Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Романов, М. А. Тихомиров, О самосопряженном
подпространстве односкоростного оператора переноса,
Матем. заметки, 2011, том 89, выпуск 1, 91–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:48:15

О самосопряженном подпространстве односкоростного оператора переноса

Р. В. Романов, М. А. Тихомиров

В работе рассмотрена задача об описании самосопряженного подпространства оператора переноса в неограниченной области. Доказана нетривиальность этого подпространства при возмущении, имеющем решетку лакун сколь угодно малой длины для односкоростного оператора с полиномиальным интегралом столкновений. Рассматривается также трехмерный оператор переноса.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В заметке рассматривается односкоростной оператор переноса, предложенный в работе Ленера [1] при анализе динамики плотности нейтронов в средах с размножением. Эффективная функция распределения u^t в таких средах при некоторых упрощающих предположениях удовлетворяет уравнению вида [2]

$$\frac{\partial}{\partial t} u^t(x, \mu) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} u^t(x, \mu) + c(x) \int_{-1}^1 K(\mu, \mu') u^t(x, \mu') d\mu', \quad (1)$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \mu, \mu' \in [-1, 1].$$

Здесь $K(\mu, \mu')$ – ядро интеграла столкновений, функция c – локальный коэффициент размножения. Изучаемая нами задача такова: при заданных c и K охарактеризовать начальные распределения $u^0 \in L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$, для которых эволюция, порожденная уравнением (1), совпадает с эволюцией при $c = 0$, т.е.

$$u^t(x, \mu) = u^0(x - \mu t, \mu) \quad (2)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Подпространство, образованное такими функциями u^0 , будем называть *самосопряженным*.

Основной результат работы – теорема 2 – состоит в том, что самосопряженное подпространство нетривиально, если интеграл столкновений полиномиален по μ , а функция c обращается в нуль на ε -окрестности множества $a\mathbb{Z}$ для некоторых a , $\varepsilon > 0$. С другой стороны, в изотропной задаче самосопряженное подпространство оказывается тривиальным, если коэффициент размножения c отличен от нуля на

Работа выполнена при поддержке фонда ИНТАС (грант № 05-1000008-7883) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00249).

полуоси (предложение 3). Дан пример (следствие 2), показывающий, что при подходящем выборе ядра K самосопряженное пространство может оказаться тривиальным при любой ненулевой функции s . Для задачи с финитным возмущением выяснена структура спектра сужения оператора на самосопряженное подпространство (предложение 2). Наконец, для трехмерного уравнения переноса нетривиальность самосопряженного подпространства установлена при любом коэффициенте размножения (теорема 3). Отметим, что доказательства теорем 2 и 3 и предложения 2 конструктивны: в них явно описаны нетривиальные подпространства самосопряженного пространства.

Опишем структуру работы. Согласно абстрактной теории [3] замкнутый оператор с ограниченной мнимой частью является ортогональной суммой самосопряженного и вполне несамосопряженного. Предложение 1 есть удобный для наших целей вариант этого утверждения. Близкое утверждение в терминах резольвенты дано в работе [4]. Теорема 1 содержит описание самосопряженного подпространства в терминах спектрального представления группы, заданной формулой (2). Необходимые технические утверждения собраны в разделе 3. Доказательство теорем 1 и 2 и предложения 2 занимает раздел 4. В разделе 5 изучается аналогичная трехмерная задача.

В работе используются следующие обозначения:

- если $\{S_i\}_{i \in I}$ – семейство подмножеств гильбертова пространства, то $\bigvee_{i \in I} S_i$ – замыкание линейной оболочки множества $\bigcup_{i \in I} S_i$;
- $\text{Ran } A$ и $\text{Ker } A$ – образ и ядро оператора A соответственно;
- если $f \in L^2(\mathbb{R})$, то $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ – преобразование Фурье от f :

$$\widehat{f}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x) dx;$$

- $H_{\pm}^2$ – пространства Харди аналитических функций в верхней и нижней полуплоскостях соответственно;
- сокращение п.в. относится к мере Лебега на $\mathbb{R}$; для измеримой функции f на $\mathbb{R}$ под $\text{supp } f$ понимается определенное с точностью до множества меры нуль множество $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$.

