Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Горюнов, В. А. Михайлец, Резольвентная сходимость операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 311–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:09:28

Резольвентная сходимость операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами

А. С. Горюнов, В. А. Михайлец

1. Основной результат. Пусть на компактном интервале $[a, b]$ задано формальное дифференциальное выражение

$$l(y) = -y''(t) + q'(t)y(t), \quad q(\cdot) \in L_2([a, b], \mathbb{C}) =: L_2. \quad (1.1)$$

Его можно строго определить как квазидифференциальное $l(y) := D^{[2]}y$, введя квази-производные [1]:

$$D^{[0]}y = y, \quad D^{[1]}y = y' - qy, \quad D^{[2]}y = -(D^{[1]}y)' - qD^{[1]}y - q^2y.$$

Рассмотрим семейство квазидифференциальных выражений $l_\varepsilon(\cdot)$ вида (1.1) с потенциалами $q_\varepsilon(\cdot) \in L_2$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. В гильбертовом пространстве L_2 с нормой $\|\cdot\|_2$ с каждым из них можно связать замкнутый плотно заданный квазидифференциальный оператор $L_\varepsilon y := l_\varepsilon(y)$,

$$\text{Dom}(L_\varepsilon) := \{y \in L_2 : \exists D_\varepsilon^{[2]}y \in L_2, \alpha(\varepsilon)\mathcal{Y}_a(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)\mathcal{Y}_b(\varepsilon) = 0\},$$

где матрицы $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, а векторы

$$\mathcal{Y}_a(\varepsilon) := \{y(a), D_\varepsilon^{[1]}y(a)\}, \quad \mathcal{Y}_b(\varepsilon) := \{y(b), D_\varepsilon^{[1]}y(b)\} \in \mathbb{C}^2.$$

Напомним, что семейство операторов L_ε сходится к L_0 в смысле равномерной резольвентной сходимости, $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$, если найдется число $\mu \in \mathbb{C}$, принадлежащее резольвентным множествам $\rho(L_0)$ и $\rho(L_\varepsilon)$ (при всех достаточно малых ε) и

$$\|(L_\varepsilon - \mu)^{-1} - (L_0 - \mu)^{-1}\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Это определение не зависит от выбора точки $\mu \in \rho(L_0)$ [2].

В работе [1] для случая, когда матрицы $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)$ не зависят от ε , наряду с прочим, фактически установлена следующая важная

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\|q_\varepsilon - q_0\|_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ и резольвентное множество оператора L_0 не является пустым. Тогда $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$.

Целью данной работы является обобщение теоремы 1 на случай граничных условий, которые зависят от ε , и ослабление условия на L_2 -сходимость потенциалов на основе результатов работ [3], [4].

Введем обозначения $c^\vee(t) := \int_a^t c(x) dx$, $\|\cdot\|_C$ – sup-норма.

ТЕОРЕМА 2. Пусть резольвентное множество оператора L_0 не является пустым и при $\varepsilon \rightarrow +0$ выполняются следующие условия:

- 1) $\|q_\varepsilon\|_2 = O(1)$;
- 2) $\|(q_\varepsilon - q_0)^\vee\|_C \rightarrow 0$;
- 3) $\|(q_\varepsilon^2 - q_0^2)^\vee\|_C \rightarrow 0$;
- 4) $\alpha(\varepsilon) \rightarrow \alpha(0), \beta(\varepsilon) \rightarrow \beta(0)$.

Тогда $L_\varepsilon \xrightarrow{R} L_0$.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант № 28.1/017).

Отметим, что условие 3) не является аддитивным. Условие 1) (с учетом 2), 3)) можно ослабить в нескольких направлениях.

Фактически нами будет доказано более сильное утверждение о сходимости функций Грина рассматриваемых операторов по норме $\|\cdot\|_\infty$ пространства L_∞ на квадрате $[a, b] \times [a, b]$.

2. Сравнение теорем 1 и 2. Покажем, что если $\|q_\varepsilon - q_0\|_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow +0$, то выполняются условия 1), 2), 3) теоремы 2.

Действительно, $\|q_\varepsilon\|_2 \leq \|q_\varepsilon - q_0\|_2 + \|q_0\|_2 = O(1)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^t (q_\varepsilon - q_0) ds \right| &\leq \int_a^b |q_\varepsilon - q_0| ds \leq \left(\int_a^b |q_\varepsilon - q_0|^2 ds \right)^{1/2} (b-a)^{1/2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \\ \left| \int_a^t (q_\varepsilon^2 - q_0^2) ds \right| &\leq \int_a^b |q_\varepsilon^2 - q_0^2| ds \leq \int_a^b |q_\varepsilon - q_0| |q_\varepsilon + q_0| ds \\ &\leq \left(\int_a^b |q_\varepsilon - q_0|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b |q_\varepsilon + q_0|^2 ds \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Приводимый ниже пример показывает, что теорема 2 сильнее теоремы 1.

