке $[-1/8, 0]$. Если $-\infty < x < -1/8$, то под знаком логарифма в (6.14) стоит комплексное число и плотность меры вычисляется по формуле (6.4).

Проверим условия равновесия (6.3). Найдем производную вдоль вещественной оси потенциала $\tilde{W}$. Имеем

$$-\frac{d}{dx} \tilde{W}(x) = \log \left| \left(\frac{\sqrt{1+8x} - 2x + 1}{\sqrt{1+8x} - 2x - 1} \right)^2 \frac{x-1}{x-3} \right|. \quad (6.15)$$

Если $-\infty < x < -1/8$, то выражение под знаком логарифма в (6.15) тождественно равно единице и, следовательно, $\tilde{W}'(x) = 0$. Тем самым, функция $\tilde{W}(x)$ – константа на промежутке $(-\infty, -1/8]$. Если же $-1/8 < x < 0$, то, как легко видеть из (6.15), $\tilde{W}'(x) < 0$. Тем самым, функция $\tilde{W}(x)$ убывает на отрезке $[-1/8, 0]$. Что и требовалось доказать.

Из поведения потенциалов на бесконечности следует, что постоянная равновесия $\tilde{w} = 0$.

Предложение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства видно, что предложение 3 справедливо для любых комплексных значений параметра α_1 и параметра β .

7. Доказательство основных результатов. Рассуждая так же, как в п. 6, получим, что предел (4.1) существует и равен

$$V^{l_\omega} - \operatorname{Re} \Sigma_\star - 1, \quad (7.1)$$

где

$$\Sigma_\star(x) = \Sigma(x, t_\star(x))$$

– соответствующее критическое значение функции

$$\begin{aligned} \Sigma(x, t) = S_\star(t) + t \log t - (t-1) \log(t-1) \\ + (t-x-1) \log(t-x-1) - (t-x) \log(t-x). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Функция $S_\star(t)$ определена формулами (6.10), (6.12), (6.13), а выбор ветвей многозначных функций в (7.2) такой же, как в п. 6. Критические точки функции (7.2) находим из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma(x, t) = 0.$$

Получим

$$\log \frac{t(t-x-1)}{(t-1)(t-x)} \frac{\sqrt{1+8t}-2t+1}{\sqrt{1+8t}-2t-1} = 0,$$

что равносильно кубическому уравнению

$$t^3 - 2t^2 + (x+1)t - x(2x+1) = 0. \quad (7.3)$$

При $x \rightarrow \infty$ корни уравнения (7.3) ведут себя следующим образом:

$$t \sim \sqrt[3]{2x^2}.$$

Следовательно, алгебраическая функция $t(x)$ имеет в бесконечности ветвление 3-го порядка. Вычисляя дискриминант уравнения (7.3), находим его кратные корни:

- 1) при $x = 0$ имеем корень $t = 1$ кратности 2 и корень $t = 0$;
- 2) при $x = x_-$ имеем корень $t = (5 - \sqrt{7})/18$ кратности 2 и корень $t = (13 + \sqrt{7})/9$;
- 3) при $x = x_+$ имеем корень $t = (5 + \sqrt{7})/18$ кратности 2 и корень $t = (13 - \sqrt{7})/9$.

Легко видеть, что в точке $x = 0$ функция $t(x)$ ветвления не имеет. В точках $x = x_\pm$ она имеет ветвления второго порядка. Риманова поверхность $\mathfrak{R}$ этой функции определена в п. 4. Обозначим через $t_j(x)$ однозначную ветвь функции $t(x)$ на проекции листа $\mathfrak{R}_j$, где $j = -, 0, +$. Ветвь $t_-(x)$ характеризуется тем, что она принимает положительные значения при $x \rightarrow +\infty$. Аналогично, ветвь $t_+(x)$ принимает положительные значения при $x \rightarrow -\infty$. Отметим, что

$$t_0(0) = 0, \quad t_0\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

и

$$t_+(x) \approx 1 - 2x, \quad t_-(x) \approx 1 + x \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Вычислим производную

$$h_{\Delta}(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} \Sigma_{\star}(x) - V^{l_{\omega}}(x)).$$

Имеем

$$h_{\Delta}(x) = \log \left\{ \frac{t_{-}(x) - x}{t_{-}(x) - x - 1} \frac{x}{x - 3} \right\}, \quad (7.4)$$

где при $x \rightarrow +\infty$ берется главная ветвь логарифма. Функция h_{Δ} голоморфна в области $D_{\Delta} = \mathbb{C} \setminus \Delta$. При $x = 3$ она имеет устранимую особую точку. Функция

$$\frac{d\lambda_{\Delta}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} h_{\Delta}(x - i \cdot 0), \quad -\infty < x < 0,$$

неотрицательная. Тем самым, она является плотностью некоторой абсолютно непрерывной положительной меры λ_{Δ} . При этом $h_{\Delta} = \widehat{\lambda}_{\Delta}$, а функция (7.1) равна $V^{\lambda_{\Delta}}$. Поскольку $h_{\Delta}(x) \sim 2/x$ при $x \rightarrow \infty$, то $\|\lambda_{\Delta}\| = 2$. Если $x_{-} < x < 0$, то выражение под знаком логарифма в (7.4) отрицательно, и в соответствии с выбором ветви логарифма его аргумент равен π . Таким образом,

$$\frac{d\lambda_{\Delta}(x)}{dx} = 1 \quad \text{при} \quad x_{-} < x < 0.$$

Другими словами, мера λ_{Δ} достигает ограничитель (3.4) на отрезке $[x_{-}, 0]$.

