Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кошелев, Внутренние точки в теоремах Эрдёша–Секереша, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 578–596

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 08:37:00

Внутренние точки в теоремах Эрдёша–Секереша

В. А. Кошелев

Статья посвящена избранным задачам комбинаторной геометрии.

Библиография: 16 названий.

1. Введение и формулировки результатов. В 1935 г. Эрдёш и Секереш сформулировали следующую проблему (см. [1], [2]).

ПЕРВАЯ ПРОБЛЕМА ЭРДЁША–СЕКЕРЕША. Для любого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $g(n)$ такое, что из любого множества точек на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $g(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого n -угольника.

Напомним, что множество точек находится в общем положении, если никакие три его элемента не лежат на одной прямой.

В 1978 г. Эрдёш предложил следующую модификацию первой проблемы (см. [3]).

ВТОРАЯ ПРОБЛЕМА ЭРДЁША–СЕКЕРЕША. Для любого целого $n \geq 3$ найти минимальное положительное число $h(n)$ такое, что из любого множества точек $\mathcal{X}$ на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого и пустого n -угольника, т.е. этот n -угольник не содержит внутри себя других точек из $\mathcal{X}$.

Перечисленные проблемы являются классическими в комбинаторной геометрии и теории Рамсея (см. [4]–[7]). Обе они обобщаются следующим образом.

ТРЕТЬЯ ПРОБЛЕМА ТИПА ЭРДЁША–СЕКЕРЕША. Для любых целых $n \geq 3$ и $k \geq 0$ найти минимальное положительное число $h(n, k)$ такое, что из любого множества точек $\mathcal{X}$ на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n, k)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n , элементы которого являются вершинами выпуклого n -угольника C с условием $|(C \setminus \partial C) \cap \mathcal{X}| \leq k$, т.е. этот n -угольник содержит внутри себя не более k других точек из $\mathcal{X}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00294).

Для первой проблемы Эрдёша–Секереша известно, что

$$g(3) = 3, \quad g(4) = 5, \quad g(5) = 9 \text{ [1]}, \quad g(6) = 17 \text{ [8]},$$

а также в общем случае

$$[2] \ 2^{n-2} + 1 \leq g(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 1 \text{ [9]}.$$

Вторая проблема изучена более глубоко. Для нее доказаны следующие результаты:

$$h(3) = 3, \quad h(4) = 5, \quad h(5) = 10 \text{ [10]}, \quad [11] \ 30 \leq h(6) \leq 463 \text{ [12]},$$

и, наконец, при $n \geq 7$ величина $h(n)$ не существует (см. [13]). Именно в связи с этим возникает третья проблема и, в частности, вопрос о существовании величины $h(n, k)$ при $n > 7$.

Для третьей проблемы, как нетрудно видеть, всегда выполнены неравенства

$$g(n) \leq h(n, k) \leq h(n),$$

если соответствующие выражения существуют. Более того,

$$h(n) = h(n, 0) \geq h(n, 1) \geq h(n, 2) \geq \dots$$

и существует такое (максимальное) $\bar{k} = \bar{k}(n)$, что $h(n, \bar{k}) > g(n)$, а для всех $k > \bar{k}$, $h(n, k) = g(n)$ (например, очевидно, что $h(n, g(n) - n) = g(n)$). Для малых значений n очевидны следующие результаты:

$$h(3, k) = 3, \quad h(4, k) = 5, \quad h(5, 0) = 10, \quad h(5, \geq 1) = 9.$$

Последний результат обусловлен тем, что выпуклый пятиугольник с двумя или более точками внутри всегда содержит меньший выпуклый пятиугольник.

Некоторые более глубокие результаты по третьей проблеме получены в статье Сендова (см. [14]). В этой статье с использованием множества Хортонa (см. [13]), с помощью которого было доказано несуществование $h(7)$, доказывается несуществование $h(n, k)$ для определенных k при $n > 7$. Аналогичные результаты получены в статье Ныкловой [15]; кроме того, там доказано, что $h(6, \geq 6) = g(6)$, и представлен результат $h(6, 5) = 19$.

Если через $\underline{k}(n)$ обозначить максимальное значение k , для которого при данном n не существует величина $h(n, k)$, то и в работе Сендова, и в работе Ныкловой мы найдем оценку

$$\underline{k}(n) \geq (\sqrt[4]{2} + o(1))^n.$$

Мы установим значительно более сильную оценку.

Недавно автором этой статьи было доказано, что $h(6, 1) \leq g(7) \leq 127$ (см. [16]). Кроме того, по всей видимости, верно более сильное равенство $h(6, 1) = g(6) = 17$, из которого следует, что

$$h(6, 1) = h(6, 2) = h(6, 3) = h(6, 4) = h(6, 5) = 17.$$

Предполагаемое равенство $h(6, 5) = 17$, очевидно, противоречит приведенному выше результату Ныкловой. Дело в том, что этот результат был доказан неаккуратно и к нему имеются контрпримеры.

Итак, одним из основных результатов этой работы будет существенное уточнение нижней оценки для $\underline{k}(n)$. С другой стороны, большой интерес представляет также получение оценок для введенной выше величины $\bar{k}(n)$. Здесь основная трудность состоит в том, что мы не знаем точных значений $g(n)$, а имеем лишь гипотезу $g(n) = 2^{n-2} + 1$ (см. [1]). В связи с этим мы получим оценку величины $\tilde{k}(n)$, вплоть до которой $h(n, k) > 2^{n-2} + 1$ (при этом вполне может быть, что на самом деле всегда $\tilde{k}(n) = \bar{k}(n)$).

