Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Базарханов, Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля периодических функций многих переменных, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 305–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:14:19

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля периодических функций многих переменных

Д. Б. Базарханов

В предлагаемой заметке получены точные в смысле порядка оценки для поперечников Фурье классов $B_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ типа Никольского–Бесова и $F_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ типа Лизоркина–Трибеля в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$ для ряда соотношений между параметрами s, p, θ, q ; здесь $s \in (0, \infty)^n$, $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $1 \leq n \leq d$, $\epsilon = \{\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(n)}\}$ – разбиение множества $\epsilon_d = \{1, \dots, d\}$.

1. Поперечники Фурье. Пусть, как обычно, $L_q = L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, – пространство измеримых функций f , 2π -периодических по каждой переменной, суммируемых в степени q (существенно ограниченных при $q = \infty$) на $\mathbb{T}^d$, со стандартной нормой

$$\|f\|_q = \|f\|_{L_q(\mathbb{T}^d)};$$

здесь $\mathbb{T}^d$ – d -мерный тор, $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$. *Поперечником Фурье* (или, что то же, *ортотоперечником*) порядка m множества $F \subset L_q$ называется величина

$$\varphi_m(F, L_q) = \inf_{\{g_j\}_{j=1}^m} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{j=1}^m \langle f, g_j \rangle g_j \right\|_q,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение функций и нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{g_j\}_{j=1}^m \subset L_\infty(\mathbb{T}^d)$.

Напомним, что поперечники Фурье были введены Темляковым [1] в 1982 г. Оценке поперечников Фурье различных функциональных классов посвящено много работ, здесь укажем лишь монографии [2], [3] и работы [4]–[7], где приведены подробная библиография и история вопроса; см. еще замечание 2 ниже.

2. Функциональные пространства. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ – множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^d$ – d -мерное вещественное евклидово пространство. Для $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$(x, y) = \sum_1^d x_j y_j, \quad |x| = \sqrt{(x, x)};$$

для конечного множества A через $|A|$ обозначим число его элементов.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$; для произвольных

$$\varepsilon \subset \varepsilon_d = \{1, \dots, d\}, \quad \emptyset \neq \varepsilon = \{j_1, \dots, j_{|\varepsilon|}\}, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_{|\varepsilon|} \leq d,$$

и $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $x(\varepsilon) = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{|\varepsilon|}}) \in \mathbb{R}^{|\varepsilon|}$. Далее, фиксируем разбиение $\varepsilon = \{\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}\}$ множества ε_d , т.е.

$$\varepsilon_d = \bigcup_{i=1}^n \varepsilon^{(i)}, \quad \varepsilon^{(i)} \cap \varepsilon^{(j)} = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \varepsilon^{(i)} \neq \emptyset,$$

$d_i := |\varepsilon^{(i)}|$, $i \in \varepsilon_n$. Для удобства для $x \in \mathbb{R}^d$ пишем $x = (x^1, \dots, x^n)$, где $x^i = x(\varepsilon^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i}$, $i \in \varepsilon_n$.

Выберем бесконечно дифференцируемые функции $\eta_0^{(i)}: \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \eta_0^{(i)}(\xi^i) \leq 1, & \xi^i &\in \mathbb{R}^{d_i}, \\ \eta_0^{(i)}(\xi^i) &= 1 & \text{при } |\xi^i| &\leq 1, \\ \eta_0^{(i)}(\xi^i) &= 0 & \text{при } |\xi^i| &\geq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

где $i \in \varepsilon_n$. Положим

$$\begin{aligned} \eta^{(i)}(\xi^i) &= \eta_0^{(i)}(2^{-1}\xi^i) - \eta_0^{(i)}(\xi^i), & \eta_j^{(i)}(\xi^i) &= \eta^{(i)}(2^{-j+1}\xi^i), \quad j \in \mathbb{N}, \\ \eta_k(\xi) &= \prod_{i=1}^n \eta_{k_i}^{(i)}(\xi^i), & \xi &\in \mathbb{R}^d, \quad k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n. \end{aligned}$$

Пусть $l_\theta = l_\theta(\mathbb{N}_0^n)$, $1 \leq \theta \leq \infty$, – пространство кратных (комплекснозначных) числовых последовательностей $\{a_k\} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ с конечной нормой

$$\|\{a_k\}\|_{l_\theta} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} |a_k|^\theta \right)^{1/\theta},$$

с естественной модификацией при $\theta = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $s = (s_1, \dots, s_n) \in (0, \infty)^n$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Пространство $\mathbf{B}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_B = \|f\|_{\mathbf{B}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)} = \left\| \left\{ 2^{(s,k)} \left\| \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \eta_k(\lambda) \widehat{f}(\lambda) e^{i(\lambda,x)} \right\|_p \right\} \right\|_{l_\theta}.$$

Пространство $\mathbf{F}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_F = \|f\|_{\mathbf{F}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)} = \left\| \left\{ 2^{(s,k)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \eta_k(\lambda) \widehat{f}(\lambda) e^{i(\lambda,x)} \right\} \right\|_{l_\theta} \Big|_p.$$

Здесь $\widehat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i(\lambda,x)} dx$ – коэффициенты Фурье функции f , $\lambda \in \mathbb{Z}^d$.

