Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Андриянов, О полноте одной системы аналитических функций, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 163–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:32:10

О полноте одной системы аналитических функций

Г. И. Андриянов

В работе рассматривается новый метод установления полноты некоторых систем аналитических функций в пространстве $A(D)$. Указаны приложения полученных результатов к ситуации принципа дважды симметричных множеств Казьмина, к задаче Абеля–Гончарова (проблема единственности и конструкции) и к другим случаям.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Пусть D – односвязная ограниченная область с односвязным дополнением $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D$ до всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$; $A(D)$ – пространство функций $f(z)$, регулярных в области D , с топологией равномерной сходимости на компактах из D . Через $A_0(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D)$ обозначаем пространство функций $g(z)$, $g(\infty) = 0$, регулярных на $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D$, с индуцированной топологией сопряженного пространства, которое может быть реализовано в виде $A(D)$.

Хорошо известно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система функций $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$, регулярных в области D , называется *полной* в пространстве $A(D)$, если замыкание линейной оболочки данной системы по топологии пространства $A(D)$ совпадает со всем $A(D)$.

Во многих задачах теории функций, связанных с интерполяцией и решением конечно-разностных уравнений, возникает вопрос о полноте системы функций вида

$$\bigcup_{j=0}^{p-1} \{[W_j(z)]^{np+l_j} A_j(z)\}_{n=0}^\infty, \quad p \geq 2, \quad p \in \mathbb{N}, \quad l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 0 \leq l_j \leq p-1, \quad (1)$$

где $W_j(z)$ – однолистные регулярные в области D функции, $A_j(z)$ также регулярны в D (см. [1]–[5]).

В работе [6] был найден критерий полноты системы функций (1) в пространстве $A(D)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть имеются p , $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, функций $W_j(z)$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, которые голоморфны и однолистны в области D . Кроме того, задаются p аналитических в D функций $A_j(z)$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, не имеющих нулей в области D .

Система функций (1) полна в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда не существует ни одной совокупности из p функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $f_j(w) \in A_0(\overline{C}_w \setminus G_j)$, $G_j \equiv W_j(D)$, $f_j(w) \not\equiv 0$, $j = 0, 1, \dots, p-1$;
- 2) лорановские части функций $f_j(w)$ не имеют степеней вида $1/w^{np+l_j+1}$;
- 3) система функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$ удовлетворяет условию

$$f_0(W_0(z))W_0'(z)A_j(z) - f_j(W_j(z))W_j'(z)A_0(z) \in A(D), \quad j = 1, 2, \dots, p-1.$$

В настоящей работе рассматриваются приложения теоремы 1 (при $p = 2$) к вопросам полноты некоторых систем аналитических функций в пространстве $A(D)$ и к интерполяционной задаче Абея–Гончарова (А–Г). Заметим, что ранее в направлении изучения полноты систем функций вида (1) (даже при $p = 2$) было получено сравнительно небольшое число результатов (см. [1]–[5], [7]–[10]), полученных разными методами; кроме того, часто речь шла лишь о достаточных условиях полноты (см. [11], [12]).

2. Полнота систем аналитических функций в пространстве $A(D)$ (общие утверждения). Пусть D – односвязная ограниченная область, о которой говорилось во введении, $W(z)$ – голоморфная и однолистная в D функция: $D \mapsto G \equiv W(D)$, $0 \in G$, через $z = Z(w)$ обозначаем функцию, обратную к $W(z)$. Кроме того, потребуем, чтобы область G обладала следующим свойством:

$$G \cap \{-G\} = G^* - \text{односвязная область}, \quad (2)$$

где $\{-G\} \equiv \{w : -w \in G\}$. Пусть $A_j(z)$, $j = 0, 1$, – голоморфные функции, не имеющие нулей в области D . Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Система функций

$$\{[W(z)]^{2n}A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n+1}A_1(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad (3)$$

полна в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда функция

$$\Delta(w) \equiv A_0(Z(w))A_1(Z(-w)) + A_0(Z(-w))A_1(Z(w)) \quad (4)$$

не имеет в области G ни одной пары нулей, симметричных друг другу относительно начала координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. От противного: пусть $\Delta(w)$ в (4) не имеет указанных выше нулей в области G , но тем не менее, система функций (3) неполна в $A(D)$. Приведем это предположение к противоречию. Действительно, из теоремы 1 заключаем, что существуют функции $\Phi_0^-(w)$, $\Phi_1^-(w)$ такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \Phi_j^-(w) \in A_0(\overline{C}_w \setminus G), \quad \Phi_j^-(w) \not\equiv 0, \quad G \equiv W(D), \quad j = 0, 1; \\ 2) \Phi_0^-(w) - \text{четная}, \quad \Phi_1^-(w) - \text{нечетная}; \\ 3) \Phi_j^-(w), \quad j = 0, 1, \text{ удовлетворяют условию} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\Phi_0^-(W(z))W'(z)A_1(z) - \Phi_1^-(W(z))W'(z)A_0(z) \in A(D).$$

Условия (5) на функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, можно записать в виде следующей краевой задачи: найти $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, удовлетворяющие условиям 1), 2) в (5) и связанные следующим краевым условием на некотором контуре Γ_z ($\Gamma_z \subset D$, Γ_z достаточно близок к ∂D , Γ_z – гладкий спрямляемый жордановый контур):

$$\Phi_0^-(W(z))A_1(z) - \Phi_1^-(W(z))A_0(z) = \Phi^+(z),$$

где $\Phi^+(z) \in A(\Gamma_z \cup \text{int } \Gamma_z)$ (ниже $\Phi^+(z) \in A(\overline{\Gamma}_z)$).