Рис. 1. Чашка и крышка

В связи с проблемами Эрдёша–Секереша очень часто рассматривают выпуклые ломаные, которые были предложены самими авторами задач в [1] и которые принято называть “чашками” и “крышками”. Напомним их определение. Пусть на плоскости дана система координат. Множество точек $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ называется n -чашкой, если $x_1 < \dots < x_n$ и

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} < \dots < \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}.$$

Это множество будет n -крышкой, если $x_1 < \dots < x_n$ и

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} > \dots > \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}.$$

Понятно, что типичная чашка и типичная крышка устроены так, как показано на рис. 1.

Следуя Эрдёшу и Секерешу, обозначим через $f(l, m)$ минимальное положительное число такое, что из любого множества точек на плоскости, находящегося в общем положении, не содержащего пары точек с одинаковыми абсциссами и имеющего мощность $f(l, m)$ или более, всегда можно выбрать подмножество, образующее либо l -чашку, либо m -крышку. В дальнейшем при определении схожих величин мы перестанем упоминать условие отсутствия пар точек с одинаковыми абсциссами, но будем, конечно, считать его выполненным.

Задача отыскания величины $f(l, m)$ была полностью решена Эрдёшем и Секерешем в 1961 г. (см. [2]). Они показали, что

$$f(l, m) = \binom{l + m - 4}{l - 2} + 1.$$

В частности, они построили примеры множеств мощности $\binom{l+m-4}{l-2}$, не содержащих ни l -чашки, ни m -крышки. Нам такие множества неоднократно понадобятся в дальнейшем. Мы будем обозначать их $\mathcal{F}(l, m)$.

Величина $f(l, m)$ похожа по структуре своего определения на величину $g(n)$. Мы рассмотрим ее аналог, возникающий в связи с величиной $h(n, k)$. А именно, обозначим через $f(l, m, l_1, m_1)$ минимальное положительное число такое, что из любого множества точек на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $f(l, m, l_1, m_1)$ точек, всегда можно выбрать подмножество, образующее либо l -чашку не более чем с l_1 точками внутри (т.е. внутри соответствующего l -угольника), либо m -крышку не более чем с m_1 точками внутри. Как нетрудно видеть, всегда $f(l, m, l_1, m_1) = f(m, l, m_1, l_1)$ (возможно, обе величины не существуют). Поэтому иногда далее мы будем предполагать выполненным неравенство $l \geq m$, ведь оно нисколько не ограничивает общности.

Числа, аналогичные $\bar{k}(n)$ и $\underline{k}(n)$, интересно оценивать и в случае величины $f(l, m, l_1, m_1)$. Иными словами, еще два результата данной работы связаны с поиском таких пар чисел l_1 и m_1 , что $f(l, m, l_1, m_1) > f(l, m)$, и таких пар чисел l_1 и m_1 , что $f(l, m, l_1, m_1)$ не существует. При этом мы будем стремиться к тому, чтобы найденные числа были как можно больше.

Основные результаты работы сформулированы в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *Если $n \geq 7$, то для нечетных и четных значений n соответственно не существуют:*

$$h\left(n, \binom{(n-7)}{(n-7)/2} - 1\right), \quad h\left(n, 2 \binom{(n-8)}{(n-8)/2} - 1\right).$$

Иными словами,

$$\underline{k}(2r-1) \geq \binom{(2r-1-7)}{(2r-1-7)/2-1} - 1, \quad \underline{k}(2r) \geq 2 \binom{(2r-8)}{(2r-8)/2} - 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $n \geq 6$, то*

$$h\left(n, \binom{(n-3)}{\lceil (n-3)/2 \rceil} - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) > 2^{n-2} + 1.$$

Иными словами,

$$\tilde{k}(n) \geq \binom{(n-3)}{\lceil (n-3)/2 \rceil} - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

ТЕОРЕМА 3. *Положим $c(r) = 2^{\lfloor (r-2)/2 \rfloor} + 2^{\lceil (r-2)/2 \rceil} - r$. Пусть l_0 и m_0 таковы, что $c(l_0) > 0$, $c(m_0) > 0$. Тогда для любых $l \geq 5$ и $m \geq 5$ при условиях $l \geq l_0$ и $m \geq m_0$ не существует*

$$f\left(l, m, c(l_0) \binom{l+m-l_0-m_0}{l-l_0} - 1, c(m_0) \binom{l+m-l_0-m_0}{l-l_0} - 1\right).$$

ЧАСТНЫЙ (СИММЕТРИЧНЫЙ) СЛУЧАЙ ТЕОРЕМЫ 3. *Для любых $l \geq 5$ и $m \geq 5$ не существует*

$$f\left(l, m, \binom{l+m-10}{l-5} - 1, \binom{l+m-10}{l-5} - 1\right).$$

ТЕОРЕМА 4. Для любых $l \geq 4$, $m \geq 4$ и $a \geq 0$ (при условии, что в аргументах f числа неотрицательны) выполнены неравенства

$$f\left(l, m, \binom{l+m-6}{l-3} - m + 1, a\right) > f(l, m),$$
$$f\left(l, m, a, \binom{l+m-6}{m-3} - l + 1\right) > f(l, m).$$

Скажем несколько слов о соотношениях между старыми и новыми результатами. Прежде всего понятно, что если раньше была оценка $\underline{k}(n) \geq (\sqrt[4]{2} + o(1))^n$, то теперь теорема 1 влечет неравенство

$$\underline{k}(n) \geq (2 + o(1))^n.$$

Далее, приведем таблицу, в которой сравниваются аналогичные оценки Сендова, Ныкловой и автора данной статьи при малых n .

Таблица 1. Сравнение оценок величины $\underline{k}$

$n, \underline{k} \geq$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Сендов 1995	0	1	2	3	6	9	12	15	22	29
Ныклова 2000	0	1	2	3	6	9	13	19	27	39
Кошелев 2009	0	1	2	3	6	11	19	39	69	139

$n, \underline{k} \geq$	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Сендов 1995	36	43	58	73	88	103	134	165	196	
Ныклова 2000	51	63	91	119	147	175	238	301	373	
Кошелев 2009	251	503	923	1847	3431	6863	12869	25739	48619	

Приведем еще таблицу, иллюстрирующую теорему 2.