Единичные шары $B_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ и $F_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ этих пространств будем называть *классами типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля* соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространства $\mathbf{B}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathbf{F}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ при $n = 1$ совпадают с классическими пространствами Никольского–Бесова $\mathbf{B}_{p\theta}^s(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина–Трибеля $\mathbf{F}_{p\theta}^s(\mathbb{T}^d)$, а при $n = d$ – с соответствующими пространствами смешанной гладкости $\mathbf{MB}_{p\theta}^s(\mathbb{T}^d)$ и $\mathbf{MF}_{p\theta}^s(\mathbb{T}^d)$ [8]. Далее, при $1 < p < \infty$ $\mathbf{F}_{p2}^s(\mathbb{T}^d)$ – это классическое пространство Соболева $\mathbf{W}_p^s(\mathbb{T}^d)$, а $\mathbf{MF}_{p2}^s(\mathbb{T}^d)$ – соответствующее пространство функций с ограниченной смешанной производной $\mathbf{MW}_p^s(\mathbb{T}^d)$; пространства $\mathbf{F}_{12}^s(\mathbb{T}^d)$ и $\mathbf{MF}_{12}^s(\mathbb{T}^d)$ несколько уже, чем пространства $\mathbf{W}_1^s(\mathbb{T}^d)$ и $\mathbf{MW}_1^s(\mathbb{T}^d)$ соответственно. В [9], [10] для пространств $\mathbf{B}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{I}^d)$ и

$\mathbf{F}_{p\theta}^{s,\epsilon}(\mathbb{I}^d)$ ($\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{T}$) приведены различные характеристики и эквивалентные нормировки. В частности, установлено, что эти пространства не зависят от выбора системы $\{\eta_k(x)\}$ и нормы, определяемые по разным таким (и даже более общим) системам, попарно эквивалентны.

3. Оценки поперечников Фурье. Определим следующие векторы и числа:

$$t = (t_1, \dots, t_n), \quad t_i = s_i - d_i \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)_+, \quad t_0 = \min(t_i \mid i \in \varepsilon_n)$$

где $z_+ = \max(z, 0)$ для $z \in \mathbb{R}$,

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \tau_i = \frac{t_i}{d_i}, \quad \tau_0 = \min(\tau_i \mid i \in \varepsilon_n),$$

$$\nu = |\{i \mid \tau_i = \tau_0\}|, \quad p_* = \min(p, 2).$$

ТЕОРЕМА 1. А) Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p, q) \neq (\infty, \infty)$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $s \in (0, \infty)^n$. Тогда

$$\varphi_m(B_{p\theta}^{s,\epsilon}, L_q) \asymp \left(\frac{\log^{\nu-1} m}{m} \right)^{\tau_0} (\log^{\nu-1} m)^{(1/p_*-1/\theta)+};$$

если, кроме того, $p < \infty$, то

$$\varphi_m(F_{p\theta}^{s,\epsilon}, L_q) \asymp \left(\frac{\log^{\nu-1} m}{m} \right)^{\tau_0} (\log^{\nu-1} m)^{(1/2-1/\theta)+}.$$

В) Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $s \in (0, \infty)^n$ такое, что $\tau_0 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_m(B_{p\theta}^{s,\epsilon}, L_q) &\asymp \left(\frac{\log^{\nu-1} m}{m} \right)^{\tau_0} (\log^{\nu-1} m)^{(1/q-1/\theta)+}, \\ \varphi_m(F_{p\theta}^{s,\epsilon}, L_q) &\asymp \left(\frac{\log^{\nu-1} m}{m} \right)^{\tau_0}. \end{aligned}$$

С) Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $s \in (0, \infty)^n$ такое, что $\tau_0 > 0$. Тогда

$$\varphi_m(B_{p\theta}^{s,\epsilon}, L_\infty) \asymp \left(\frac{\log^{\nu-1} m}{m} \right)^{\tau_0} (\log^{\nu-1} m)^{1-1/\theta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Точные в смысле порядка оценки поперечников Фурье классы Соболева $W_p^s(\mathbb{T}^d) \equiv F_{p2}^s(\mathbb{T}^d)$ при $1 < p < \infty$ и Никольского $H_p^s(\mathbb{T}^d) \equiv B_{p\infty}^s(\mathbb{T}^d)$ ($n = 1$) в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$ приведены в [3; гл. II, § 4] (в действительности там рассмотрен более общий анизотропный случай). Оценки поперечников Фурье классов $MW_p^s(\mathbb{T}^d)$ и $MH_p^s(\mathbb{T}^d)$ в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$ для всех пар (p, q) , кроме случая $(p, q) = (1, \infty)$ для классов $MW_p^s(\mathbb{T}^d)$, известны (подробнее см. [3], [4], [6] и ссылки там). Наконец, отметим, что приведенная выше теорема в случае $n = d$ для классов $MB_{p\theta}^s$ при $(p, q) \neq (1, 1), (\infty, \infty)$ доказана в [11], [12], [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Темляков, Докл. АН СССР, **267**:2 (1982), 314–317. [2] В. Н. Темляков, Приближение функций с ограниченной смешанной производной, Тр. МИАН СССР, **178**, ред. С. М. Никольский, 1986, 113 с.. [3] V. N. Temlyakov, Approximation of Periodic Functions, Comput. Math. Anal. Ser., Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1993. [4] В. Н. Темляков, Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 138–168. [5] Э. М. Галеев, Матем. заметки,

47:3 (1990), 32–41. [6] А. В. Андрианов, В. Н. Темляков, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 32–43. [7] А. С. Романюк, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 93–114. [8] Н.-J. Schmeisser, H. Triebel, *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces*, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons, Chichester, 1987. [9] Д. Б. Базарханов, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 53–65. [10] Д. Б. Базарханов, *Докл. РАН*, **402**:3 (2005), 298–302. [11] А. С. Романюк, *Укр. матем. журн.*, **53**:9 (2001), 1224–1231. [12] А. С. Романюк, *Укр. матем. журн.*, **53**:10 (2001), 1402–1408.

Д. Б. Базарханов

Институт математики и механики НАН Казахстана

E-mail: dauren@math.kz

Поступило

06.05.2009