ПРИМЕР 1. Пусть $q_0(t) \equiv 0$, $q_\varepsilon(t) = e^{it/\varepsilon}$, $t \in [0, 1]$.

Семейство операторов L_ε , определяемых этими потенциалами, не удовлетворяет условиям теоремы 1, так как

$$\|q_\varepsilon - q_0\|_2^2 = \|q_\varepsilon\|_2^2 = \int_0^1 |q_\varepsilon|^2 ds \equiv 1.$$

Нетрудно убедиться, что функции $q_\varepsilon(\cdot)$ не сходятся к нулю даже по мере Лебега. Однако они удовлетворяют условиям 1), 2), 3) теоремы 2. Действительно, $\|q_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|q_\varepsilon^\vee\|_C &= \left\| \int_0^t e^{is/\varepsilon} ds \right\|_C \leq 2\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \\ \|(q_\varepsilon^2)^\vee\|_C &= \left\| \int_0^t (e^{is/\varepsilon})^2 ds \right\|_C \leq \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

3. Предварительный результат. Рассмотрим краевую задачу

$$y'(t; \varepsilon) = A(t; \varepsilon)y(t; \varepsilon) + f(t; \varepsilon), \quad t \in [a, b], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad (3.1_\varepsilon)$$

$$U_\varepsilon y(\cdot; \varepsilon) = 0, \quad (3.2_\varepsilon)$$

где матрицы-функции $A(\cdot, \varepsilon) \in L_1^{m \times m}$, вектор-функции $f(\cdot, \varepsilon) \in L_1^m$, а линейные непрерывные операторы $U_\varepsilon: C([a, b]; \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C}^m$.

Следуя [3], [4], введем дескриптивное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{M}^m[a, b] =: \mathcal{M}^m$, $m \in \mathbb{N}$, – класс всех параметризованных ε матриц-функций $R(\cdot; \varepsilon): [0, \varepsilon_0] \rightarrow L_1^{m \times m}$, для которых решение задачи Коши

$$Z'(t; \varepsilon) = R(t; \varepsilon)Z(t; \varepsilon), \quad Z(a; \varepsilon) = I_m,$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|Z(\cdot; \varepsilon) - I_m\|_C = 0.$$

Конструктивные достаточные условия того, что $R(\cdot; \varepsilon) \in \mathcal{M}^m$ вытекают из результатов [5]. Простейшее из них:

$$\|R(\cdot; \varepsilon)\|_1 = O(1), \quad \|R^\vee(\cdot; \varepsilon)\|_C \rightarrow 0,$$

где $\|\cdot\|_1$ – норма в $L_1^{m \times m}$, используется в доказательстве теоремы 2.

В работе [4] установлена следующая общая

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) однородная предельная краевая задача (3.1_ε), (3.2_ε), $\varepsilon = 0$, с $f(\cdot; 0) \equiv 0$ имеет только тривиальное решение;
- 2) $A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0) \in \mathcal{M}^m$;
- 3) $\|U_\varepsilon - U_0\| \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow +0$.

Тогда для достаточно малых ε существуют матрицы Грина $G(t, s; \varepsilon)$ задач (3.1_ε), (3.2_ε) и на квадрате $[a, b] \times [a, b]$

$$\|G(\cdot, \cdot; \varepsilon) - G(\cdot, \cdot; 0)\|_\infty \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (3.3)$$

Условие 3) теоремы 3 нельзя заменить более слабым условием сильной сходимости операторов $U_\varepsilon \xrightarrow{s} U_0$ [4]. Однако, как нетрудно убедиться, для многоточечных “краевых” операторов

$$U_\varepsilon y := \sum_{k=1}^n B_k(\varepsilon) y(t_k), \quad \{t_k\} \subset [a, b], \quad B_k(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

как условие сильной, так и условие равномерной сходимости равносильны тому, что

$$\|B_k(\varepsilon) - B_k(0)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

4. Доказательство теоремы 2. Приведем вначале две простые леммы, которые позволят свести теорему 2 к теореме 3.