Перепишем это краевое условие эквивалентным образом на контур Γ_w : $\Gamma_w \equiv W(\Gamma_z)$:

$$\Phi_0^-(w)A_1(Z(w)) - \Phi_1^-(w)A_0(Z(w)) = \Phi^+(w);$$

здесь $\Phi^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_w)$.

Из (2) получаем систему краевых условий на некотором контуре Γ_w^* , Γ_w^* симметричен относительно начала координат в $\mathbb{C}_w$, $\Gamma_w^* \subset G$, Γ_w^* гомотопен Γ_w :

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w)A_1(Z(w)) - \Phi_1^-(w)A_0(Z(w)) = \Phi_0^+(w), \\ \Phi_0^-(w)A_1(Z(-w)) + \Phi_1^-(w)A_0(Z(-w)) = \Phi_1^+(w), \end{cases}$$

где $\Phi_j^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_w^*)$, $j = 0, 1$, и $\Phi_j^-(w) \in A_0(\bar{C}_w \setminus G^*)$, $G^* \equiv \text{int } \Gamma_w^*$.

Отсюда заключаем, что на контуре Γ_w^* имеют место соотношения

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w)\Delta(w) = \Psi_0^+(w), \\ \Phi_1^-(w)\Delta(w) = \Psi_1^+(w), \end{cases} \quad (6)$$

здесь $\Psi_j^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_w^*)$, $j = 0, 1$, а $\Delta(w)$ – функция вида (4).

Рассмотрим первую строку в (6):

$$\Phi_0^-(w)\Delta(w) = \Psi_0^+(w). \quad (7)$$

Согласно нашему предположению $\Delta(w)$ не имеет “симметричных” нулей (т.е. нулей, симметричных относительно начала координат в области G) и полюсов на $\Gamma_w^* \cup \text{int } \Gamma_w^*$. Не теряя общности, можем считать, что $\Delta(w)$ имеет ровно два нуля w_1 и w_2 ($w_1 \neq -w_2$) внутри контура Γ_w^* . Из (7) следует, что не существует четной функции $\Phi_0^-(w) \not\equiv 0$, $\Phi_0^-(w) \in A_0(\bar{C}_w \setminus G)$, удовлетворяющей указанному выше краевому условию. Противоречие с пунктом 1) в (5).

Необходимость. Пусть система функций (3) полна в пространстве $A(D)$. Покажем, что в этом случае условие (4) непременно имеет место (в общем случае можно считать, что $\Delta(w) \not\equiv 0$).

Предположим противное, т.е. что система функций (3) полна в $A(D)$, но тем не менее, $\Delta(w)$ в (4) имеет хотя бы два “симметричных” нуля в области G . Приведем это предположение к противоречию.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти пару функций $\Phi_j^-(w)$ ($\Phi_0^-(w)$ четную, $\Phi_1^-(w)$ нечетную), $\Phi_j^-(w) \in A_0(\bar{C}_w \setminus G)$, $\Phi_j^-(w) \not\equiv 0$, $j = 0, 1$, и функцию $\Phi_0^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_w)$ (последняя нас не интересует), связанные на контуре $\Gamma_w \subset G$ ($\Gamma_w = W(\Gamma_z)$, Γ_z описан выше) краевым условием

$$\Phi_0^-(w)A_1(Z(w)) - \Phi_1^-(w)A_0(Z(w)) = \Phi_0^+(w).$$

Рассуждая точно так же, как это делалось при доказательстве достаточности, снова получим краевое условие (7). Согласно (4) функция $\Delta(w)$ является четной и, следовательно, имеет только “симметричные” нули в $\text{int } \Gamma_w^*$. Не теряя общности, можем считать, что $\Delta(w)$ имеет только одну пару таких нулей:

$$\Delta(w) = (w^2 - w_0^2)X^+(w), \quad (8)$$

здесь $X^+(w) \neq 0$ для всех $w \in \{\bar{\Gamma}_w^*\}$, $X^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_w^*)$.

В таком случае из (7), (8) имеем следующее соотношение на контуре Γ_w^* :

$$\Phi_0^-(w)(w^2 - w_0^2) = \tilde{\Psi}_0^+(w),$$

где $\tilde{\Psi}_0^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_w^*)$.

Применяя теорему Лиувилля (см. [13]) и учитывая $\Phi_0^-(\infty) = 0$, заключаем, что

$$\Phi_0^-(w) \equiv \frac{a_0}{w^2 - w_0^2};$$

здесь a_0 – произвольная отличная от нуля постоянная (при $a_0 = 1$ $\Phi_0^-(w)$ будет полностью определена).

Рассмотрим теперь вторую строку в (6) и повторим рассуждения, аналогичные проведенным выше, тогда построим функцию $\Phi_1^-(w)$ (нечетную):

$$\Phi_1^-(w) \equiv \frac{w}{w^2 - w_0^2} \neq 0.$$

Функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, согласно построению, удовлетворяют всем условиям в (5). Применяя теорему 1, заключаем, что система функций (3) неполна в пространстве $A(D)$. Это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь две системы функций

$$\{[W(z)]^{2n} A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n} A_1(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad (9)$$

$$\{[W(z)]^{2n+1} A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n+1} A_1(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad (10)$$

где функции $W(z)$, $A_j(z)$, $j = 0, 1$, удовлетворяют условиям теоремы 2, и пусть выполнено условие (2). Тогда относительно систем функций (9) и (10) можно сформулировать теоремы, аналогичные теореме 2. Например, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Система функций (9) полна в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда функция $\Delta(w)$ вида

$$\Delta(w) \equiv A_0(Z(w))A_1(Z(-w)) - A_0(Z(-w))A_1(Z(w)) \quad (11)$$

не имеет в области G ни одной пары нулей, симметричных друг другу относительно начала координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для функции $\Delta(w)$ в (11), очевидно, имеем $\Delta(0) = 0$. Возможны следующие случаи:

- 1) $\Delta(w)$ имеет в точке $w = 0$ нуль первого порядка; тогда в условиях теоремы 3 речь идет о нулях w_0 и $\{-w_0\}$ таких, что $\Delta(w_0) = \Delta(-w_0) = 0$, но $w_0 \neq 0$;
- 2) если же $\Delta(w) = w^3 X^+(w)$, где $X^+(w) \neq 0$ при всех $w \in G$, то из теоремы 3 следует, что система функций (9) неполна в пространстве $A(D)$.

3. Определение полноты некоторых систем аналитических функций.

Покажем теперь как могут применяться полученные выше теоремы. Пусть имеем систему функций

$$\{[W(z)]^{2n} A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n+1} A_1(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad (12)$$

где

$$W(z) \equiv e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

– автоморфизм единичного круга: $\{|z| < 1\} \rightarrow \{|w| < 1\}$, $|a| < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $A_j(z)$, $j = 0, 1$, – голоморфные и не имеющие нулей в $|z| < 1$ функции. Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Система функций (12) полна в пространстве $A(|z| < 1)$ тогда и только тогда, когда функция $\Delta(w, a, \theta)$ вида

$$\Delta(w, a, \theta) \equiv A_0 \left(\frac{w + ae^{i\theta}}{w\bar{a} + e^{i\theta}} \right) A_1 \left(\frac{w - ae^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} \right) + A_0 \left(\frac{w - ae^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} \right) A_1 \left(\frac{w + ae^{i\theta}}{w\bar{a} + e^{i\theta}} \right)$$

не имеет нулей в круге $|w| < 1$.

Доказательство следует из теоремы 2.

Рассмотрим систему функций

$$\left\{ \left[\frac{z}{1-z} \right]^{2n} \frac{f_0(z)}{1-z} \right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{ \left[\frac{z}{1-z} \right]^{2n+1} \frac{f_1(z)}{1-z} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (13)$$

в области $D_r = \{|z| < r, r > 1\} \setminus [1, r)$.

Применяя теорему 2 при

$$W(z) \equiv \frac{z}{1-z}, \quad A_0(z) \equiv \frac{f_0(z)}{1-z}, \quad A_1(z) \equiv \frac{f_1(z)}{1-z},$$

где $f_j(z)$, $j = 0, 1$, – регулярные, не имеющие нулей в D_r функции, получим

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Система функций (13) полна в пространстве $A(D_r)$ тогда и только тогда, когда функция $\Delta(w)$ вида

$$\Delta(w) \equiv f_0 \left(\frac{w}{w+1} \right) f_1 \left(\frac{w}{w-1} \right) + f_0 \left(\frac{w}{w-1} \right) f_1 \left(\frac{w}{w+1} \right),$$

не имеет в области G ни одной пары нулей, симметричных друг другу относительно начала координат.

Это обобщение и усиление (в некотором смысле) одного результата Альпера [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В рассмотренных выше примерах образ области D при отображении функцией $W(z)$ обладал свойством (2). Спрашивается, можно ли отказаться от этого требования? В общем случае вопрос оказывается достаточно сложным, так что мы можем сформулировать пока только необходимое условие полноты системы функций (3) в соответствующем пространстве $A(D)$. В качестве примера рассмотрим следующую систему функций:

$$\{z^{4n} A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{z^{4n+2} A_1(z)\}_{n=0}^{\infty} \quad (14)$$

в области $D_1^+ \equiv \{z : z = x + iy, |z| < 1, y > 0\}$.

Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если система функций (14) полна в пространстве $A(D_1^+)$, то функция $\Delta(z)$ вида

$$\Delta(z) \equiv A_0(z)A_1(iz) + A_0(iz)A_1(z) \quad (15)$$

не имеет нулей в области $D_1^{++} \equiv \{z : z = x + iy, |z| < 1, x > 0, y > 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного: предположим, что система функций (14) полна в пространстве $A(D_1^+)$, но тем не менее, функция $\Delta(z)$ имеет нули в D_1^{++} . Приведем это предположение к противоречию.

Рассмотрим замкнутую область $\overline{D}_{1,\varepsilon}^+$ следующего вида:

$$\overline{D}_{1,\varepsilon}^+ \equiv \{z : \varepsilon \leq |z| \leq 1 - \varepsilon, \varepsilon \leq \arg z \leq \pi - \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}.$$

При отображении функцией $w = z^2$ замкнутая область $\overline{D}_{1,\varepsilon}^+$ перейдет в замкнутую область $\overline{G}_{1,\varepsilon}$:

$$\overline{G}_{1,\varepsilon} \equiv \{w : \varepsilon^2 \leq |w| \leq (1 - \varepsilon)^2, 2\varepsilon \leq \arg w \leq 2(\pi - \varepsilon)\}.$$

Перепишем систему функций (14) в эквивалентном виде:

$$\{[W(z)]^{2n} A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W(z)]^{2n+1} A_1(z)\}_{n=0}^{\infty},$$

где $W(z) \equiv z^2$.

