Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Бургейн, Б. С. Кашин, О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 309–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:29:45

О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой

Ж. Бургейн, Б. С. Кашин

1. Введение и формулировка основного результата. Установленная в этой заметке теорема по формулировке и методу доказательства может быть отнесена к группе результатов об оценках поперечников, полученных с использованием техники функционального анализа и теории вероятностей. При этом основной причиной для ее рассмотрения была некоторая аналогия с утверждениями, находящими важные приложения в теории чисел (см., например, [1; гл. 3]). Отметим также, что интерес к результатам общего характера о равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой высказывал несколько лет назад Карацуба.

Ниже мы используем обычные обозначения: $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ – множества действительных и целых чисел соответственно, $\mathbb{C}^N$, $N = 1, 2, \dots$, – N -мерное комплексное пространство. Для $x = \{x_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $1 \leq p < \infty$

$$\|x\|_{L_p^N} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_{L_\infty^N} = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|.$$

Через $\text{dist}_E(f, L)$ мы обозначаем расстояние от элемента f до множества L в нормированном пространстве E ; $|\Lambda|$ – число элементов в конечном множестве Λ . Наконец, $\text{span}(\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda})$ – линейная оболочка системы элементов $\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}$ линейного пространства.

ТЕОРЕМА. Пусть $T \in \mathbb{R}$, $T \geq 1$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 1$, $T > (\log N)^{10}$ и $\rho \in (0, 1)$. Найдется подмножество целых чисел

$$\Lambda \subset \mathbb{Z} \cap \left[0, N \left(1 + \frac{(\log N)^7}{T} \right) \right]$$

такое, что $|\Lambda| \leq \rho \min\{N, T\}$ и для любого полинома $f(t)$ вида $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n n^{it}$ с

$$\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \leq 1, \quad \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \leq 1$$

найдется полином $g(t) = \sum_{n \in \Lambda} b_n n^{it}$ с

$$\sup_{|t| \leq T/2} |g(t) - f(t)| \leq C [\log(N + T)]^{18} \rho^{-1/2}$$

(здесь и ниже C – абсолютная постоянная).

2. О доказательстве теоремы. Более тридцати лет назад в теории поперечников было установлено [2], что некоторые k -мерные подпространства $\mathbb{R}^N$ очень хорошо аппроксимируют в равномерной метрике евклидов шар в $\mathbb{R}^N$ даже при N гораздо больших k . В связи с задачей о тригонометрических поперечниках, введенных в [3], естественно возникает вопрос о существовании таких примеров среди “координатных” подпространств, т.е. в данном случае подпространств, порожденных каким-то набором элементов дискретной тригонометрической системы. Первый результат о существовании “координатных”

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00598-а, 08-01-00799-а, 09-01-12173-офи_м).

тригонометрических подпространств в $\mathbb{R}^N$ размерности $k \leq \gamma N$, $\gamma < 1$ – абсолютная постоянная, $N = 2, 3, \dots$, хорошо приближающих в равномерной метрике евклидов шар был получен Бургейном и усовершенствован Талаграном [4]. При этом порядок приближения, доставляемого такими подпространствами, ухудшается лишь на логарифмический множитель по сравнению с подпространствами общего вида. Недавно Гедоном, Мендельсоном, Пажором и Томчак-Ягерманн [5] был получен результат общего характера о существовании “координатных” подпространств малой размерности с хорошими аппроксимационными свойствами, порожденных элементами произвольного равномерно ограниченного ортонормированного базиса в L_2^N . Схема доказательства, использованная в [5], применяется и при доказательстве следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть задан набор элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset L_2^N$ с $\|\varphi_i\|_{L_2^N} \leq K$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для любого m , $1 \leq m \leq n$, найдется подмножество $\Lambda \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что $|\Lambda| = m$ и

$$\sup_{\{a_i\}_{i=1}^n, \sum |a_i|^2 \leq 1} \text{dist}_{L_2^N} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \text{span}(\varphi_i, i \in \Lambda) \right) \leq C \cdot K (\log N)^{7/2} \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Отметим, что в приведенном предложении, доказательство которого использует также теорему 6 из [6], отсутствует требование ортогональности системы $\{\varphi_i\}$.

В доказательстве теоремы помимо методов геометрии банаховых пространств используется и техника гармонического анализа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
 [2] Б. С. Кашин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351. [3] Р. С. Исмагилов, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178. [4] M. Talagrand, *Israel J. Math.*, **108** (1998), 173–191.
 [5] O. Guédon, S. Mendelson, A. Pajor, N. Tomczak-Jaegermann, *Positivity*, **11**:2 (2007), 269–283. [6] J. Bourgain, A. Pajor, S. J. Szarek, N. Tomczak-Jaegermann, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math., **1376**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 50–63.

Ж. Бургейн

Institute for Advanced Study,
 School of Mathematics, Princeton
E-mail: bourgain@math.ias.edu

Поступило

30.10.2009

Б. С. Кашин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kashin@mi.ras.ru