Таблица 2. Значения k , для которых $h(n, k) > 2^{n-2} + 1$

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	0	2	6	15	30	64	120	245	455	916

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
k	1708	3423	6426	12860	24300	48609	92367	184744	352704	705419

Наконец, последние две таблицы иллюстрируют теоремы 4 и 3. Во второй из них каждая клетка представляет собой столбец с парами чисел l_1, m_1 , при которых для данных l, m не существует $f(l, m, l_1, m_1)$ ввиду теоремы 3. Таблица 3 понятна и без комментариев.

Поскольку теоремы 1 и 3 имеют идейно очень схожие доказательства, мы поступим следующим образом: в п. 2 приведем доказательство теоремы 1, в п. 3 обоснуем теорему 3, и только в п. 4 и 5 займемся теоремами 2 и 4; п. 6 мы посвятим одному альтернативному подходу к задачам.

2. Доказательство теоремы 1. Для начала заметим, что согласно теореме Хортонa (см. [13]) существует сколь угодно большое множество точек на плоскости, не содержащее выпуклых и пустых семиугольников. Это утверждение легко

ТАБЛИЦА 3. Значения l_1 , для которых $f(l, m, l_1, m_1) > f(l, m)$

$l \backslash m$	4	5	6	7	8	9
4	—	—	—	—	—	—
5	0	2	5	9	14	20
6	1	6	15	29	49	76
7	2	11	30	64	119	202
8	3	17	51	120	245	454
9	4	24	79	204	455	916
10	5	32	115	324	785	1708
11	6	41	160	489	1280	2995
12	7	51	215	709	1995	4997
13	8	62	281	995	2996	8000
14	9	74	359	1359	4361	12368
15	10	87	450	1814	6181	18556

$l \backslash m$	10	11	12	13	14	15
4	—	—	—	—	—	—
5	27	35	44	54	65	77
6	111	155	209	274	351	441
7	321	485	704	989	1352	1806
8	783	1277	1991	2991	4355	6174
9	1707	2993	4994	7996	12363	18550
10	3423	6425	11429	19436	31811	50374
11	6426	12860	24299	43746	75569	125956
12	11431	24300	48609	92366	167947	293916
13	19439	43748	92367	184744	352703	646632
14	31815	75572	167949	352704	705419	1352064
15	50379	125960	293919	646634	1352065	2704142

обобщается (см. [13]–[15]) следующим образом: существует сколь угодно большое множество точек на плоскости, в котором каждый выпуклый семиугольник содержит по крайней мере одну точку внутри, а каждый выпуклый восьмиугольник – по крайней мере две. В указанных утверждениях всегда речь идет о последовательности множеств S_t , где $|S_t| = 2^t$. На рис. 2 центры кругов как раз образуют множество S_4 .

Переходим непосредственно к доказательству.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим случай нечетного n . Возьмем множество S_t для некоторого t . Сжатиями и растяжениями вдоль осей координат добьемся того, чтобы любая прямая, проходящая через пару точек этого множества, имела угловой коэффициент, по модулю больший единицы (была бы скорее вертикальной, чем горизонтальной). Такое преобразование никак не повлияет на выпуклые многоугольники и количества внутренних точек в них. Далее, вместо точек возьмем на плоскости круги столь малого радиуса, чтобы по-прежнему любая прямая, которая соединяет пару точек, принадлежащих разным кругам, имела угловой коэффициент, по модулю больший единицы. Наконец, поместим внутрь каждого

Таблица 4. Значения l_1 и m_1 , для которых $f(l, m, l_1, m_1)$ не существуют

$l \backslash m$	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	0 0	0 1	0 4	0 7	0 14	0 21	0 36	0 51	0 82
6	1 0	1 1	1 4 2 2	1 9 2 5 3 3	1 15 2 14 3 7 4 4	1 29 2 23 3 19 4 9 5 5	2 44 3 31 4 24 5 11 6 6	1 73 2 65 3 59 4 39 5 29 6 13 7 7	2 110 3 87 4 74 5 47 6 34 7 15 8 8
7	4 0	4 1 2 2	5 5	2 14 5 11 9 9	5 29 9 19 14 14	9 49 14 29 20 20	5 89 9 79 14 74 20 41 27 27	9 149 14 119 20 104 27 55 35 35	14 224 20 167 27 139 35 71 44 44
8	7 0	9 1 5 2 3 3	14 2 11 5 9 9	19 19	9 49 19 39 34 34	19 99 34 69 55 55	34 174 55 111 83 83	19 299 55 279 83 167 119 119	34 524 55 447 83 419 119 239 164 164
9	14 0	15 1 14 2 7 3 4 4	29 5 19 9 14 14	49 9 39 19 34 34	74 14 14 74 69 69	34 174 69 139 125 125	69 349 125 251 209 209	125 629 209 419 329 329	209 1049 329 659 494 494
10	21 0	29 1 23 2 19 3 9 4 5 5	49 9 29 14 20 20	99 19 69 34 55 55	174 34 139 69 125 125	279 55 55 279 251 251	125 629 251 503 461 461	251 1259 461 923 791 791	461 2309 791 1583 1286 1286
11	36 0	44 2 31 3 24 4 11 5 6 6	89 5 79 9 74 14 41 20 27 27	174 34 111 55 83 83	349 69 251 125 209 209	629 125 503 251 461 461	1049 209 209 1049 923 923	461 2309 923 1847 1715 1715	923 4619 1715 3431 3002 3002
12	51 0	73 1 65 2 59 3 39 4 29 5 13 6 7 7	149 9 119 14 104 20 55 27 35 35	299 19 279 55 167 83 119 119	629 125 419 209 329 329	1259 251 923 461 791 791	2309 461 1847 923 1715 1715	3959 791 791 3959 3431 3431	1715 8579 3431 6863 6434 6434
13	82 0	110 2 87 3 74 4 47 5 34 6 15 7 8 8	224 14 167 20 139 27 71 35 44 44	524 34 447 55 419 83 239 119 164 164	1049 209 659 329 494 494	2309 461 1583 791 1286 1286	4619 923 3431 1715 3002 3002	8579 1715 6863 3431 6434 6434	15014 3002 3002 15014 12869 12869

круга маленькую копию множества

$$\mathcal{F}\left(\frac{n-7}{2}+2, \frac{n-7}{2}+2\right)$$

с условием, что любая прямая, проходящая через пару точек одного множества, имеет угловой коэффициент, по модулю меньший единицы (является скорее горизонтальной, чем вертикальной). Нужное множество построено.