ЛЕММА 1. Функция $y(t)$ является решением краевой задачи

$$D_\varepsilon^{[2]} y(t) = f(t; \varepsilon) \in L_2, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad (4.1)$$

$$\alpha(\varepsilon) \mathcal{Y}_a(\varepsilon) + \beta(\varepsilon) \mathcal{Y}_b(\varepsilon) = 0, \quad (4.2)$$

тогда и только тогда, когда вектор-функция $w(t) = (y(t), D_\varepsilon^{[1]} y(t))$ является решением краевой задачи

$$w'(t) = A(t; \varepsilon) w(t) + \varphi(t; \varepsilon), \quad (4.3)$$

$$\alpha(\varepsilon) w(a) + \beta(\varepsilon) w(b) = 0, \quad (4.4)$$

где квадратная матрица-функция

$$A(\cdot; \varepsilon) := \begin{pmatrix} q_\varepsilon & 1 \\ -q_\varepsilon^2 & -q_\varepsilon \end{pmatrix} \in L_1^{2 \times 2}, \quad (4.5)$$

а $\varphi(\cdot; \varepsilon) := (0, -f(\cdot; \varepsilon))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (D_\varepsilon^{[0]} y(t))' = q_\varepsilon(t) D_\varepsilon^{[0]} y(t) + D_\varepsilon^{[1]} y(t), \\ (D_\varepsilon^{[1]} y(t))' = -q_\varepsilon^2(t) D_\varepsilon^{[0]} y(t) - q_\varepsilon(t) D_\varepsilon^{[1]} y(t) - f(t; \varepsilon). \end{cases}$$

Если $y(\cdot)$ – решение уравнения (4.1), то из определения квазипроизводных следует, что $y(\cdot)$ есть решение этой системы. С другой стороны, положив $w(t) = (D_\varepsilon^{[0]} y(t), D_\varepsilon^{[1]} y(t))$ и $\varphi(t; \varepsilon) = (0, -f(t; \varepsilon))$, данную систему можно записать в виде уравнения (4.3).

Учитывая, что $\mathcal{Y}_a(\varepsilon) = w(a)$, $\mathcal{Y}_b(\varepsilon) = w(b)$, легко видеть, что краевые условия (4.2) эквивалентны краевым условиям (4.4).

ЛЕММА 2. Пусть выполнено предположение

$$\text{однородная краевая задача } D_0^{[2]}y(t) = 0, \alpha(0)\mathcal{Y}_a(0) + \beta(0)\mathcal{Y}_b(0) = 0 \quad (\mathcal{E})$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда для достаточно малых ε существует функция Грина $\Gamma(t, s; \varepsilon)$ полуднородной краевой задачи (4.1), (4.2) и

$$\Gamma(t, s; \varepsilon) = -g_{12}(t, s; \varepsilon) \quad \text{n.в.},$$

где $g_{12}(t, s; \varepsilon)$ – элемент матрицы Грина $G(t, s; \varepsilon) = (g_{ij}(t, s; \varepsilon))_{i,j=1}^2$ двухточечной векторной краевой задачи (4.3), (4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположения ($\mathcal{E}$) в силу теоремы 3 и леммы 1 следует, что однородная краевая задача

$$w'(t) = A(t; \varepsilon)w(t), \quad \alpha(\varepsilon)w(a) + \beta(\varepsilon)w(b) = 0,$$

для достаточно малых ε имеет только тривиальное решение. Тогда для задачи (4.3), (4.4) существует матрица Грина $G(t, s; \varepsilon) = (g_{ij}(t, s; \varepsilon))_{i,j=1}^2 \in L_\infty^{2 \times 2}$, с помощью которой единственное решение задачи (4.3), (4.4) записывается в виде

$$w_\varepsilon(t) = \int_a^b G(t, s; \varepsilon) \varphi(s; \varepsilon) ds, \quad t \in [a, b], \quad \varphi(\cdot; \varepsilon) \in L_2.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{cases} D_\varepsilon^{[0]} y_\varepsilon(t) = \int_a^b g_{12}(t, s; \varepsilon) (-\varphi(s; \varepsilon)) ds, \\ D_\varepsilon^{[1]} y_\varepsilon(t) = \int_a^b g_{22}(t, s; \varepsilon) (-\varphi(s; \varepsilon)) ds, \end{cases}$$

где $y_\varepsilon(\cdot)$ – единственное решение задачи (4.1), (4.2). Отсюда следует утверждение леммы 2.

Переходя непосредственно к доказательству теоремы 2, заметим, что так как

$$(q_\varepsilon + \mu)^2 - (q_0 + \mu)^2 = (q_\varepsilon^2 - q_0^2) + 2\mu(q_\varepsilon - q_0),$$