Покажем, что имеет место следующее положение: если функция $\Delta(z)$ имеет нули в области D_1^{++} , то указанная выше система функций неполна в пространстве $A(D_1^+)$ и можно построить пару функций $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, обладающих свойствами

$$\begin{cases} 1) \Phi_j^-(w) \in A_0(\overline{C}_w \setminus G_1), \Phi_j^-(w) \not\equiv 0, G_1 \equiv W(D_1^+), j = 0, 1; \\ 2) \Phi_0^-(w) - \text{четная}, \Phi_1^-(w) - \text{нечетная}; \\ 3) \Phi_j^-(w), j = 0, 1, \text{удовлетворяют условию} \end{cases} \quad (16)$$

$$\Phi_0^-(z^2)A_1(z) - \Phi_1^-(z^2)A_0(z) \in A(D_1^+).$$

Действительно, условия (16) на функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, можно записать в виде краевой задачи: найти $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, удовлетворяющие условиям 1) и 2) в (16) и связанные на контуре $\Gamma_z \equiv \partial \overline{D}_{1,\varepsilon}^+$ следующим образом:

$$\Phi_0^-(z^2)A_1(z) - \Phi_1^-(z^2)A_0(z) = \Phi^+(z),$$

здесь $\Phi^+(z) \in A(\overline{\Gamma}_z)$.

В свою очередь, указанное выше краевое условие можно переписать в эквивалентном виде как условие на контур $\Gamma_w \equiv W(\Gamma_z)$:

$$\Phi_0^-(w)A_1(\sqrt{w}) - \Phi_1^-(w)A_0(\sqrt{w}) = \Phi^+(w), \quad (17)$$

где полагаем $Z(w) \equiv \sqrt{w} : Z(1) = 1$ и $\Phi^+(w) \in A(\overline{\Gamma}_w)$.

Будем искать решение (т.е. функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$) краевой задачи (17) в классе рациональных функций, удовлетворяющих условиям (16).

В таком случае множества особых точек однозначных функций $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, симметричны относительно начала координат в $\mathbb{C}_w$ (и принадлежат $\text{int } \Gamma_w$). Видим, что в замкнутой области

$$\bar{G}_0 \equiv \{w : \varepsilon^2 \leq |w| \leq (1 - \varepsilon)^2, \pi - 2\varepsilon \leq \arg w \leq \pi + 2\varepsilon\}$$

можно так выбрать $\varepsilon > 0$, что функции $\Phi_j^-(w)$, $A_j(\sqrt{w})$, $j = 0, 1$, будут регулярны в этой области и, следовательно, на границе ее будет справедливо соотношение

$$\Phi_0^-(w)A_1(\sqrt{w}) - \Phi_1^-(w)A_0(\sqrt{w}) = \Phi^+(w). \quad (18)$$

Рассмотрим теперь замкнутую область $\bar{G}_1^+$ следующего вида:

$$\bar{G}_1^+ \equiv \{w : \varepsilon^2 \leq |w| \leq (1 - \varepsilon)^2, 2\varepsilon \leq \arg w \leq \pi - 2\varepsilon\}.$$

Обозначим через Γ_1 границу этой области, а через Γ_2 – контур вида

$$\Gamma_2 \equiv \{-\Gamma_1\}, \quad \text{где } \{-\Gamma_1\} \equiv \{w : -w \in \Gamma_1\}.$$

Таким образом, Γ_1 и Γ_2 симметричны друг другу относительно начала координат в $\mathbb{C}_w$. Из определения контуров Γ_1 , Γ_2 , свойства 2) в (16) и (17), (18) получаем следующую систему краевых задач на совокупности контуров Γ_1 и Γ_2 :

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w)A_1(\sqrt{w}) - \Phi_1^-(w)A_0(\sqrt{w}) = \Phi_0^+(w), \\ \Phi_0^-(w)A_1(\sqrt{-w}) + \Phi_1^-(w)A_0(\sqrt{-w}) = \Phi_1^+(w); \end{cases} \quad (19)$$

здесь $\Phi_j^+(w)$, $j = 0, 1$, регулярны на $\Gamma_1 \cup \{\text{int } \Gamma_1\} \cup \Gamma_2 \cup \{\text{int } \Gamma_2\}$.

Система краевых задач (19) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w)\Delta(w) = \Psi_0^+(w), \\ \Phi_1^-(w)\Delta(w) = \Psi_1^+(w), \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\Delta(w) \equiv A_0(\sqrt{-w})A_1(\sqrt{w}) + A_0(\sqrt{w})A_1(\sqrt{-w}), \quad (21)$$

а функции $\Psi_0^+(w)$, $\Psi_1^+(w)$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \Psi_0^+(w) \equiv \Phi_0^+(w)A_0(\sqrt{-w}) + \Phi_1^+(w)A_0(\sqrt{w}), \\ \Psi_1^+(w) \equiv \Phi_1^+(w)A_1(\sqrt{w}) - \Phi_0^+(w)A_1(\sqrt{-w}). \end{cases}$$

Заметим, что $\Delta(w)$ в (21) – четная функция и справедливо соотношение

$$\Delta(W(z)) = \Delta(z);$$

здесь $W(z) \equiv z^2$, а функция $\Delta(z)$ определена в (15).