Далее, рассмотрим функцию

$$h_F(x) = -\log \frac{t_{+}(x) - x}{t_{+}(x) - x - 1}.$$

Она голоморфна в области $D_F = \mathbb{C} \setminus F$. Аналогично предыдущему $h_F = \widehat{\lambda}_F$, где λ_F — абсолютно непрерывная положительная мера на промежутке F , которая достигает ограничитель (3.4) на отрезке $[0, x_{+}]$.

Проверим условия равновесия (3.5). Вычислим производную вдоль вещественной оси функции W_{Δ} :

$$H_{\Delta}(x) = -\frac{d}{dx} W_{\Delta}(x), \quad -\infty < x < 0.$$

Имеем

$$H_{\Delta}(x) = \log \left| \left(\frac{t_{-} - x}{t_{-} - x - 1} \right)^2 \frac{t_{+} - x}{t_{+} - x - 1} \frac{x}{x - 3} \right|.$$

Если алгебраическая функция $t(x)$ удовлетворяет уравнению (7.3), то алгебраическая функция

$$\theta = \frac{t - x}{t - x - 1}$$

удовлетворяет следующему кубическому уравнению:

$$x^3 \theta^3 - 3x(x^2 - x - 1)\theta^2 + (3x^3 - 6x^2 - 3x + 1)\theta - x^2(x - 3) = 0.$$

Функция θ имеет ту же риманову поверхность $\mathfrak{R}$, что и функция t . В п. 4 указан дивизор этой функции. Обозначим через θ_j ее однозначные ветви. По теореме Виета

$$\theta_{-} \theta_{+} \theta_0 = \frac{x - 3}{x}.$$

Следовательно,

$$H_{\Delta}(x) = \log \left| \theta_-^2 \theta_+ \frac{x}{x-3} \right| = \log \left| (\theta_- \theta_+ \theta_0) \frac{\theta_-}{\theta_0} \frac{x}{x-3} \right| = \log \left| \frac{\theta_-}{\theta_0} \right|,$$

где значения всех функций $\theta_j(x)$ берутся на одном и том же берегу разреза. При $-\infty < x < x_-$ числа $\theta_-(x)$ и $\theta_0(x)$ комплексно сопряженные и, следовательно, $H_{\Delta}(x) = 0$, т.е. функция $W_{\Delta}(x)$ постоянна на этом промежутке. Также легко видеть, что

$$H_{\Delta}(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_- < x < 0,$$

т.е. функция $W_{\Delta}(x)$ убывает на отрезке $[x_-, 0]$. Условие равновесия (3.5) доказано.

Вычислим производную вдоль вещественной оси функции W_F :

$$H_F(x) = -\frac{d}{dx} W_F(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

Имеем

$$H_F(x) = -\log \left| \left(\frac{t_+ - x}{t_+ - x - 1} \right)^2 \frac{t_- - x}{t_- - x - 1} \frac{x}{x-3} \right|.$$

Следовательно,

$$H_F(x) = -\log \left| \theta_+^2 \theta_- \frac{x}{x-3} \right| = -\log \left| (\theta_- \theta_+ \theta_0) \frac{\theta_+}{\theta_0} \frac{x}{x-3} \right| = -\log \left| \frac{\theta_+}{\theta_0} \right|.$$

При $x_+ < x < +\infty$ числа $\theta_+(x)$ и $\theta_0(x)$ комплексно сопряженные и, следовательно, $H_F(x) = 0$, т.е. функция $W_F(x)$ постоянна на этом промежутке. Далее,

$$H_F(x) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < x_+,$$

т.е. функция $W_F(x)$ возрастает на отрезке $[0, x_+]$. Условие равновесия (3.6) доказано.

Из поведения потенциалов на бесконечности следует, что постоянные равновесия w_{Δ} и w_F равны нулю.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теоремы 1 и 2 справедливы для любых комплексных значений параметров α_1 , α_2 и β .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Кандаян, “Многоточечные аппроксимации Паде бета-функций”, *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 189–203.
- [2] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4 (1985), 155–156.
- [3] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124.
- [4] Е. М. Никишин, “О совместных аппроксимациях Паде”, *Матем. сб.*, **113**:4 (1980), 499–519.
- [5] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 2, 33–41.
- [6] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58.

- [7] E. Coussement, W. Van Assche, “Asymptotics of multiple orthogonal polynomials associated with the modified Bessel functions of the first kind”, *J. Comput. Appl. Math.*, **153**:1–2 (2003), 141–149.
- [8] A. B. J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky, “Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights”, *Comm. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 217–275; [arXiv:math.CA/0712.1333](#).
- [9] В. Н. Сорокин, “Обобщенные многочлены Полачека”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 113–130.

А. А. Кандаян

Федеральная служба страхового надзора

E-mail: arthurmm@mail.ru

Поступило

30.01.2009

Исправленный вариант

09.07.2009

В. Н. Сорокин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vnsormm@mech.math.msu.su