то в силу условий 2), 3) можно не уменьшая общности считать, что $0 \in \rho(L_0)$. Покажем, что

$$\sup_{\|f\|_2=1} \|L_\varepsilon^{-1}f - L_0^{-1}f\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Уравнение $L_\varepsilon^{-1}f = y_\varepsilon$ эквивалентно тому, что $L_\varepsilon y_\varepsilon = f$, т.е. y_ε является решением задачи (4.1), (4.2). При этом из включения $0 \in \rho(L_0)$ следует, что выполняется предположение ($\mathcal{E}$) леммы 2. Из условий 1)–3) теоремы 2 следует, что $A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0) \in \mathcal{M}^2$, где $A(\cdot; \varepsilon)$ задано формулой (4.5). Поэтому из условий теоремы 2 вытекает, что выполнены условия теоремы 3 для задачи (4.3), (4.4). Это значит, что существуют матрицы Грина $G(t, s; \varepsilon)$ задач (4.3), (4.4) и выполняется предельное соотношение (3.3). Учитывая лемму 2, это влечет предельное равенство

$$\|\Gamma(\cdot, \cdot; \varepsilon) - \Gamma(\cdot, \cdot; 0)\|_\infty \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Тогда

$$\|L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1}\| = \sup_{\|f\|_2=1} \left\| \int_a^b [\Gamma(t, s; \varepsilon) - \Gamma(t, s; 0)] f(s) ds \right\|_2$$

$$\begin{aligned} &\leq (b-a)^{1/2} \sup_{\|f\|_2=1} \left\| \int_a^b |\Gamma(t, s; \varepsilon) - \Gamma(t, s; 0)| |f(s)| ds \right\|_C \\ &\leq (b-a) \|\Gamma(\cdot, \cdot; \varepsilon) - \Gamma(\cdot, \cdot; 0)\|_\infty \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned}$$

что влечет утверждение теоремы 2.

5. Три расширения теоремы 2. Как уже отмечалось, предположения теоремы 2 можно ослабить. Положим

$$R(\cdot; \varepsilon) := A(\cdot; \varepsilon) - A(\cdot; 0),$$

где матрица-функция $A(\cdot; \varepsilon)$ определена равенством (4.5).

ТЕОРЕМА 4. В формулировке теоремы 2 условие 1) можно заменить любым из следующих трех более общих с учетом 2) и 3) асимптотических по $\varepsilon \rightarrow +0$ условий:

- (I) $\|R(\cdot; \varepsilon)R^\vee(\cdot; \varepsilon)\|_1 \rightarrow 0$;
- (II) $\|R^\vee(\cdot; \varepsilon)R(\cdot; \varepsilon)\|_1 \rightarrow 0$;
- (III) $\|R(\cdot; \varepsilon)R^\vee(\cdot; \varepsilon) - R^\vee(\cdot; \varepsilon)R(\cdot; \varepsilon)\|_1 \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2, если учесть следующее замечание. Для выполнения условия 2) теоремы 3 достаточно (см. [5]), чтобы $\|R^\vee(\cdot; \varepsilon)\|_C \rightarrow 0$ и выполнялось либо условие $\|R(\cdot; \varepsilon)\|_1 = O(1)$ (как в теореме 2), либо любое из трех условий (I), (II), (III) из теоремы 4.

Приводимый ниже пример свидетельствует, что теорема 4 (в каждой из своих частей) сильнее теоремы 2.

ПРИМЕР 2. Пусть $q_0(t) \equiv 0$, $q_\varepsilon(t) = \rho(\varepsilon)e^{it/\varepsilon}$, $t \in [0, 1]$.

Несложные вычисления показывают, что если

$$\rho(\varepsilon) \uparrow \infty, \quad \varepsilon \rho^3(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

то выполнены предположения 2), 3) теоремы 4 и любое из условий (I), (II), (III) теоремы 4. Однако нарушается условие 1) теоремы 2, так как $\|q_\varepsilon - q_0\|_2 \uparrow \infty$.

Для операторов Шрёдингера вида (1.1) на $\mathbb{R}$ с вещественнозначным периодическим потенциалом q' , где $q \in L_2^{\text{loc}}$, самосопряженность и достаточные условия равномерной резольвентной сходимости установлены в [6]. В связи с другими исследованными в [1] вопросами см. также работы [7], [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 897–912. [2] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [3] В. А. Михайлец, Н. В. Рева, *Докл. НАН Украины*, 2008, № 9, 23–27. [4] В. А. Михайлец, Н. В. Рева, *Сб. трудов Ин-та матем. НАН Украины*, **5**, 1, *Ин-т матем. НАН Украины*, Киев, 2008, 227–239. [5] А. Ю. Левин, *Докл. АН СССР*, **176:4** (1967), 774–777. [6] V. Mikhalets, V. Molyboga, *Methods Funct. Anal. Topology*, **14:2** (2008), 184–200. [7] А. С. Горюнов, В. А. Михайлец, *Докл. НАН Украины*, 2009, № 4, 19–24. [8] А. С. Горюнов, В. А. Михайлец, *Докл. НАН Украины*, 2009, № 9, 27–31.

А. С. Горюнов

Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: goriunov@imath.kiev.ua

В. А. Михайлец

Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: mikhalets@imath.kiev.ua

Поступило

08.06.2009

Исправленный вариант

18.08.2009