Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Жао, Л. Наинг, В. Х. Юе, Некоторые новые свойства схемы разложения многочленов Бубакера, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 175–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 07:59:20

Некоторые новые свойства схемы разложения многочленов Бубакера

Т. Г. Жао, Л. Наинг, В. Х. Юе

Рассматриваются некоторые новые свойства схемы разложения многочленов Бубакера. В частности, показано, что схема разложения многочленов Бубакера удовлетворяет стандартным граничным условиям Коши.

Библиография: 16 названий.

Многочлены Бубакера образуют последовательность неортогональных целых многочленов, задаваемых формулой [1]–[7]:

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\xi(n)} \left[\frac{(n-4p)}{(n-p)} C_{n-p}^p \right] (-1)^p x^{n-2p}, \quad (1)$$

где

$$\xi(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{2n + ((-1)^n - 1)}{4}.$$

(Символом $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначена функция целой части.)

Рекуррентная система строится следующим образом:

$$\begin{cases} B_0(x) = 1, \\ B_1(x) = x, \\ B_2(x) = x^2 + 2, \\ B_m(x) = xB_{m-1}(x) - B_{m-2}(x), \quad m > 2. \end{cases} \quad (2)$$

В данной работе обсуждаются свойства последовательно определенной схемы разложения многочленов Бубакера. Кроме того, будет показано, что эта схема удовлетворяет стандартным граничным условиям Коши.

Схемы разложения многочленов Бубакера. Подобно многим алгоритмам, использующим полиномиальные разложения [8]–[16], схема разложения многочленов Бубакера является решающим алгоритмом, основанным на использовании особенностей многочленов Бубакера порядка $4q$:

$$\left[\sum_{k=1}^N B_{4k} \left(\frac{x}{a} \alpha_k \right) \right]_{x=0} = -2N, \quad (3)$$

$$\left[\sum_{k=1}^N \frac{dB_{4k}}{dx} \left(\frac{x}{a} \alpha_k \right) \right]_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$\left[\sum_{k=1}^N B_{4k} \left(\frac{x}{a} \alpha_k \right) \right]_{x=a} = 0, \quad (5)$$

$$\left[\sum_{k=1}^N \frac{dB_{4k}}{dx} \left(\frac{x}{a} \alpha_k \right) \right]_{x=a} = \sum_{k=1}^N B'_{4k}(\alpha_k), \quad (6)$$

где

$$B'_{4k}(\alpha_k) = - \frac{\sum_{l=1}^{4k} B_l^2(\alpha_k) - 3}{B_{4k+1}(\alpha_k)}. \quad (7)$$

Схема разложения многочленов Бубакера определена следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для комплексной функции $f(x)$ действительного аргумента x , меняющегося в области $-a < x < a$, *схема разложения многочленов Бубакера* (сокращенно СРМБ) заключается в применении следующего соотношения:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N B_{4k} \left(\frac{x}{a} \alpha_k \right), \quad (8)$$

где α_k – минимальный положительный корень многочлена Бубакера порядка $4k$, N_0 – предварительно заданное целое число и ξ_k , $k = 1, \dots, N_0$, – комплексные коэффициенты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для комплексной функции $f(x)$ действительного аргумента x , меняющегося в области $-a < x < a$, основанное на СРМБ *слабое решение* уравнения

$$f(x) = Z_0, \quad (9)$$

где Z_0 – заданное комплексное число, может быть получено вычислением множества комплексных коэффициентов ξ_k , $k = 1, \dots, N_0$, на котором минимизируется действительный функционал

$$\Psi = \left| \frac{1}{2N_0} \sum_{k=1}^{N_0} \xi_k B_{4k} \left(\frac{x}{a} \alpha_k \right) - Z_0 \right|. \quad (10)$$

Многочленам Бубакера $B_{4k}n(x)$ соответствует точный моном порядка $4q$:

$$B_{4q}(x) = 4 \sum_{p=0}^{2q} \left[\frac{(q-p)}{(4q-p)} C_{4q-p}^p \right] (-1)^p x^{2(2q-p)}, \quad (11)$$

где первые многочлены имеют вид

$$\begin{cases} B_0(x) = 1, \\ B_4(x) = x^4 - 2, \\ B_8(x) = x^8 - 4x^6 + 8x^2 - 2, \\ B_{12}(x) = x^{12} - 8x^{10} + 18x^8 - 35x^4 + 24x^2 - 2, \\ B_{16}(x) = x^{16} - 12x^{14} + 52x^{12} - 88x^{10} + 168x^6 - 168x^4 + 48x^2 - 2, \\ \dots \end{cases} \quad (12)$$

Обоснование существования нулей многочленов Бубакера порядка $4q$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть α_{4k} – совокупность нулей многочлена Бубакера $B_{4k}(x)$, тогда имеет место следующее свойство:

$$0 < \alpha_{4k} < 2 \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq n. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя рекуррентную формулу (3), получим соотношение

$$MB = xB + C, \quad (14)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (15)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_0(x) \\ B_1(x) \\ \vdots \\ B_{n-1}(x) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_n(x) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, нули многочлена $B_n(x)$, $n > 1$, также являются собственными числами матрицы M . Действительно, характеристический многочлен матрицы является в точности многочленом Бубакера. Воспользуемся теоремой Гершгорина, чтобы оценить собственные числа матрицы M . Так как матрица M имеет особую структуру, легко видеть, что все собственные числа лежат в круге радиуса 2 с центром в 0. Следовательно, свойство (13) выполнено.

