Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Трофимук, Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 287–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:13:40

Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы

А. А. Трофимук

Устанавливается зависимость производной длины конечной разрешимой группы от порядков небициклических силовских подгрупп ее подгруппы Фиттинга.

Библиография: 9 названий.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Одним из направлений теории конечных групп является изучение строения группы с заданными свойствами ее силовских подгрупп. Согласно теореме Цассенхауза [1; теорема IV.2.11] коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. В частности, ее производная длина не выше 2.

Бициклической называют группу $G = AB$, факторизуемую циклическими подгруппами A и B . Инварианты конечных разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в работе [2]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6.

Из теоремы Холла и Хигмена [1; теорема VI.14.16] следует, что производная длина разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами не превышает числа различных простых делителей ее порядка.

В [3] Монаховым получена оценка производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ в зависимости от порядков силовских подгрупп группы G . В частности, если порядок разрешимой группы не делится на $(n+1)$ -е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G .

В настоящей заметке установлено, что для оценки производной длины достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп не всей группы, как это сделано в [3], а только ее подгруппы Фиттинга. В частности, если все силовские подгруппы из подгруппы Фиттинга бициклические, то оценка, полученная в [2], сохраняется. Оказалось также, что существенное влияние на верхнюю границу производной длины группы оказывают порядки не всех силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга, а только тех, которые не являются бициклическими, если таковые имеются.

Для формулировки основного результата введем следующие обозначения:

$$s_p(G) = \log_p(|G_p|), \quad s(G) = \max_{p \in \pi^*(G)} s_p(G).$$

Здесь G – группа, G_p – ее некоторая силовская p -подгруппа, $\pi^*(G)$ – множество всех простых чисел из $\pi(G)$, для которых силовская p -подгруппа в G небициклическая. Если $\pi^*(G) = \emptyset$, то в группе G все силовские подгруппы бициклические.

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – разрешимая группа. Если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то

$$d(G) \leq \rho(s(F)) + \max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\};$$

в противном случае

$$d(G) \leq 6.$$

Здесь F – подгруппа Фиттинга группы G , а $d(G)$ – производная длина разрешимой группы G . Через $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ обозначаются максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп и вполне приводимых подгрупп нечетного порядка группы $\mathrm{GL}(n, P)$, где P – поле. Согласно теореме Цассенхауза [4] такие функции существуют и не зависят от поля P . Другие обозначения и определения соответствуют принятым в [5].

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1 [6; теорема 4В]. Числа $\sigma(n)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

- 1) если $n = 1, 2$, то $\sigma(n) = 1$;
- 2) если $n = 3, 4$, то $\sigma(n) = 2$;
- 3) если $5 \leq n \leq 14$, то $\sigma(n) = 3$;
- 4) если $15 \leq n \leq 34$, то $\sigma(n) = 4$;
- 5) если $35 \leq n \leq 64$, то $\sigma(n) = 5$.

В общем случае $\sigma(n) \leq 2 \log_7(n/5) + 3$.

ЛЕММА 2 [7; лемма 2.4]. Числа $\rho(n)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

- 1) если $n = 1$, то $\rho(n) = 1$;
- 2) если $n = 2, 3, 4$, то $\rho(n) = n + 2$;
- 3) если $n = 5, 6, 7$, то $\rho(n) = 7$;
- 4) если $n = 8, 9$, то $\rho(n) = n$;
- 5) если $10 \leq n \leq 17$, то $\rho(n) = 10$;
- 6) если $18 \leq n \leq 25$, то $\rho(n) = 11$;
- 7) если $26 \leq n \leq 33$, то $\rho(n) = 12$;
- 8) если $34 \leq n \leq 65$, то $\rho(n) = 13$;
- 9) если $n \geq 66$, то $\rho(n) \leq 5 \log_9(n - 2) + 5.3$.

ЛЕММА 3. Пусть

$$\delta(n) = \max\{d \in \mathbb{N} \mid n \geq 2^d + 2d - 2\}.$$

Тогда производная длина группы G порядка p^n не превышает $\delta(n) + 1$. В частности,

- 1) если $n \leq 2$, то $d(G) = 1$;
- 2) если $3 \leq n \leq 5$, то $d(G) \leq 2$;
- 3) если $6 \leq n \leq 11$, то $d(G) \leq 3$;
- 4) если $12 \leq n \leq 21$, то $d(G) \leq 4$;
- 5) если $22 \leq n \leq 39$, то $d(G) \leq 5$;
- 6) если $40 \leq n \leq 73$, то $d(G) \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|G| = p^n$ и производная длина группы G равна $d + 1$. Тогда согласно [8] $n \geq 2^d + 2d - 2$. Поэтому верхней границей производной длины группы G будет $\delta(n) + 1$. Теперь, конкретизируя значения n , получим 1)–6).