Рассмотрим в нем произвольный выпуклый n -угольник с вершинами в поставленных точках. Этот n -угольник не может целиком лежать в каком-либо из кругов, так как иначе в круге возникли бы чашки или крышки с числом вершин, строго большим, нежели $(n-7)/2+1$. Стало быть, наш многоугольник пересекается

Рис. 2. Доказательство теоремы 1

с несколькими кругами. Ввиду выпуклости и специфики расположения точек в множестве вершины этого многоугольника, лежащие в самом верхнем круге, образуют крышку, поэтому их не более $(n-7)/2 + 1$; вершины же, лежащие в самом нижнем круге, образуют чашку, поэтому их тоже не более $(n-7)/2 + 1$; наконец, в каждом из оставшихся кругов находится не более одной вершины многоугольника. Поскольку у многоугольника n вершин, он пересекается по крайней мере с

$$n - \left(\frac{n-7}{2} + 1 - 1 \right) - \left(\frac{n-7}{2} + 1 - 1 \right) = 7$$

кругами, которые соответствуют семи или более точкам исходного множества S_t , находящимся в *выпуклом положении*. А это в свою очередь означает, что существует круг, который лежит полностью внутри данного выпуклого n -угольника (считаем, что радиусы кругов изначально достаточно малы). Тем самым, мы доказали, что любой выпуклый n -угольник в построенном множестве содержит по крайней мере

$$\left| \mathcal{F} \left(\frac{n-7}{2} + 2, \frac{n-7}{2} + 2 \right) \right| = \binom{(n-7)}{(n-7)/2}$$

точек внутри. Поскольку t изначально мы могли взять произвольным, мы можем построить сколь угодно большое множество, обладающее таким свойством, откуда следует, что

$$h\left(n, \binom{n-7}{(n-7)/2} - 1\right)$$

не существует.

Случай четного n разбирается аналогично, с той лишь разницей, что внутри кругов помещаются множества $\mathcal{F}((n-8)/2+2, (n-8)/2+2)$, а на последующих шагах используется восьмиугольник с двумя кругами внутри.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Приведенную конструкцию можно несколько раз проитерировать, а также использовать на промежуточных шагах не только семи- и восьми-, но и большие выпуклые многоугольники. Тем не менее это не поможет улучшить результат. Мы не станем приводить соответствующие выкладки, хотя они и не очень сложные.

3. Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы нужно построить множество, аналогичное тому, которое мы применяли в теореме 1. Только теперь внутри каждого круга будет помещаться маленькая копия

$$\mathcal{F}(l - l_0 + 2, m - m_0 + 2).$$

Функция $c(r)$, упомянутая в формулировке теоремы, – это и есть минимальное количество внутренних точек в каждой r -чашке или r -крышке для исходного множества S_t (см. [14], [15]). Без ограничения общности рассмотрим в построенном множестве l -чашку. Все ее вершины, лежащие в самом нижнем круге, также образуют чашку, поэтому их не более $l - l_0 + 1$. В каждом из остальных кругов может лежать не более одной вершины. Итак, получаем не менее

$$l - ((l - l_0 + 1) - 1) = l_0$$

кругов, с каждым из которых рассматриваемая l -чашка имеет пересечение по одной точке. Эти круги соответствуют не менее чем l_0 точкам исходного множества S_t , которые образуют чашку, содержащую не менее $c(l_0)$ точек исходного множества внутри. Это означает, что внутри любой l -чашки в построенном множестве найдется не менее $c(l_0)$ кругов и, стало быть, не менее

$$c(l_0) \binom{l + m - l_0 - m_0}{l - l_0}$$

точек. Аналогично доказывается, что в любой m -крышке будет не менее

$$c(m_0) \binom{l + m - l_0 - m_0}{l - l_0}$$

точек внутри. Поскольку t мы изначально могли взять произвольным, мы можем построить сколь угодно большое множество, обладающее такими свойствами. Отсюда следует, что

$$f\left(l, m, c(l_0) \binom{l + m - l_0 - m_0}{l - l_0} - 1, c(m_0) \binom{l + m - l_0 - m_0}{l - l_0} - 1\right)$$

не существует.

Доказательство теоремы 3 завершено.

Опять же, как и в теореме 1, итерирование конструкции к улучшению результата не приводит. Дополнительно еще отметим, что для того, чтобы получить все различные максимальные наборы значений l_1 и m_1 , для которых $f(l, m, l_1, m_1)$ при $l \geq m$ (без ограничения общности) не существует, достаточно ограничиться только $m_0 = 5$, $l_0 = 5, \dots, l - 1$, а также $m_0 = 7$, $l_0 = 5$.

