Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Крутиков, О собственных значениях оператора Дирака, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 471–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 09:08:55

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Д. С. Крутиков

Связь между спектральными свойствами двумерного оператора Дирака, связанного с поведением релятивистского электрона в электростатическом поле [1], и одномерного оператора Шрёдингера хорошо известна (см. [1]–[3]). Многие факты, касающиеся оператора Шрёдингера, могут быть перенесены с определенными изменениями на случай оператора Дирака. Один из таких случаев рассматривается в данной работе.

В работе Киселева, Ласта, Саймона [4] доказано, что при потенциалах, убывающих на бесконечности не медленнее чем x^{-1} , положительные собственные значения оператора Шрёдингера образуют не более чем счетное множество с единственной возможной точкой накопления 0. Далее будет доказано, что при том же условии на потенциал верен аналогичный факт для оператора Дирака, с той разницей, что множество собственных значений оператора Дирака, лежащих вне интервала $(-m, m)$, имеет две возможные точки накопления m и $-m$.

1. Основной результат. В данной работе рассматриваются операторы Дирака, действующие в пространстве $L_2([0, \infty)) \times L_2([0, \infty))$ по формуле

$$H \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 - m & V_2 \\ V_2 & V_3 + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

При этом предполагается, что потенциалы V_i удовлетворяют условию $|V_i(x)| \leq C(1+x)^{-1}$, $i = 1, 2, 3$. Исследуется вопрос о расположении множества собственных значений оператора H , т.е. L_2 -решений уравнения

$$H \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность собственных значений оператора H такая, что $z_n > m$ при всех n . Тогда выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - m}{z_n + m} \leq 9C^2. \quad (1.3)$$

Аналогично, если $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность собственных значений оператора H такая, что $z_n < -m$ при всех n , то выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n + m}{z_n - m} \leq 9C^2. \quad (1.4)$$

В частности, собственные значения, лежащие вне интервала $(-m, m)$, образуют не более чем счетное множество с двумя возможными точками накопления m и $-m$.

2. Преобразования Прюфера. Произведем для оператора Дирака преобразования, аналогичные преобразованиям Прюфера для одномерного оператора Шрёдингера. Пусть $\alpha = -\sqrt{(z+m)/(z-m)}$. Функции R и φ определяются соотношением

$$\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = R(x, z) \begin{pmatrix} \sin \varphi(x, z) \\ \cos \varphi(x, z) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

После дифференцирования (2.1) получаем

$$\alpha u'_1 = R' \sin \varphi + R \varphi' \cos \varphi, \quad (2.2)$$

$$u'_2 = R' \cos \varphi - R \varphi' \sin \varphi. \quad (2.3)$$

Если z – собственное значение H , то, выразив u и u' в соотношении (1.2) через R и φ на основании (2.2) и (2.3), приходим к основным уравнениям, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$(\ln R)' = V_2 \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} \left(\frac{V_1}{\alpha} - \alpha V_3 \right) \sin(2\varphi), \quad (2.4)$$

$$\varphi' = -\sqrt{z^2 - m^2} - V_2 \sin(2\varphi) - \frac{V_1 \sin^2 \varphi}{\alpha} - \alpha V_3 \cos^2 \varphi. \quad (2.5)$$

3. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 [4]. Пусть f, g – функции класса $C^1([1, \infty])$ такие, что функция $|g'f| + |f'|$ лежит в $L_1([1, \infty])$. Тогда для любого $k \neq 0$ интегралы $\int_0^N f(x) e^{i(kx+g(x))} dx$ ограничены в совокупности при всех $N > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Интегралы

$$\int_0^N \frac{2 \sin(2\varphi_n(x)) \sin(2\varphi_i(y)) - \delta_{ni}}{2(1+y)} dy, \quad (3.1)$$

$$\int_0^N \frac{2 \cos(2\varphi_n(x)) \cos(2\varphi_i(y)) - \delta_{ni}}{2(1+y)} dy \quad (3.2)$$