Пусть $1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G$ – главный ряд группы G . Тогда для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ главный фактор G_i/G_{i-1} является характеристически простой группой. В частности, разрешимые главные факторы являются элементарными абелевыми примарными группами. Если G – разрешимая неединичная группа, причем $|G_i/G_{i-1}| = p_i^{n_i}$, то $r(G) = \max(n_i)$ называют *главным рангом* группы G , см. [1; с.685]. Если G – единичная группа, то полагают $r(G) = 0$. В силу теоремы Жордана–Гёльдера любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значение главного ранга определено однозначно.

ЛЕММА 4 [9; теорема 2]. В каждой конечной разрешимой неединичной группе G существует нильпотентная нормальная подгруппа K такая, что $\Phi(G) \leq K$, $K/\Phi(G)$ – главный фактор группы G и $|K/\Phi(G)| = p^{r(G/\Phi(G))}$ для некоторого простого числа p .

В работе [3] введена функция

$$m(G) = \max_{p \in \pi(G)} m_p(G),$$

где

$$m_p(G) = \max\{\log_p(|G : M|) \mid M <_{\max} G, |G : M| = p^a\}, \quad p \in \pi(G).$$

Запись $M <_{\max} G$ означает, что M – максимальная подгруппа группы G .

ЛЕММА 5 [3; теорема 1]. Пусть G – разрешимая группа. Тогда

- 1) $r(G/\Phi(G)) = m(G)$;
- 2) $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(m(G))$.

ЛЕММА 6 [2; лемма 1]. Пусть P – бициклическая p -группа и N – ее дополняемая нормальная подгруппа. Тогда

- 1) если $p = 2$, то $|N/\Phi(N)| \leq 4$;
- 2) если $p > 2$, то либо $N = P$, либо N циклическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\Phi(G) = 1$. По лемме 4 в группе G существует минимальная нормальная подгруппа K такая, что $|K| = p^{r(G)}$. Так как K содержится в подгруппе Фиттинга F , то K содержится и в силовой p -подгруппе F_p группы F .

Предположим, что F_p бициклическая. Тогда или $\pi^*(F) = \emptyset$, или $\pi^*(F) \neq \emptyset$. Так как F_p характеристическая в F , то F_p нормальна в G . Из свойств подгруппы Фраттини следует, что $\Phi(F_p) \leq \Phi(G)$ и $\Phi(F_p) = 1$. По теореме 4.23 [5] подгруппа K является нормальной дополняемой подгруппой группы F_p . Поэтому из леммы 6 следует, что при $p = 2$ порядок подгруппы K не превышает 4, а при $p > 2$ либо $K = F_p$, либо K циклическая. Поэтому можно считать, что K – бициклическая группа. Хорошо известно, что бициклическая группа имеет не более двух порождающих элементов. Так как K элементарная абелева, то $|K| \leq p^2$ и $r(G) \leq 2$. По лемме 5 $r(G) = m(G)$ и $d(G) \leq 1 + \rho(m(G))$. Ввиду леммы 2 функция $\rho(n)$ является неубывающей. Поэтому

$$d(G) \leq 1 + \rho(m(G)) \leq 1 + \rho(2) \leq 5.$$

Пусть F_p небициклическая. Тогда $\pi^*(F) \neq \emptyset$ и порядок подгруппы K делит $p^{s_p(F)}$, а значит, и $p^{s(F)}$. Поэтому $r(G) \leq s(F)$ и из леммы 5 следует, что

$$d(G) \leq 1 + \rho(m(G)) = 1 + \rho(r(G)) \leq 1 + \rho(s(F)).$$

Очевидно, что если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то $s(F) \geq 3$. Поэтому $1 + \rho(s(F)) \geq 6$ по лемме 2 и

$$\max\{5, 1 + \rho(s(F))\} = 1 + \rho(s(F)).$$

Итак, при $\Phi(G) = 1$ получим следующие оценки: $d(G) \leq 5$ для случая $\pi^*(F) = \emptyset$, и $d(G) \leq 1 + \rho(s(F))$ для случая $\pi^*(F) \neq \emptyset$.