4. Доказательство теоремы 2. Нам необходимо построить множество общего положения на плоскости, в котором $2^{n-2} + 1$ точек и в котором каждый выпуклый n -угольник содержит больше, чем

$$\left(\binom{n-3}{\lceil (n-3)/2 \rceil} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$$

точек внутри. При этом нас вполне устроит множество с нужным числом элементов и без выпуклых n -угольников: “каждый” выпуклый n -угольник в нем также будет обладать требуемым свойством. Наша идея следующая. Мы возьмем множество, построенное Эрдешем и Секерешем для доказательства оценки $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$, т.е. множество мощности 2^{n-2} , свободное от выпуклых n -угольников, слегка подправим его и добавим к тому, что получится, ровно одну точку. В итоговом множестве будет именно $2^{n-2} + 1$ элементов, и мы лишь проверим, что если в этом множестве есть выпуклые n -угольники, то каждый из них содержит не менее

$$\left(\binom{n-3}{\lceil (n-3)/2 \rceil} - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \right)$$

внутренних точек. Это и будет доказывать теорему.

Начнем с напомнима конструкции Эрдеша–Секереша. Рассмотрим окружность произвольного радиуса с центром в начале координат. Равномерно разместим $n - 1$ маленьких кругов на ее дуге, заключенной между прямыми $y = x$ и $y = -x$ в той четверти плоскости, где $x > 0$ (см. рис. 3). Внутри этих кругов, двигаясь “сверху вниз”, расположим копии множеств

$$\mathcal{F}(n, 2), \quad \mathcal{F}(n - 1, 3), \quad \dots, \quad \mathcal{F}(2, n),$$

сжатых так, чтобы всякая прямая, проходящая через пару точек любого из них, имела угловой коэффициент, по модулю меньший единицы. Дополнительно, мы добьемся того, чтобы любая прямая, проходящая через две точки из разных кругов, имела угловой коэффициент, по модулю больший единицы. Наконец, мы еще потребуем, чтобы множество

$$\mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor\right)$$

лежало “правее” остальных точек. Строго говоря, речь идет о существовании вертикальной прямой, отделяющей это множество от других. Ясно, что все условия без труда можно удовлетворить. Обозначим полученные в итоге множества через $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n-1}$ ($\mathcal{F}_1$ – это копия $\mathcal{F}(n, 2)$, $\mathcal{F}_2$ – это копия $\mathcal{F}(n - 1, 3)$, и так далее). Выделенное множество

$$\mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor\right)$$

назовем *центральный*; остальные множества $\mathcal{F}_i$ мы будем называть *верхними* и *нижними* соответственно.

Рис. 3. Конструкция Эрдёша–Секереша

Множество Эрдёша–Секереша – это

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{n-1}.$$

У Эрдёша и Секереша не было ограничения, которое мы наложили на расположение центрального множества в конструкции; для нас это условие будет существенным.

Нетрудно видеть, что и впрямь $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$, ведь мы знаем мощности множеств $\mathcal{F}_i$ (см. п. 1):

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + \dots + |\mathcal{F}_{n-1}| = C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2} = 2^{n-2}.$$

Далее, полезно вспомнить, как Эрдёш и Секереш (см. [2]) доказывают отсутствие выпуклых n -угольников в множестве $\mathcal{F}$. Действительно, пусть $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$ – подмножество, находящееся в выпуклом положении. Это подмножество пересекается с некоторыми из множеств $\mathcal{F}_i$; обозначим через $\mathcal{F}_a$ множество с минимальным номером (самое верхнее), а через $\mathcal{F}_b$ – с максимальным (самое нижнее). Отметим, что в случае $a = b$ заведомо $|\mathcal{Y}| \leq n - 2$ (легко проверить), поэтому актуален только случай $a < b$. Оценим мощности пересечений $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{Y}$ для различных значений i :

- (*) если $i = a$, то $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{Y}$ является крышкой и $|\mathcal{F}_i \cap \mathcal{Y}| \leq a$;
- (**) если $i = b$, то $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{Y}$ является чашкой и $|\mathcal{F}_i \cap \mathcal{Y}| \leq n - b$;
- (***) если $a < i < b$, то ввиду условий на угловые коэффициенты $|\mathcal{F}_i \cap \mathcal{Y}| \leq 1$.

В итоге

$$|\mathcal{Y}| \leq a + (n - b) + 1 \cdot (b - a - 1) = n - 1,$$

т.е. выпуклые n -угольники в $\mathcal{F}$ отсутствуют.

Итак, с конструкцией Эрдёша–Секереша мы разобрались. Остается добавить к ней еще одну точку. Добавлять мы ее будем к центральному множеству. Поэтому нам придется достаточно подробно изучить его внутреннюю структуру. На рис. 4 наглядно изображено то, о чем мы будем сейчас говорить.

Прежде всего имеет место следующий факт, доказанный Эрдёшем и Секерешем (см. [1]): любое множество вида $\mathcal{F}(l, m)$ можно получить как объединение множеств вида $\mathcal{F}(l - 1, m)$ и $\mathcal{F}(l, m - 1)$, причем второе множество будет расположено “правее” первого (условие с наличием вертикальной прямой) и угловой коэффициент любой прямой, соединяющей пару точек из разных множеств, будет больше углового коэффициента любой прямой, соединяющей пару точек из одного множества.

Рис. 4. Доказательство теоремы 2

Стало быть, можно считать, что $\mathcal{F}(\lceil (n+2)/2 \rceil, \lfloor (n+2)/2 \rfloor)$ является объединением

$$\mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 1, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor\right) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor - 1\right).$$

Более того, по аналогичной причине множество

$$\mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 1, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor\right)$$

представляет собой объединение

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 2, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor - 1\right) \cup \mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 2, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor - 2\right) \cup \dots \\ & \cup \mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 2, 3\right) \cup \mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 1, 2\right). \end{aligned} \quad (\#)$$

Таким образом, можно считать, во-первых, что множества, образующие объединение, тоже расположены в маленьких кругах (гораздо меньших, чем исходные, см. рис. 4) и, во-вторых, что любая прямая, соединяющая пару точек одного множества, “почти горизонтальна”. Условие на угловые коэффициенты говорит о том, что маленькие круги расположены в форме крышки, а угловой коэффициент любой прямой, соединяющей пару точек из разных маленьких кругов, больше, чем у почти горизонтальных прямых (см. рис. 4).