ограничены в совокупности при $N > 0$, где $\varphi_j(x) = \varphi(x, z_j)$ соответствует собственной функции $\begin{pmatrix} u_1(x, z_j) \\ u_2(x, z_j) \end{pmatrix}$ оператора H с собственным значением $z_j \notin [-m, m]$ (δ_{ni} – символ Кронекера).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 1 к функциям $f(x) = (1+x)^{-1}$ и $g(x) = 4(\varphi_n(x) + \sqrt{z_n^2 - m^2} \cdot x)$ при $k = 4\sqrt{z_n^2 - m^2}$, получаем (3.1) и (3.2) при $n = i$, а применяя лемму 1 к функциям $g(x) = 2(\varphi_n(x) + \varphi_i(x) + \sqrt{z_n^2 - m^2} \cdot x + \sqrt{z_i^2 - m^2} \cdot x)$ и $g(x) = 2(\varphi_n(x) - \varphi_i(x) + \sqrt{z_n^2 - m^2} \cdot x - \sqrt{z_i^2 - m^2} \cdot x)$ при тех же $f(x)$ и k , получаем соответственно (3.1) и (3.2) при $n \neq i$. Во всех трех случаях (2.5) обеспечивает оценку $|g'(x)| \leq 4(\alpha|V_3| + |V_2| + |V_3/\alpha|) = O(1/x)$, $x \rightarrow \infty$, из которой следует, что выбранные функции удовлетворяют условиям леммы 1.

ЛЕММА 2 [4]. Если конечное множество единичных векторов $\{e_i\}_{i=1}^N$ в гильбертовом пространстве H удовлетворяет условию $\beta = \sup_{i \neq j} (e_i, e_j)_H < 1/N$, то для любого вектора g из пространства H верно неравенство

$$\sum_{i=1}^N |(g, e_i)_H|^2 \leq (1 + \beta N) \|g\|^2.$$

Пусть $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел такая, что $B_j \rightarrow \infty$, и пусть H_j^3 обозначает пространство $H_j \oplus H_j \oplus H_j$, где

$$H_j = L^2((0, B_j), (1+x) dx).$$

Положим для любых натуральных j и n вектор $h_n^{(j)}$ равным $(e_n^{(j)}, f_n^{(j)}, e_n^{(j)})/\sqrt{3}$, где

$$e_n^{(j)} = \frac{\sin(2\phi_n(x))}{\sqrt{N_n^{(j)}(1+y)}}, \quad f_n^{(j)} = \frac{\cos(2\phi_n(x))}{\sqrt{M_n^{(j)}(1+y)}}.$$

Для того чтобы $h_n^{(j)}$ был единичным вектором, нормировочные множители $N_n^{(j)}$ и $M_n^{(j)}$ определим по формулам

$$N_n^{(j)} = \int_0^{B_j} \frac{\sin^2(2\phi_n(y))}{1+y} dy, \quad M_n^{(j)} = \int_0^{B_j} \frac{\cos^2(2\phi_n(y))}{1+y} dy.$$

Тогда выполнено

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого вектора g из H_j^3 и для любого натурального числа N верно неравенство

$$\sum_{i=1}^N |(g, h_n^{(j)})_{H_j^3}|^2 \leq \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln B_j}\right)\right) \|g\|_{H_j^3}^2, \quad j \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании следствия 1 легко получить при $j \rightarrow \infty$ оценки

$$\begin{aligned} N_i^{(j)} &= \frac{\ln B_j}{2} + O(1), \quad M_i^{(j)} = \frac{\ln B_j}{2} + O(1), \\ (e_i^{(j)}, e_k^{(j)})_{H_j} &= \frac{2 + \ln(B_j \delta_{nk})}{2\sqrt{N_i^{(j)} N_k^{(j)}}} O(1) = O\left(\frac{2 + \ln(B_j \delta_{nk})}{2 \ln B_j}\right), \\ (f_i^{(j)}, f_k^{(j)})_{H_j} &= O\left(\frac{2 + \ln(B_j \delta_{nk})}{2 \ln B_j}\right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