Примеры применения схемы разложения многочленов Бубакера. Решения некоторых прикладных физических задач могут быть получены с помощью схемы разложения многочленов Бубакера. Ганучи с соавторами [3] применил СРМБ для объяснения интригующего парадокса образования негауссовых изотермических генеративных линий под поверхностью плиты, обстреливаемой гауссовым пучком. В работах Слама с соавторами [4], [5] предложены решения для задач передачи тепла внутри различных систем, полученных с помощью сварки и отжига. В этих работах СРМБ применялась для решения уравнений дискретного сохранения тепла в фазе охлаждения и был получен профиль согласованных скоростей охлаждения. В 2007 г. Гриб с соавторами [6] с помощью СРМБ нашел корреляционные соотношения первого порядка между микротвердостью Вискера и температуропроводностью обрабатываемых стальных сплавов. Недавно Лаззез с соавторами [7] исследовал физические свойства полупроводниковых микрослоев с помощью СРМБ.

Авторы выражают глубокую признательность профессору Карему Бубакеру за полезные обсуждения результатов, полученных в этой статье.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Labiadh, K. Boubaker, "A Sturm–Liouville shaped characteristic differential equation as a guide to establish a quasi-polynomial expression to the Boubaker polynomials", *Дифференц. уравнения и процессы управл.*, 2007, № 2, 117–133.
- [2] O. B. Awojoyogbe, K. Boubaker, "A solution to Bloch NMR flow equations for the analysis of hemodynamic functions of blood flow system using m -Boubaker polynomials", *Current Appl. Phys.*, **9**:1 (2009), 278–283.
- [3] J. Ghanouchi, H. Labiadh, K. Boubaker, "An attempt to solve the heat transfer equation in a model of pyrolysis spray using $4q$ -order m -Boubaker polynomials", *Int. J. Heat Tech.*, **26** (2008), 49–52.
- [4] S. Slama, J. Bessrou, K. Boubaker, M. Bouhafs, "A dynamical model for investigation of A_3 point maximal spatial evolution during resistance spot welding using Boubaker polynomials", *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, **44** (2008), 317–322.
- [5] S. Slama, M. Bouhafs, K. B. Ben Mahmoud, "A Boubaker polynomials solution to heat equation for monitoring A_3 point evolution during resistance spot welding", *Int. J. Heat Tech.*, **26**:2, 141–146.
- [6] T. Ghrib, K. Boubaker, M. Bouhafs, "Investigation of thermal diffusivity-microhardness correlation extended to surface-nitrured steel using Boubaker polynomials expansion", *Mod. Phys. Lett. B*, **22**:19 (2008), 2893–2907.
- [7] S. Lazzez, K. B. Ben Mahmoud, "New ternary compounds stoichiometry-linked thermal behavior optimisation using Boubaker polynomials", *J. Alloys Compounds*, **476**:1–2 (2009), 769–773.
- [8] В. И. Пантелеев, "Полиномиальное разложение k -значных функций по невырожденным функциям", *Матем. заметки*, **55**:1 (1994), 144–149.
- [9] А. Аскари-Хеммат, М. А. Дегхан, М. А. Скопина, "Полиномиальные всплескоподобные разложения функций на сфере", *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 292–300.
- [10] Л. Б. Авгуль, "Полиномиальное разложение симметрических булевых функций табличным методом", *Кибернет. и сист. анализ*, 1996, № 6, 59–71.
- [11] *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1972.
- [12] R. P. Agarwal, P. J. Y. Wong, *Error Inequalities in Polynomial Interpolation and Their Applications*, Math. Appl., **262**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [13] R. E. Barnhill, G. Birkhoff, W. J. Gordon, "Smooth interpolation in triangles", *J. Approx. Theory*, **8**:2 (1973), 114–128.
- [14] R. P. Boas, Jr., "Representation of functions by Lidstone series", *Duke Math. J.*, **10**:2 (1943), 239–245.
- [15] J. D. Buckholtz, J. K. Shaw, "On functions expandable in Lidstone series", *J. Math. Anal. Appl.*, **47**:3 (1974), 626–632.
- [16] R. E. Barnhill, J. A. Gregory, "Polynomial interpolation to boundary data on triangles", *Math. Comp.*, **29**:131 (1975), 726–735.

Т. Г. Жао

Lanzhou University, Китай
E-mail: t_ganzhao@yahoo.cn

Поступило

14.08.2008

Л. Наинг

Lanzhou University, Китай

В. Х. Юе

Lanzhou University, Китай