Проведем вертикальную прямую через “самую левую” точку Q множества

$$\mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 2, 3\right).$$

Добавляемая точка P должна быть расположена на этой прямой очень близко к Q (например, в том смысле, что никакая прямая, проходящая через пару точек нашего множества, не пересекает отрезок PQ). Полученное множество

$$\mathcal{F}\left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor\right) \cup \{P\} = \mathcal{F}_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1} \cup \{P\}$$

обозначим $\mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$. Положим также $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{P\}$.

Рассматривая $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$ – множество в выпуклом положении, – мы пришли к свойствам $(*)$ – $(***)$. Пусть теперь $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}'$ – множество в выпуклом положении. Уже ясно, что $|\mathcal{Y}| \leq n$. Нас интересуют только случаи $|\mathcal{Y}| = n$. Если этих случаев нет, то доказательство теоремы завершено. Иначе нам следует показать, что внутри выпуклой оболочки множества $\mathcal{Y}$ не менее

$$\left(\binom{n-3}{\lceil (n-3)/2 \rceil} - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \right)$$

точек из $\mathcal{F}'$.

Итак, считаем, что $|\mathcal{Y}| = n$. Тогда, очевидно, $P \in \mathcal{Y}$. Более того, если взять $\mathcal{F}' \setminus \{Q\}$, то получится множество с теми же чашками и крышками, что и $\mathcal{F}$, т.е. $|\mathcal{F}' \setminus \{Q\} \cap \mathcal{Y}| \leq n-1$, а значит, $Q \in \mathcal{Y}$. Как следствие, отрезок PQ служит стороной многоугольника $\text{conv } \mathcal{Y}$, и этот многоугольник расположен целиком справа или целиком слева относительно прямой PQ .

Заметим, что сторона PQ вертикальная. Это значит, что, строго говоря, никакие чашки и крышки не могут иметь ее своим звеном. Введем понятия *псевдочашки* и *псевдокрышки*: это объекты, получаемые из чашки и крышки добавлением отрезка PQ в качестве еще одного звена (с сохранением выпуклости). Дальнейшие рассуждения будем проводить в терминах псевдочашек и псевдокрышек.

Глядя на свойства $(*)$ – $(***)$, разберем несколько случаев пересечения множества $\mathcal{Y}$ с множествами $\mathcal{F}_i$ и $\mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$. Прежде всего снова обозначим через a и b минимальный и максимальный номера множеств $\mathcal{F}_i$, с которыми пересекается $\mathcal{Y}$. Понятно, что

$$a \leq \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor - 1 \leq b.$$

Далее, поскольку у нас $|\mathcal{Y}| = n$, свойства $(*)$ – $(***)$ одновременно выполняться не могут, причем нарушение какого-либо свойства может произойти лишь в случае

$i = \lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1$, ведь мы заменяли только $\mathcal{F}_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$ на $\mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$; тем самым, нарушается ровно одно из неравенств. Разберем соответствующие подслучаи.

Подслучай, когда $\mathcal{Y}$ расположено целиком в множестве $\mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$ (т.е. когда $a = b$), невозможен, поскольку это означало бы, что в $\mathcal{F}_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$ имеется выпуклый $(n-1)$ -угольник, которого, как мы отметили в процессе описания конструкции Эрдёша–Секереша, там нет. По той же причине множество $\mathcal{Y}$ не может быть расположено правее прямой PQ . Поэтому во всех последующих подслучаях предполагается, что $\mathcal{Y}$ расположено левее этой прямой.

В подслучае, когда нарушается неравенство $(*)$, множество $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$ должно являться $\lfloor (n+2)/2 \rfloor$ -псевдокрышкой. Ввиду условий на угловые коэффициенты прямых, соединяющих точки из множеств объединения $(\#)$, получаем, что из каждого множества в этом объединении можно взять не более одной точки в дополнение к точкам P и Q . Значит, всего добавляемых точек будет не больше, чем количество тех множеств из $(\#)$, которые лежат левее PQ , т.е. $\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 3$. Итак, псевдокрышка нужного размера образоваться не может, и этот подслучай невозможен.

В подслучае, когда нарушается неравенство $(**)$, множество $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$ должно являться $\lceil (n+2)/2 \rceil$ -псевдочашкой. Воспользуемся тем фактом, что маленькие круги, в которых расположены части объединения $(\#)$, образуют крышку. В силу этого факта достроить от точек P и Q псевдочашку можно лишь с помощью точек ровно одного из множеств этого объединения, а они образуют обычную чашку. Стало быть, их будет не больше, чем $\lceil (n+2)/2 \rceil - 3$, и псевдочашка нужного размера образоваться не сможет. Итак, этот подслучай тоже невозможен.

Последний подслучай связан с нарушением неравенства $(***)$, т.е. неравенства

$$|\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}| \leq 1.$$

Ясно, что здесь мощность указанного пересечения на самом деле равна двум и представлена точками P и Q ; при этом числа a и b отличны от $\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1$. В таком случае $\mathcal{Y}$ содержит точки P и Q , а также некоторую крышку из множества $\mathcal{F}_a$ и некоторую чашку из множества $\mathcal{F}_b$. Поскольку мы заранее отделили множество $\mathcal{F}'_{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 1}$ вертикальной прямой от остальных множеств, это приводит к тому, что все точки объединения $(\#)$, которые лежат левее вертикальной прямой PQ , оказываются внутри $\text{conv } \mathcal{Y}$. В итоге их не меньше, чем