из которых следует при $i \neq k$, что $(h_i^{(j)}, h_k^{(j)})_{H_j^3} = O(\ln^{-1} B_j)$, $j \rightarrow \infty$. N – фиксированное число, поэтому при достаточно больших j $N \sup_{i \neq k} (h_i^{(j)}, h_k^{(j)})_{H_j^3} < 1$ и (3.3) следует из леммы 2.

4. Доказательство теоремы. Пусть N – произвольное фиксированное натуральное число. Везде далее $\{z_n\}_{n=1}^N$ обозначают собственные значения оператора H , α_n – соответствующие им значения функции $\alpha = -\sqrt{(z+m)/(z-m)}$. Символы $O(\cdot)$ во всех оценках и неравенствах подразумевают стремление j к бесконечности, $j \rightarrow +\infty$. Дальнейшее доказательство разбивается на два случая.

Случай 1. Будем предполагать, что для всех n верно $z_n > m$, соответственно, $|\alpha_n| > 1$. Пусть $R_n(x)$ соответствует собственному вектору $\begin{pmatrix} u_1(x, z_n) \\ u_2(x, z_n) \end{pmatrix}$. Отнормируем $u(x)$ так, чтобы равенство $R_n(0) = 1$ выполнялось для всех n от 1 до N . Поскольку вектор $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ лежит в L_2 , функция $\sum_{n=1}^N |R_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^N (\alpha^2 |u_1|^2 + |u_2|^2)$ лежит в L_1 . Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sum_{n=1}^N |R_n(x)|^2 = 0$$

и можно выбрать последовательность $B_j \rightarrow \infty$ так, чтобы для любого n от 1 до N выполнялось неравенство $R_n(B_j) \leq B_j^{-1/2}$, эквивалентное неравенству

$$\int_0^{B_j} \frac{d}{dx} (\ln R_n(x)) dx \leq -\frac{\ln B_j}{2}.$$

Отсюда в силу (2.4) следует

$$\int_0^{B_j} \left(\frac{1}{2} \left(V_3(x) - \frac{V_1(x)}{\alpha_n^2} \right) \sin(2\varphi_n(x)) - \frac{V_2(x)}{\alpha_n} \cos(2\varphi_n(x)) \right) dx \leq \frac{1}{2\alpha_n} \ln B_j. \quad (4.1)$$

Рассмотрим вектор $V_n^{(1)} = \frac{1}{2}(-V_1/\alpha_n^2, -2V_2/\alpha_n, V_3)$. Этот вектор лежит в пространстве H_j^3 при любых значениях n и j ; более того, верна оценка

$$\begin{aligned} \|V_n^{(1)}\|_{H_j^3}^2 &= \int_0^{B_j} \left| \frac{V_1}{2\alpha_n^2} \right|^2 (1+x) dx + \int_0^{B_j} \left| \frac{V_2}{\alpha_n} \right|^2 (1+x) dx + \int_0^{B_j} \left| \frac{V_3}{2} \right|^2 (1+x) dx \\ &\leq \int_0^{B_j} \left(\left| \frac{V_1}{2} \right|^2 + |V_2|^2 + \left| \frac{V_1}{2} \right|^2 \right) (1+x) dx \leq \frac{6}{4} C^2 \int_0^{B_j} \frac{dx}{1+x} = \frac{6}{4} C^2 \ln B_j + O(1). \end{aligned}$$

Из следствия 2 (при $g = V_n^{(1)}$) на основании последней оценки получаем

$$\sum_{n=1}^N |(V_n^{(1)}, h_n^{(j)})_{H_j^3}|^2 \leq \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln B_j} \right) \right) \|V_n^{(1)}\|_{H_j^3}^2 \leq \frac{6}{4} C^2 \ln B_j + O(1). \quad (4.2)$$