Рассмотрим первую строку в системе (20):

$$\Phi_0^-(w)\Delta(w) = \Psi_0^+(w). \quad (22)$$

Согласно условию $\Delta(z)$ имеет нули в D_1^{++} . В таком случае и функция $\Delta(w)$ имеет нули в $\text{int } \Gamma_1$, но $\Delta(w)$ – функция четная и, следовательно, у $\Delta(w)$ найдутся нули

и в $\text{int } \Gamma_2$. Не теряя общности, можем считать, что $\Delta(w)$ имеет только по одному нулю в $\text{int } \Gamma_1$ и в $\text{int } \Gamma_2$ соответственно. Тогда для $\Delta(w)$ справедливо представление

$$\Delta(w) = (w^2 - w_0^2)X^+(w),$$

где $X^+(w)$ не имеет нулей и регулярна на $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$. Отсюда и из (22) убеждаемся в справедливости на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ соотношения

$$\Phi^-(w)(w^2 - w_0^2) = \frac{\Psi_0^+(w)}{X^+(w)}. \quad (23)$$

Применяя в (23) теорему Лиувилля и учитывая, что $\Phi_0^-(\infty) = 0$ ($\Phi_0^-(w)$ – функция четная), получим

$$\Phi_0^-(w) \equiv \frac{1}{w^2 - w_0^2}.$$

Повторяя подобные рассуждения со второй строкой в (20) и учитывая нечетность функции $\Phi_1^-(w)$, видим, что

$$\Phi_1^-(w) \equiv \frac{w}{w^2 - w_0^2}.$$

Таким образом, найдены две функции: $\Phi_0^-(w)$ четная и $\Phi_1^-(w)$ нечетная, которые являются решениями системы краевых задач (20). Следовательно, существуют решения краевой задачи (17), отличные от нуля. В таком случае найденные функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, удовлетворяют условиям (16). Применяя теорему 1, заключаем, что система функций (14) неполна в пространстве $A(D_1^+)$. Противоречие, ибо система функций (14) считалась полной в пространстве $A(D_1^+)$. Утверждение 3 доказано.

Рассмотрим теперь следующую систему функций (см. [9]):

$$\{[W(\pm z)]^{2n}\}_{n=0}^{\infty}, \quad (24)$$

где $w = W(z)$ – регулярная однолистная функция, отображающая ограниченную односвязную область D в область G :

$$G \equiv W(D),$$

причем область D будем считать симметричной относительно начала координат в $\mathbb{C}_z$ (пишут $D \subset S$, см. [9]). Примем обозначения (см. [9])

$$SWS(D) \equiv \{\text{компакты } B, B \subset D, B \neq \emptyset : B \subset S \text{ и } W(B) \subset S\},$$

т.е. B симметричен относительно начала координат в $\mathbb{C}_z$ и его образ $W(B)$ тоже симметричен относительно начала координат, но уже в $\mathbb{C}_w$.

Через $SWS_T(D)$ обозначим класс множеств B , состоящих из конечного и четного числа точек принадлежащих классу $SWS(D)$.

Через $SWS_{T_4}(D)$ обозначим класс множеств B вида

$$B \equiv \{\pm z_1, \pm z_2\}: B \subset SWS_T(D).$$

Аналогично, через $SWS_{T_2}(D)$ обозначим класс множеств B :

$$B \equiv \{\pm z_0\}: B \subset SWS_T(D).$$

В работе [14] доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если $SWS_T(D) \neq \emptyset$, то система функций (24) неполна в пространстве $A(D)$.

Предположим теперь, что выполнено следующее.

В-УСЛОВИЕ. Существует точка $a \in \mathbb{C}_w$ такая, что $\text{ch}(aw)$ имеет только два нуля в области G , причем эти нули симметричны относительно начала координат в $\mathbb{C}_w$.

Докажем, что справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если система функций (24) неполна в пространстве $A(D)$ и выполнено *В-условие*, то $SWS_{T_4}(D) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система функций (24) неполна в пространстве $A(D)$. Из теоремы 1 заключаем, что существует пара функций $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1$, обладающих следующими свойствами:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \Phi_j^-(w) \in A_0(\overline{C}_w \setminus G), \quad G \equiv W(D), \quad D \subset S, \quad \Phi_j^-(w) \neq 0, \quad j = 0, 1; \\ 2) \text{ функции } \Phi_j^-(w), \quad j = 0, 1, \text{ четные;} \\ 3) \text{ функции } \Phi_j^-(w) \text{ удовлетворяют условию} \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\Phi_0^-(W(z))W'(z) + \Phi_1^-(W(-z))W'(-z) \in A(D).$$

Как обычно, условия (25) можно переписать в виде некоторой краевой задачи, где ищутся функции $\Phi_j^-(w)$, удовлетворяющие условиям 1), 2) в (25) и связанные на контуре Γ_z ($\Gamma_z \subset S$, $\Gamma_z \subset D$, Γ_z близок к ∂D) краевым условием

$$\Phi_0^-(W(z))W'(z) + \Phi_1^-(W(-z))W'(-z) = \Phi^+(z), \quad (26)$$

здесь $\Phi^+(z) \in A(\overline{\Gamma}_z)$. В свою очередь, краевое условие (26) можно переписать в эквивалентном виде как условие на контуре Γ_w ($\Gamma_w \equiv W(\Gamma_z)$), $\text{supp } \Phi_j^-(w) \subset \text{int } \Gamma_w$, причем нули $\text{ch}(aw)$ (см. *В-условие*) принадлежат $\text{int } \Gamma_w$:

$$\Phi_0^-(\alpha(w))\alpha'(w) - \Phi_1^-(w) = \Phi^+(w), \quad (27)$$

где $\Phi^+(w) \in A(\overline{\Gamma}_w)$, $\alpha(w) \equiv W(-Z(w))$, $z = Z(w)$ – обращение $w = W(z)$.