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. По теореме 4.24 [5] фактор-группа $\bar{F} = F/\Phi(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп $\bar{F}_i$ группы $\bar{G} = G/\Phi(G)$, где $1 \leq i \leq k$. Поэтому для каждого $\bar{F}_i$ верно, что фактор-группа $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы $\text{Aut}(\bar{F}_i)$. По лемме 2.33 [5] фактор-группа $\bar{G}/\bigcap_{i=1}^k C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе подгруппа Фиттинга содержит свой централизатор, то

$$\bigcap_{i=1}^k C_{\bar{G}}(\bar{F}_i) = C_{\bar{G}}(\bar{F}) = \bar{F}, \quad \bar{G}/\left(\bigcap_{i=1}^k C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)\right) = \bar{G}/\bar{F} \simeq G/F.$$

Очевидно, что $\bar{F}_i$ является подгруппой силовской p_i -подгруппы $\bar{F}_{p_i}$ группы $\bar{F}$. Пусть $\bar{F}_{p_i}$ – бициклическая группа. Тогда либо $\pi^*(F) = \emptyset$, либо $\pi^*(F) \neq \emptyset$. Так как $\Phi(\bar{G}) = 1$, то $\Phi(\bar{F}_{p_i}) = 1$ и $\bar{F}_i$ дополняема в $\bar{F}_{p_i}$ по теореме 4.23 [5]. Согласно лемме 6 $\bar{F}_i$ является бициклической группой. Так как $\bar{F}_i$ – элементарная абелева подгруппа, то $|\bar{F}_i| \leq p_i^2$ и $\text{Aut}(\bar{F}_i)$ изоморфна либо циклической группе порядка $p_i - 1$, либо группе $\text{GL}(2, p_i)$. Поэтому фактор-группа $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$ либо циклическая, либо изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $\text{GL}(2, p_i)$. Из определения $\rho(n)$ следует, что во втором случае

$$d(\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)) \leq \rho(2) = 4.$$

Так как производная длина прямого произведения разрешимых групп не превышает максимума производных длин сомножителей, то

$$d(\bar{G}/\bar{F}) = d(G/F) \leq 4.$$

Пусть $\bar{F}_{p_i}$ небициклическая. Тогда $\pi^*(F) \neq \emptyset$ и $|\bar{F}_i| = p_i^{s_i}$. Поэтому порядок подгруппы $\bar{F}_i$ делит $p_i^{s_{p_i}(F)}$, а значит, и $p_i^{s(F)}$. Таким образом, фактор-группа $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $\text{GL}(s_i, p_i)$ и

$$d(\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)) \leq \rho(s_i).$$

Учитывая, что $d(\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)) \leq \rho(2)$ для случая $\pi^*(F) \neq \emptyset$ и $\bar{F}_{p_i}$ – бициклическая группа, получим, что

$$d(G/F) \leq \rho(s_m) \leq \rho(s(F)), \quad \text{где } s_m = \max_{1 \leq i \leq k} \{2, s_i\}.$$

Итак, при $\Phi(G) \neq 1$ получим оценки

$$\begin{aligned} d(G/F) &\leq 4 && \text{для случая } \pi^*(F) = \emptyset, \\ d(G/F) &\leq \rho(s(F)) && \text{для случая } \pi^*(F) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Так как F – нильпотентная группа, то F является прямым произведением своих силовских подгрупп F_p . Будем считать, что подгруппа F_p имеет производную длину $d(F_p)$. Тогда

$$d(F) \leq \max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\}.$$

В частности, если $\pi^*(F) = \emptyset$, то $d(F_p) \leq 2$ для любого $p \in \pi(F)$ и $d(F) \leq 2$.

Обобщая случаи $\Phi(G) = 1$ и $\Phi(G) \neq 1$, получим

$$\begin{aligned} d(G) &\leq 6 && \text{для } \pi^*(F) = \emptyset, \\ d(G) &\leq \rho(s(F)) + \max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\} && \text{для } \pi^*(F) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – разрешимая группа и F – ее подгруппа Фиттинга. Если силовские подгруппы в F бициклические, то производная длина не превышает 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\pi^*(F) = \emptyset$ для таких групп G . Тогда из теоремы следует, что $d(G) \leq 6$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – разрешимая группа. Если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то