С другой стороны, из (4.1) с использованием (3.4) получаем

$$\begin{aligned} (V_n^{(1)}, h_n^{(j)})_{H_j^3} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{B_j} \left(-\frac{V_1}{2\alpha_n^2} \frac{\sin(2\varphi_n(y))}{\sqrt{N_n^j}} - \frac{V_2}{\alpha_n} \frac{\cos(2\varphi_n(y))}{\sqrt{M_n^j}} + \frac{V_3}{2} \frac{\sin(2\varphi_n(y))}{\sqrt{N_n^j}} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{\ln B_j + O(1)}} \int_0^{B_j} \left(-\frac{V_1}{\alpha_n^2} \sin(2\varphi_n(y)) - 2 \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln B_j} \right) \right) \frac{V_2}{\alpha_n} \cos(2\varphi_n(y)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{V_3}{2} \sin(2\varphi_n(y)) \right) dy \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{3 \ln B_j}} \frac{\ln B_j}{2\alpha_n} + O\left(\frac{1}{\ln B_j^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha_n < 0$, отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^N |(V_n^{(1)}, h_n^{(j)})_{H_j^3}|^2 \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{6\alpha_n^2} \ln B_j + O\left(\frac{1}{\ln B_j} \right). \quad (4.3)$$

Сравнивая неравенства (4.2) и (4.3), получаем

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{6\alpha_n^2} \leq \frac{6}{4} C^2,$$

что дает неравенство (1.3) в силу произвольности N .

Случай 2. Будем предполагать, что для всех n верно $z_n < -m$, соответственно, $|\alpha_n| < 1$. Вместо (4.1) будет использоваться равносильное неравенство

$$\int_0^{B_j} \left(\frac{1}{2} (V_3(x) \alpha_n^2 - V_1(x)) \sin(2\varphi_n(x)) - V_2(x) \alpha_n \cos(2\varphi_n(x)) \right) dx \leq \frac{\alpha_n}{2} \ln B_j. \quad (4.4)$$

Рассмотрим вектор $V_n^{(2)} = \frac{1}{2}(-V_1, -2V_2\alpha_n, V_3\alpha_n^2)$. Аналогично случаю 1 доказывается, что этот вектор лежит в пространстве H_j^3 при любых значениях n и j и верна оценка

$$\|V_n^{(2)}\|_{H_j^3}^2 \leq \frac{6}{4} C^2 \ln B_j + O(1).$$

Из следствия 2 (при $g = V_n^2$) на основании последней оценки получаем

$$\sum_{n=1}^N |(V_n^{(2)}, h_n^{(j)})_{H_j^3}|^2 \leq \frac{6}{4} C^2 \ln B_j + O(1). \quad (4.5)$$

С другой стороны, из (4.4) с использованием (3.4) получаем

$$(V_n^{(2)}, h_n^{(j)})_{H_j^3} \leq \sqrt{\frac{2}{3 \ln B_j}} \frac{\alpha_n \ln B_j}{2} + O\left(\frac{1}{\ln B_j^{3/2}}\right).$$

Поскольку $\alpha_n < 0$, отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^N |(V_n^{(2)}, h_n^{(j)})_{H_j^3}|^2 \geq \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n^2}{6} \ln B_j + O\left(\frac{1}{\ln B_j}\right). \quad (4.6)$$

Сравнивая неравенства (4.5) и (4.6), получаем

$$\sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n^2}{6} \leq \frac{6}{4} C^2,$$

что дает неравенство (1.4) в силу произвольности N .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators. Lecture Notes in Math. V. 1258. Berlin: Springer, 1987.
2. Remling C. // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 206. P. 352–363.
3. Naboko S. N. // Theor. Math. Phys. 1986. V. 68. P. 646–653.
4. Kiselev A., Last Y., Simon B. // Comm. Math. Phys. 1998. V. 194. P. 1–45.