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{F} \left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 1, \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor \right) \right| - \left| \mathcal{F} \left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 2, 3 \right) \cup \mathcal{F} \left(\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 1, 2 \right) \right| \\ &= \binom{(n-3)}{\lceil (n-4)/2 \rceil} - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor = \binom{(n-3)}{\lceil (n-3)/2 \rceil} - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

5. Доказательство теоремы 4. Будем действовать так же, как и при доказательстве теоремы 2. В данном случае нам необходимо построить множество общего положения на плоскости, в котором

$$\binom{l+m-4}{l-2} + 1 = f(l, m)$$

Рис. 5. Доказательство теоремы 4

точек и в котором, без ограничения общности, любая l -чашка содержит больше

$$\binom{l+m-6}{l-3} - m + 1$$

точек внутри, а m -крышек нет вообще. Мы возьмем множество $\mathcal{F}(l, m)$, построенное Эрдешем и Секерешем для доказательства оценки $f(l, m) \geq \binom{l+m-4}{l-2} + 1$ и изученное нами в предыдущем пункте. Это множество мощности $\binom{l+m-4}{l-2}$, не содержащее ни l -чашек, ни m -крышек. Специальным образом добавим к нему одну точку. В итоговом множестве будет именно $\binom{l+m-4}{l-2} + 1$ элементов, и мы лишь проверим, что в этом множестве m -крышек нет и что любая l -чашка в нем содержит не менее $\binom{l+m-6}{l-3} - m + 2$ внутренних точек. Это и будет доказывать теорему.

При доказательстве теоремы 2 мы уже немного говорили о конструкции множества $\mathcal{F}(l, m)$. Сейчас мы скажем о ней еще чуть подробнее. Основная идея, как мы помним, состоит в том, что любое множество $\mathcal{F}(l, m)$ можно собрать из меньших множеств того же типа. А именно, в качестве $\mathcal{F}(l, m)$ можно взять объединение пары множеств $\mathcal{A} = \mathcal{F}(l-1, m)$ и $\mathcal{B} = \mathcal{F}(l, m-1)$ с условием, что второе из них лежит обязательно выше и либо целиком правее, либо целиком левее первого, так что угловой коэффициент любой прямой, проходящей через пару точек из разных множеств, по модулю больше углового коэффициента любой прямой, проходящей через пару точек одного множества. Доказательство отсутствия в построенном множестве (без ограничения общности) l -чашек выглядит так. Любая чашка, которая полностью заключена либо в $\mathcal{A}$, либо в $\mathcal{B}$, содержит менее l точек. Если же чашка состоит из точек обоих множеств, то ввиду условия на угловые коэффициенты она может содержать только одну точку из $\mathcal{B}$ и не более $(l-2)$ точек из $\mathcal{A}$, т.е. в ней снова менее l точек.

Имея в виду только что обоснованный факт, замечаем, что можно так построить множество $\mathcal{F}(l, m)$, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathcal{F}(l, m) = \mathcal{F}(l-1, m) \cup \mathcal{F}(l, m-1)$$

(здесь второе множество левее),

$$\mathcal{F}(l-1, m) = \mathcal{F}(l-2, m) \cup \mathcal{F}(l-1, m-1)$$

(здесь второе множество правее) и (см. рис. 5)

$$\mathcal{F}(l-1, m-1) = \mathcal{F}(l-1, m-2) \cup \dots \cup \mathcal{F}(4, m-2) \cup \mathcal{F}(3, m-2) \cup \mathcal{F}(2, m-1). \quad (1)$$

Можно считать, что в последнем объединении, во-первых, множества расположены слева направо в маленьких кругах (гораздо меньших, чем исходные) и, во-вторых, любая прямая, соединяющая пару точек из одного множества, “почти горизонтальна”. Условие на угловые коэффициенты говорит о том, что маленькие круги расположены в форме чашки, причем все прямые, содержащие стороны этой чашки имеют отрицательный угловой коэффициент (т.е. направлены вправо вниз).

Обратим внимание на $(l-1)$ -чашки в описанном множестве. Каждая из них может

- а) целиком лежать в множестве $\mathcal{F}(l, m-1)$;
- б) строиться на одной точке из $\mathcal{F}(l, m-1)$ и $(l-2)$ точках из $\mathcal{F}(l-1, m-1)$ (тогда из нескольких начальных множеств объединения (#) берется по одной точке, а завершается все взятием некоторой чашки в каком-то из них же);
- в) содержать по одной точке из $\mathcal{F}(l, m-1)$ и $\mathcal{F}(l-1, m-1)$ вкуче с точками некоторой $(l-3)$ -чашки из $\mathcal{F}(l-2, m)$.

Теперь скажем, наконец, куда следует добавлять точку. Проведем прямую с очень большим положительным угловым коэффициентом (почти вертикальную) через “самую левую” точку Q множества $\mathcal{F}(3, m-2)$ (см. рис. 5). На этой прямой расположим точку P “очень близко” к точке Q . Нужно множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}(l, m) \cup \{P\}$ построено.

Как нетрудно видеть, множество $\mathcal{F} \setminus \{Q\}$ содержит в точности те же чашки и крышки, что и $\mathcal{F}(l, m)$, т.е. и в нем нет ни l -чашек, ни m -крышек. Это означает, что любая l -чашка или m -крышка в множестве $\mathcal{F}$ должна содержать обе точки P и Q . Более того, поскольку прямая PQ почти вертикальна, отрезок PQ обязательно будет крайним правым для l -чашки, или крайним левым для m -крышки. Замечая, что правее прямой PQ расположены

$$|\mathcal{F}(3, m-2) \cup \mathcal{F}(2, m-1)| - 1 = m - 3$$

точки, мы заключаем, что крышка, содержащая точки P и Q , имеет меньше чем m точек. Таким образом, мы доказали, что m -крышек в множестве $\mathcal{F}$ нет.