Используя (25), видим, что найдется $\Phi_0^-(w)$ – четная функция такая, что выполнено $\Phi_0^-(w) \neq 0$, $\Phi_0^-(w) \in A_0(\overline{C}_w \setminus G)$. Образует функцию $F(w)$:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} e^{wt} \Phi_0^-(t) dt;$$

не теряя общности, можем считать, что контур Γ_t – это контур Γ_w , описанный в (27). Дифференцируя, получаем соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{(2n+1)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n+1} e^{at} \Phi_0^-(t) dt = a_{2n+1}, \\ F^{(2n+1)}(-a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n+1} e^{-at} \Phi_0^-(t) dt = a_{2n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$$

Откуда очевидно следует

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n+1} \text{ch}(at) \Phi_0^-(t) dt = a_{2n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Представим функцию $\text{ch}(at)\Phi_0^-(t)$ на контуре Γ_t в виде

$$\text{ch}(at)\Phi_0^-(t) = \psi_0^+(t) - \psi_0^-(t), \quad (29)$$

где $\psi_0^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_t)$, $\psi_0^-(w) \in A_0(\bar{C}_w \setminus \text{int } \Gamma_t)$, $\psi_0^-(w)$ – четная функция, (см. [15]).

Сравнивая (28), (29), видим, что справедливо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n+1} (-\psi_0^-(t)) dt = a_{2n+1},$$

следовательно, существует функция $g(w)$:

$$g(w) \equiv -\psi_0^-(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{w^{2n+2}} \in A_0(\bar{C}_w \setminus \text{int } \Gamma_t).$$

Из сказанного выше и (28) заключаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n+1} \{\text{ch}(at)\Phi_0^-(t) - g(t)\} dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (30)$$

С другой стороны, очевидно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n} \{\text{ch}(at)\Phi_0^-(t) - g(t)\} dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (31)$$

В таком случае из (30), (31) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^n \{\text{ch}(at)\Phi_0^-(t) - g(t)\} dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Последнее позволяет записать на контуре Γ_t :

$$\text{ch}(at)\Phi_0^-(t) - g(t) = \Phi^+(t),$$

где $\Phi^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_t)$.

Присоединяя сюда условие (27), получим систему краевых условий (задач) на контуре Γ_t :

$$\begin{cases} \text{ch}(at)\Phi_0^-(t) = \Phi^+(t) + g(t), \\ \Phi_0^-(\alpha(t))\alpha'(t) = \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t). \end{cases} \quad (32)$$

Напомним, что контур $\Gamma_t \subset G$, определяемый условием $\Gamma_t = W(\Gamma_z)$, $\Gamma_z \subset S$, переводится функцией $\alpha(w) \equiv W(-Z(w))$ снова в контур Γ_t . Сказанное выше позволяет переписать систему (32) в следующем виде:

$$\begin{cases} \text{ch}(a\alpha(t))\Phi_0^-(\alpha(t)) = \widehat{\Phi}_0^+(t) + g(\alpha(t)), \\ \Phi_0^-(\alpha(t)) = \widehat{\Phi}_1^+(t) + \frac{\Phi_1^-(t)}{\alpha'(t)}. \end{cases}$$

Откуда получаем своеобразную краевую задачу Римана об определении неизвестной функции $\Phi_1^-(w)$:

$$\text{ch}(a\alpha(t))\Phi_1^-(t) = \Psi^+(t) + g(\alpha(t))\alpha'(t), \quad (33)$$

решение которой проводится обычным способом (см. [15]).

Пусть w_1 и w_2 – нули функции $\text{ch}(a\alpha(w))$:

$$\text{ch}(a\alpha(w_1)) = \text{ch}(a\alpha(w_2)) = 0, \quad w_1, w_2 \in \text{int } \Gamma_t.$$

Тогда справедливо представление

$$X^+(w) = \frac{\text{ch}(a\alpha(w))}{(w - w_1)(w - w_2)}, \quad X^+(w) \neq 0, \quad w \in \text{int } \Gamma_t, \quad X^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_t).$$

Перепишем теперь краевое условие (33) в виде

$$(t - w_1)(t - w_2)\Phi_1^-(t) = \Psi^+(t) + \frac{g(\alpha(t))\alpha'(t)}{X^+(t)} \quad (34)$$

и представим функцию $g(\alpha(t))\alpha'(t)/X^+(t)$ на контуре Γ_t в виде разности

$$\frac{g(\alpha(t))\alpha'(t)}{X^+(t)} = \varphi^+(t) - \varphi^-(t), \quad (35)$$

где $\varphi^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_t)$, $\varphi^-(w) \in A_0(\bar{C}_w \setminus \text{int } \Gamma_t)$, $\varphi^-(\infty) = 0$, $\varphi^-(w) \neq 0$.

Из (34), (35) видно, что справедливо следующее краевое соотношение на контуре Γ_t :

$$(t - w_1)(t - w_2)\Phi_1^-(t) + \varphi^-(t) = \tilde{\psi}^+(t),$$

здесь $\tilde{\psi}^+(w) \in A(\bar{\Gamma}_t)$.

Применяя теперь теорему Лиувилля, заключаем

$$(w - w_1)(w - w_2)\Phi_1^-(w) + \varphi^-(w) \equiv a_0, \quad (36)$$

где a_0 – произвольная постоянная, $a_0 \neq 0$.