$$d(G) \leq \rho(s(F)) + \delta(s(F)) + 1.$$

В частности,

- 1) если $3 \leq s(F) \leq 6$, то $d(G) \leq s(F) + 4$;
- 2) если $7 \leq s(F) \leq 10$, то $d(G) \leq s(F) + 3$;
- 3) если $s(F) = 11$, то $d(G) \leq 13$;
- 4) если $12 \leq s(F) \leq 17$, то $d(G) \leq 14$;
- 5) если $18 \leq s(F) \leq 21$, то $d(G) \leq 15$;
- 6) если $22 \leq s(F) \leq 25$, то $d(G) \leq 16$;
- 7) если $26 \leq s(F) \leq 33$, то $d(G) \leq 17$;
- 8) если $34 \leq s(F) \leq 39$, то $d(G) \leq 18$;
- 9) если $40 \leq s(F) \leq 65$, то $d(G) \leq 19$;
- 10) если $s(F) \geq 66$, то

$$d(G) \leq 5 \log_9(s(F) - 2) + \delta(s(F)) + 6.3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 производная длина группы G не превышает

$$\rho(s(F)) + \max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\}.$$

Так как $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то среди силовских подгрупп группы F есть небиициклические. Очевидно, что если F_q – силовская q -подгруппа группы F , $q \in \pi^*(F)$, то $|F_q| = q^{s_q(F)}$

и $s_q(F) \leq s(F)$. Так как функция $\delta(n)$ из леммы 3 является неубывающей, то $\delta(s_q(F)) \leq \delta(s(F))$ и $d(F_q) \leq \delta(s(F)) + 1$. Поэтому можно считать, что

$$\max\{d(F_q) \mid q \in \pi^*(F)\} \leq \delta(s(F)) + 1.$$

Очевидно, что

$$\max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F) \setminus \pi^*(F)\} \leq 2.$$

Так как $s(F) \geq 3$, то $\delta(s(F)) + 1 \geq 2$ и

$$\max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\} \leq \delta(s(F)) + 1.$$

Значит,

$$d(G) \leq \rho(s(F)) + \delta(s(F)) + 1.$$

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – группа нечетного порядка. Если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то

$$d(G) \leq \sigma(s(F)) + \delta(s(F)) + 1;$$

в противном случае

$$d(G) \leq 3.$$

В частности,

- 1) если $3 \leq s(F) \leq 4$, то $d(G) \leq 4$;
- 2) если $s(F) = 5$, то $d(G) \leq 5$;
- 3) если $6 \leq s(F) \leq 11$, то $d(G) \leq 6$;
- 4) если $12 \leq s(F) \leq 14$, то $d(G) \leq 7$;
- 5) если $15 \leq s(F) \leq 21$, то $d(G) \leq 8$;
- 6) если $22 \leq s(F) \leq 34$, то $d(G) \leq 9$;
- 7) если $35 \leq s(F) \leq 39$, то $d(G) \leq 10$;
- 8) если $40 \leq s(F) \leq 64$, то $d(G) \leq 11$;
- 9) если $s(F) \geq 64$, то

$$d(G) \leq 2 \log_7 \left(\frac{s(F)}{5} \right) + \delta(s(F)) + 4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\pi^*(F) \neq \emptyset$, подставляя значения $\sigma(n)$ вместо $\rho(n)$ в формулировку следствия 2, получим оценку

$$d(G) \leq \sigma(s(F)) + \delta(s(F)) + 1.$$

Для случая $\pi^*(F) = \emptyset$ оценка $d(G) \leq 3$ следует из самого доказательства теоремы 1. Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1967.
- [2] В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская, “О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 603–612.

- [3] В. С. Монахов, “Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп”, *Алгебра и логика*, **43**:4 (2004), 411–424.
- [4] H. Zassenhaus, “Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen”, *Abh. Math. Semin. Hansische Univ.*, **12** (1938), 289–312.
- [5] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйшая школа, Минск, 2006.
- [6] P. P. Pálffy, “Bounds for linear groups of odd order”, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, **23** (1990), 253–263.
- [7] Y. Berkovich, “Solvable permutation groups of maximal derived length”, *Algebra Colloq.*, **4**:2 (1997), 175–186.
- [8] A. Mann, “The derived length of p -groups”, *J. Algebra*, **224**:2 (2000), 263–267.
- [9] В. С. Монахов, “К теореме Хупперта–Шеметкова”, *Тр. Ин-та матем. АН Белоруссии*, **16**:1 (2008), 64–66.

А. А. Трофимук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Беларусь
E-mail: trofim08@yandex.ru

Поступило

28.04.2009

Исправленный вариант

25.08.2009