Теперь рассмотрим любую l -чашку в $\mathcal{F}$. Такая чашка могла образоваться только с помощью добавления точки P к некоторой $(l-1)$ -чашке, у которой самая правая точка есть Q . Получаем, что из вариантов а)–в) расположения $(l-1)$ -чашек в $\mathcal{F}(l, m)$ нам подходит только вариант в). В этом случае l -чашка состоит из одной точки множества $\mathcal{F}(l, m-1)$, точек P и Q , а также из всех точек $(l-3)$ -чашки, лежащей в множестве $\mathcal{F}(l-2, m)$. Таким образом, внутри нее обязательно оказываются все множества

$$\mathcal{F}(l-1, m-2), \quad \dots, \quad \mathcal{F}(4, m-2)$$

объединения (#), – итого не менее

$$\binom{l+m-6}{l-3} - m + 2$$

точек внутри.

Доказательство теоремы 4 завершено.

6. Альтернативный подход к задаче про чашки и крышки. В некоторых работах (см. [13]) чашки и крышки изучаются с другой позиции. А именно, речь идет не о количестве внутренних точек в их выпуклых оболочках, а о количестве точек, лежащих строго выше (для чашки) или строго ниже (для крышки) относительно образующей ломаной (см. рис. 6), т.е. в “надграфике” (для чашки) или в “подграфике” (для крышки). Соответственно, мы будем говорить не о внутренних, но об *ассоциированных* точках. Указанный подход дает альтернативные доказательства, например, несуществования величины $h(7)$. Тем не менее, и он, и наш подход, развитый в предыдущих пунктах, в некотором смысле “параллельны”. В этом пункте мы сможем сформулировать теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4.

Рис. 6. Ассоциированные точки

Рис. 7. Доказательство теоремы 6

Сперва скажем о “теореме существования”, т.е. об аналоге теоремы 3. Сразу заметим, что для ее доказательства снова используются множества Хортона, только теперь они получаются из множеств S_t , рассмотренных в п. 2, симметрией относительно прямой $x = y$. Для этих множеств S'_t также определена функция $c'(r)$, являющаяся аналогом функции $c(r)$ и задающая минимальное количество ассоциированных точек в каждой r -чашке или r -крышке для множества S'_t . На самом деле, оказывается, что $c'(r) = c(r + 1)$. Наконец, аналог величины $f(l, m, l', m')$ обозначим

через $f_a(l, m, l', m')$. Доказательство следующей теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.

ТЕОРЕМА 5. *Положим*

$$c'(r) = 2^{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} + 2^{\lceil (r-1)/2 \rceil} - r - 1.$$

Пусть l_0 и m_0 таковы, что $c'(l_0) > 0$, $c'(m_0) > 0$. Тогда для любых $l \geq 4$ и $m \geq 4$ при условиях $l \geq l_0$ и $m \geq m_0$ не существует

$$f_a\left(l, m, c'(l_0) \binom{l+m-l_0-m_0}{l-l_0} - 1, c'(m_0) \binom{l+m-l_0-m_0}{l-l_0} - 1\right).$$

Теперь сформулируем аналог теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. Для любых $l \geq 4$, $m \geq 4$ и $a \geq 0$ (при условии, что в аргументах f_a числа неотрицательны) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} f_a\left(l, m, \binom{l+m-5}{l-2} - m + 1, a\right) &> f(l, m), \\ f_a\left(l, m, a, \binom{l+m-5}{m-2} - l + 1\right) &> f(l, m). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы очень легко получается из доказательства теоремы 4, если исключить из рассмотрения верхнее множество $\mathcal{F}(l, m-1)$. Таким образом, устанавливается, что

$$f_a\left(l-1, m, \binom{l+m-6}{l-3} - m + 1, a\right) > f(l-1, m),$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы (см. рис. 7).

Отметим, что еще можно в качестве ассоциированных точек рассматривать точки, ограниченные двумя крайними лучами соответствующей чашки или крышки. Но вводить новое обобщение $f(l, m)$ здесь нет необходимости, поскольку такая величина совпадет с f_a .

На основании теоремы 4 или теоремы 6 можно дать другое доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, G. Szekeres, “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463–470.
- [2] P. Erdős, G. Szekeres, “On some extremum problems in elementary geometry”, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **3–4** (1961), 53–62.
- [3] P. Erdős, “Some more problems on elementary geometry”, *Austral. Math. Soc. Gaz.*, **5:2** (1978), 52–54.
- [4] W. Morris, V. Soltan, “The Erdős–Szekeres problem on points in convex position – a survey”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **37:4** (2000), 437–458.
- [5] F. P. Ramsey, “On a problem of formal logic”, *Proc. London Math. Soc. (2)*, **30** (1930), 264–286.

- [6] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [7] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [8] G. Szekeres, L. Peters, “Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem”, *ANZIAM J.*, **48**:2 (2006), 151–164.
- [9] G. Tóth, P. Valtr, “The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results”, *Combinatorial and Computational Geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 557–568.
- [10] H. Harborth, “Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen”, *Elem. Math.*, **33**:5 (1978), 116–118.
- [11] M. Overmars, “Finding sets of points without empty convex 6-gons”, *Discrete Comput. Geom.*, **29**:1 (2003), 153–158.
- [12] В. А. Кошелев, “Задача Эрдёша–Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости”, *Модел. и анализ информ. систем.*, **16**:2 (2009), 22–74.
- [13] J. D. Horton, “Sets with no empty convex 7-gons”, *Canad. Math. Bull.*, **26**:4 (1983), 482–484.
- [14] Б. Х. Сендов, “Обязательные конфигурации точек на плоскости”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:2 (1995), 491–516.
- [15] H. Nyklová, “Almost empty polygons”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **40**:3 (2003), 269–286.
- [16] В. А. Кошелев, “Почти пустые шестиугольники”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:6 (2008), 91–120.

В. А. Кошелев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

E-mail: koshelev@mccme.ru

Поступило

13.07.2009