Из (36) имеем

$$\Phi_1^-(w) = \frac{a_0}{(w - w_1)(w - w_2)} - \frac{\varphi^-(w)}{(w - w_1)(w - w_2)}.$$

Разлагая правую часть в окрестности $w = \infty$, видим

$$\Phi_1^-(w) = \frac{a_0}{w^2} + \frac{a_0(w_1 + w_2)}{w^3} + \frac{a_1}{w^4} + \dots;$$

условие четности $\Phi_1^-(w)$ (существует $\Phi_1^-(w) \neq 0$) приводит к тому, что

$$a_0(w_1 + w_2) = 0,$$

однако $a_0 \neq 0$ (иначе противоречие в (36)), следовательно, имеем

$$w_1 = -w_2,$$

но $\text{ch}(a\alpha(w_1)) = \text{ch}(a\alpha(w_2)) = 0$ и выполнено B -условие. Не теряя общности, можем считать, что справедливо

$$\alpha(w_1) = i\frac{\pi}{2a}, \quad \alpha(w_2) = -i\frac{\pi}{2a}.$$

Примем обозначение $i\pi/(2a) = w^*$; в таком случае заключаем

$$\begin{cases} \alpha(w_1) = w^*, \\ \alpha(-w_1) = -w^*. \end{cases} \quad (37)$$

Из (37) следует, что существует B такое, что $B \neq \emptyset$, $B \subset SWS_{T_4}(D)$. Утверждение 5 доказано.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено B -условие. Система функций (24) полна в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда $SWS_{T_4}(D) = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В частном случае, когда прообразы точек w_1 и $-w_1$ симметричны друг другу относительно начала координат в $\mathbb{C}_z$ (при отображении $w = W(z)$), возникает класс $SWS_{T_2}(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 4 сильнее, чем аналогичный результат в [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 4 – существенное усиление принципа дважды симметричных множеств Казьмина (см. [9], [10]).

4. Приложения к интерполляции. Пусть D – односвязная ограниченная область, о которой говорилось во введении. Через $A(\exp, D)$ обозначаем пространство целых функций $F(z)$, представимых в виде (см. [7], [16])

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} e^{tz} g(t) dt,$$

где $g(z) \in A_0(\overline{C}_z \setminus D)$, $g(z)$ – ассоциированная по Борелю с $F(z)$, Γ_t – любой замкнутый жордановый спрямляемый контур такой, что функция $g(z)$ регулярна на $\Gamma_t \cup \text{ext } \Gamma_t$.

Рассмотрим интерполяционную задачу А–Г: найти целую функцию $F(z)$, $F(z) \in A(\exp, D)$, удовлетворяющую условиям

$$F^{(n)}(\lambda_n) = a_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

здесь числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность узлов интерполляции, имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_n = 2k + b_0 & \text{при } n = 2k, \\ \lambda_n = 2k + 1 + b_1 & \text{при } n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (39)$$

$b_0 \neq b_1$, $b_0, b_1 \in \mathbb{C}$ и $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ – некоторая допустимая последовательность комплексных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство $A(\exp, D)$ называется *пространством единственности* интерполяционной задачи А–Г (38), (39), если условия

$$F(z) \in A(\exp, D), \quad F^{(n)}(\lambda_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

влекут за собой $F(z) \equiv 0$ (см. [7], [16]–[19]).

Пусть U – область следующего вида:

$$U \equiv \left\{ z = \rho e^{i\varphi} : 0 \leq \rho < \frac{\pi - |\varphi|}{\sin |\varphi|}, |\varphi| \leq \pi \right\}.$$

Область U впервые была введена Гончаровым и Гельфондом (см. [17], [18]). Хорошо известно, что функция $w = ze^z$ голоморфна и однолистка в области U и отображает ее на плоскость $\mathbb{C}_w$ с разрезом от точки $u = -1/e$ ($w = u + iv$) вдоль отрицательной части действительной оси до бесконечности (см. [19]).

Рассмотрим уравнение

$$\psi(w) - \psi(-w) = \pm \frac{\pi i}{|2\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \tau \neq 0, \quad (40)$$

где $z = \psi(w)$ – функция, обратная к $w = ze^z$ в области U .

Корни уравнения (40) принадлежат мнимой оси в $\mathbb{C}_w$ (см. [20]), причем если w_1 – корень уравнения (40), то и $-w_1$ – корень уравнения (40). Обозначим через w^* ближайший к началу координат корень уравнения (40) такой, что $\text{Im } w^* > 0$. Через P^+ обозначим разрез в $\mathbb{C}_w$ следующего вида: он начинается в точке w^* и продолжается вдоль положительной части мнимой оси в бесконечность; P^- – разрез в $\mathbb{C}_w$, симметричный с P^+ относительно начала координат. Образы разрезов P^+ и P^- при отображении функцией $z = \psi(w)$ обозначим через γ^+ и γ^- соответственно.

Кривые γ^+ и γ^- подробно описаны в [6], [14], они симметричны друг другу относительно действительной оси в $\mathbb{C}_z$ и расположены в верхней ($\text{Im } z > 0$) и нижней ($\text{Im } z < 0$) полуплоскости $\mathbb{C}_z$ (и в области U) соответственно.

В [6] доказана

ТЕОРЕМА 5. Пусть D – ограниченная односвязная область с односвязным дополнением $\overline{\mathbb{C}_z} \setminus D$ до $\mathbb{C}_z$ и $\overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+ \cup \gamma^-\}$. Тогда пространство $A(\exp, D)$ является пространством единственности интерполяционной задачи А–Г (38), (39).

Докажем, что имеет место

ТЕОРЕМА 6. Пусть D – ограниченная односвязная область с односвязным дополнением $\overline{\mathbb{C}_z} \setminus D$ до $\mathbb{C}_z$ и $\overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+\}$. Тогда пространство $A(\exp, D)$ является пространством единственности интерполяционной задачи А–Г (38), (39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного: пусть $F(z) \in A(\exp, D)$, $\overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+\}$ и

$$F^{(n)}(\lambda_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

но тем не менее, $F(z) \not\equiv 0$. Приведем это предположение к противоречию.