2. Определения и предварительные сведения. Функциями распределения будем называть элементы гильбертова пространства $H = L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$ функций от переменных $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in [-1, 1]$. Эволюция функций распределения в вакууме дается формулой (2). Эта формула определяет группу унитарных операторов в H , самосопряженный генератор которой будем обозначать через L_0 , так что $u^t = e^{itL_0} u^0$. Зададим в пространстве H на области определения оператора L_0 оператор L вида

$$L = L_0 - iV, \quad (3)$$

$$(Vu)(x, \mu) = \sum_{\ell=1}^n c_{\ell}(x) \varphi_{\ell}(\mu) \int_{-1}^1 u(x, \mu') \overline{\varphi_{\ell}(\mu')} d\mu'.$$

Функции c_{ℓ} и φ_{ℓ} , $\ell = 1, \dots, n < \infty$, считаются известными. Предполагается, что $c_{\ell} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, $\varphi_{\ell} \in L^{\infty}[-1, 1]$ при всех ℓ , и что все функции c_{ℓ} вещественны. Функции $\{\varphi_{\ell}\}_{\ell=1}^n$ в дальнейшем предполагаются линейно независимыми в совокупности,

что, очевидно, не умаляет общности. Особый интерес представляет случай $n = 1$, $\varphi_1 \equiv 1$ (изотропное рассеяние). Функция c_1 в этой ситуации называется локальным коэффициентом размножения, а индекс 1 опускается.

При наложенных условиях оператор V ограничен, а оператор L генерирует группу ограниченных операторов e^{itL} , $t \in \mathbb{R}$. Пусть $f^t \in H$ – функция распределения числа частиц в среде в момент времени t . Согласно нестационарному уравнению переноса [5]

$$f^t = e^{-\sigma t} e^{itL} f^0, \quad (4)$$

где σ – сечение поглощения. В литературе оператор $T = iL$ обычно называют оператором переноса, а уравнение переноса записывают в виде $\partial_t u^t = (T - \sigma)u^t$.

Пусть D – оператор в гильбертовом пространстве Z вида $D = A + iK$, где A – самосопряжен, а K – самосопряжен и ограничен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подпространство $Z_0 \subset Z$ – *самосопряженное* подпространство оператора D , если

- 1) Z_0 приводит¹ оператор D , и сужение D на Z_0 – самосопряженный оператор в Z_0 ;
- 2) любое приводящее подпространство Z' оператора D такое, что сужение $D|_{Z'}$ – самосопряженный оператор в Z' , содержится в Z_0 .

Сужение оператора D на подпространство Z_0 называется его *самосопряженной частью*. Оператор D называют *вполне несамосопряженным*, если его самосопряженное подпространство тривиально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Ортогональное дополнение самосопряженного подпространства оператора D совпадает с подпространством*

$$Z_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{t \in \mathbb{R}} e^{itA} \text{Ran } K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z_0 – самосопряженное подпространство оператора D . По определению подпространство Z_1 , а следовательно, и $Z_1^\perp$, приводит оператор A . Так как, очевидно, $Z_1^\perp \subset \text{Ker } K$, откуда получим, что Z_1 и $Z_1^\perp$ – приводящие подпространства оператора D , причем сужение D на $Z_1^\perp$ является самосопряженным оператором. Таким образом, $Z_1^\perp \subset Z_0$. Покажем, что $Z_1 \subset Z_0^\perp$. В самом деле, поскольку подпространство Z_0 приводит D , оно приводит и оператор $A = (D + D^*)/2$. Это означает, в частности, что $e^{iAt} \text{Ran } K \subset Z_0^\perp$ при всех вещественных t , так как, очевидно, $Z_0 \subset \text{Ker } K$.

Мы будем пользоваться в дальнейшем тем фактом, что самосопряженное подпространство Z_0 является приводящим также и для оператора A , причем сужения D и A на Z_0 совпадают. В силу этого замечания самосопряженное подпространство, определенное при постановке задачи во введении, совпадает с самосопряженным подпространством оператора (3), которое, допуская вольность речи, в заголовке работы мы назвали “самосопряженным подпространством оператора переноса”. Применительно к оператору L доказанное предложение формулируется следующим образом. Для любой функции $\xi \in L^\infty(\mathbb{R})$ через $\mathcal{D}_\xi$ обозначим совокупность функций $h \in L^2(\mathbb{R})$, имеющих компактный носитель и равных нулю п.в. вне $\text{supp } \xi$.

¹То есть ортопроектор на Z_0 в Z переводит область определения $\mathcal{D}$ оператора D в себя, и $Df \in Z_0$, $D^*f \in Z_0$ для любого $f \in Z_0 \cap \mathcal{D}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $f \in L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$ принадлежит самосопряженному подпространству оператора (3), если и только если

$$\int_{[-1, 1] \times \mathbb{R}} f(x - \mu t, \mu) \overline{\varphi_\ell(\mu)} h(x) d\mu dx = 0 \quad (5)$$

при всех $\ell = 1, \dots, n$, $t \in \mathbb{R}$, и $h \in \mathcal{D}_{c_\ell}$.