Вычисляя указанные выше производные, получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_t} (te^t)^{2k} e^{tb_0} g(t) dt = 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_t} (te^t)^{2k+1} e^{tb_1} g(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (41)$$

где $g(z) \in A_0(\overline{\mathbb{C}_z} \setminus D)$, $g(z) \not\equiv 0$.

В таком случае из (41) заключаем, что система функций

$$\{(ze^z)^{2n} e^{zb_0}\}_{n=0}^{\infty} \cup \{(ze^z)^{2n+1} e^{zb_1}\}_{n=0}^{\infty}, \quad (42)$$

неполна в пространстве $A(D)$, $\overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+\}$ (см. [1], [16]).

Заметим, что образ области $U \setminus \{\gamma^+\}$ при отображении функцией $w = ze^z$ обладает свойством (2). Тогда к системе функций (42) заведомо применима теорема 2, согласно которой в области $G \equiv W(D)$ ($w = ze^z$) существует хотя бы одна пара “симметричных” нулей функции $\Delta(w, b_0, b_1)$:

$$\Delta(w, b_0, b_1) \equiv e^{\psi(w)b_0} e^{\psi(-w)b_1} + e^{\psi(-w)b_0} e^{\psi(w)b_1}.$$

Легко видеть, что нули функции $\Delta(w, b_0, b_1)$ совпадают с корнями уравнения

$$\psi(w) - \psi(-w) = \pm \frac{i\pi}{b_0 - b_1}. \quad (43)$$

Возможны следующие случаи:

$$1) \ b_0 - b_1 \neq 0, \ b_0 - b_1 \in \mathbb{R}, \quad 2) \ b_0 - b_1 \neq 0, \ b_0 - b_1 \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим первый случай: пусть $b_0 - b_1 = 2\tau$; тогда уравнение (43) примет вид (40), но в области

$$G_1 \equiv W(U \setminus \gamma^+) \equiv \mathbb{C}_w \setminus \left\{ \left(-\infty, -\frac{1}{e} \right] \cup P^+ \right\}$$

по построению нет ни одной пары “симметричных” корней уравнения (43). Следовательно, в области G_1 нет ни одной пары “симметричных” нулей функции $\Delta(w, b_0, b_1)$. Применяя теорему 2, заключаем, что система функций (42) полна в пространстве $A(D)$, указанном выше. В результате имеем противоречие, ибо система функций (42) считалась неполной. Случай 2 рассматривается аналогично. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Подобными же рассуждениями доказывается, что пространство

$$A(\exp, D), \quad \overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^-\},$$

есть пространство единственности интерполяционной задачи А–Г (38), (39).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В указанных выше пространствах

$$A(\exp, D), \quad \overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+\}, \quad \overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^-\},$$

может быть решена и проблема конструкции, т.е. можно указать вид функции $F(z)$: $F(z) \in A(\exp, D)$, удовлетворяющей условиям (38), (39) (см. [6]) при некоторых условиях допустимости на числовую последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ в (38).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Казьмин, “Общая проблема моментов в комплексной области”, *Proceedings of the Conference on the Constructive Theory of Functions (Approximation Theory)* (Budapest, 1969), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972, 225–254.
- [2] А. А. Миролубов, “К вопросу о полноте системы показательных функций”, *Сиб. матем. журн.*, 8:1 (1967), 3–10.
- [3] Ю. А. Казьмин, “Полнота в криволинейной полосе последовательности показательных функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1968, № 6, 18–30.

- [4] R. P. Boas, jr., “A completeness theorem”, *Amer. J. Math.*, **62**:1 (1940), 312–318.
- [5] R. P. Boas, jr., “Some uniqueness theorems for entire functions”, *Amer. J. Math.*, **62**:1 (1940), 319–324.
- [6] Г. И. Андриянов, “Модифицированная проблема моментов в комплексной области”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 804–814.
- [7] М. А. Евграфов, *Основные понятия интерполяции целых функций*, Препринт ИПМ АН СССР, М., 1975.
- [8] Ю. А. Казьмин, “Об одной задаче Гельфонда–Ибрагимова. I”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1965, № 3, 28–36.
- [9] Ю. А. Казьмин, “Об одном геометрическом признаке полноты”, *Матем. сб.*, **100**:2 (1976), 181–190.
- [10] Ю. А. Казьмин, “О принципе дважды симметричных множеств в теории интерполяции”, *Всероссийский симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области*, Тезисы докладов, Уфа, 1980.
- [11] С. Я. Альпер, “О полноте системы аналитических функций”, *Докл. АН СССР*, **206**:6 (1949), 1029–1032.
- [12] И. И. Ибрагимов, И. С. Аршон, “О полноте некоторых систем аналитических функций”, *Докл. АН СССР*, **197**:5 (1971), 1010–1013.
- [13] М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, М., 1991.
- [14] Г. И. Андриянов, *Интерполяционная задача Абеля–Гончарова*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, М., 1998.
- [15] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, М., 1977.
- [16] И. И. Ибрагимов, *Методы интерполяции и некоторые их применения*, Наука, М., 1971.
- [17] В. Л. Гончаров, “Интерполяционные процессы и целые функции”, *УМН*, 1937, № 3, 113–143.
- [18] А. О. Гельфонд, “Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка”, *УМН*, 1937, № 3, 144–174.
- [19] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, М., 1967.
- [20] Р. В. Адиебян, “Об интерполяционной задаче Абеля–Гончарова для целых функций экспоненциального типа”, *Уч. зап. Ереванск. гос. ун-та. Сер. естеств. науки*, **3** (1983), 20–27.

Г. И. Андриянов

Калужский филиал Московского государственного
технического университета им. Н. Э. Баумана

Поступило

23.07.2009

Исправленный вариант

04.04.2010