Таким образом, требуется выяснить, существуют ли ненулевые функции f , удовлетворяющие условию (5). Поясним сначала на формальном уровне используемый нами метод. Пусть, для простоты, $n = 1$, функция c равна индикатору некоторого интервала I , а $\varphi \equiv 1$. Тогда условие леммы означает, что

$$\int_{-1}^1 f(x - \mu t, \mu) d\mu = 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in I$. Будем искать функцию f в виде

$$f(x, \mu) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixq/\mu} u(q, \mu) dq.$$

Подставляя и изменяя порядок интегрирования, имеем:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} dq e^{-iqt} \int_{-1}^1 e^{ixq/\mu} u(q, \mu) d\mu.$$

Так как это равенство есть тождество по t , внутренний интеграл должен быть равен нулю при всех q . После замены переменной $\mu = 1/p$ мы приходим к следующей задаче единственности: существует ли ненулевая функция $v(q, p)$ равная нулю при $|p| < 1$ и такая, что ее преобразование Фурье по второму аргументу обращается в нуль во всех точках вида $(q, -xq)$, $q \in \mathbb{R}$, $x \in I$. Обоснование приведенного рассуждения дается в теореме 1.

3. Интегральные преобразования. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}$ – компактный интервал. Введем обозначения для некоторых классов функций переменных $q \in \mathbb{R}$ и $\mu \in [-1, 1]$ и преобразований между ними:

- $\dot{C}_\omega$ – линейное пространство функций $u \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [-1, 1])$, обращающихся в нуль при $q \notin \omega$;
- H_ω – подпространство в $L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1], |\mu| dq d\mu)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль при $q \notin \omega$.
- Φ и Φ^* – унитарные взаимнообратные операторы

$$\Phi: H \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1], |\mu| dq d\mu), \quad \Phi^*: L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1], |\mu| dq d\mu) \rightarrow H,$$

заданные на гладких финитных функциях формулами

$$\begin{aligned} (\Phi f)(q, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\mu|^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixq/\mu} f(x, \mu) dx, \\ (\Phi^* u)(x, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixq/\mu} u(q, \mu) dq. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что $-\Phi L_0 \Phi^*$ – оператор умножения на переменную q в $L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1], |\mu| dq d\mu)$.

Через $\mathcal{F}$ будем обозначать унитарный оператор $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ преобразования Фурье по второму аргументу:

$$(\mathcal{F}u)(q, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isp} u(q, s) ds.$$

Мы будем пользоваться заменой переменных

$$(Jv)(q, s) := \begin{cases} s^{-2}v(q, s^{-1}), & |s| > 1, \\ 0, & |s| < 1, \end{cases}$$

которая задает изометрию

$$J: L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1], |\mu| dq d\mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, |p| dq dp).$$

Для любой гладкой финитной функции v на полосе $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ положим

$$(\Psi v)(q, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|p|>1} e^{ixqp} p^{-2} v\left(q, \frac{1}{p}\right) dp. \quad (6)$$

ЛЕММА 1. Для любого замкнутого интервала ω , не содержащего точку 0, преобразование, заданное формулой (6) на $\dot{C}_\omega$, продолжается до ограниченного оператора Ψ , действующего из пространства H_ω в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Действие оператора Ψ на произвольном векторе $v \in H_\omega$ задается формулой

$$(\Psi v)(q, x) = (\mathcal{F}Jv)(q, -xq). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (7), очевидно, выполнено при всех $v \in \dot{C}_\omega$. Далее, при любом $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, обращающемся в нуль при $|q| < a := \text{dist}(0, \omega)$, будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(\mathcal{F}g)(q, -xq)|^2 dq dx = \int_{\mathbb{R}} dq \frac{1}{|q|} \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}g)(q, x)|^2 dx \leq \frac{1}{a} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Из этого неравенства следует, что правая часть формулы (7) задает ограниченный оператор из H_ω в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $\dot{C}_\omega$ плотно в H_ω , отсюда вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть ω – замкнутый интервал, не содержащий точку 0, и пусть $\varphi \in L^\infty(-1, 1)$. Тогда для любой функции $h \in L^2(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любого $u \in H_\omega$ при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\int_{[-1, 1] \times \mathbb{R}} d\mu dx \overline{h(x)} \varphi(\mu) (\Phi^* u)(x - \mu t, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-iqt} \langle \Psi(u\varphi)(q, \cdot), h \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (8)$$

В этом равенстве правая часть определена при всех $t \in \mathbb{R}$, поскольку подынтегральная функция финитна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 1 достаточно доказать равенство (8) для произвольной функции $u \in \mathring{C}_\omega$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi(\mu)(\Phi^* u)(x - \mu t, \mu) d\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 d\mu \varphi(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\mu t)q/\mu} u(q, \mu) dq \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-iqt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{ixq/\mu} u(q, \mu) \varphi(\mu) d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-iqt} (\Psi(u\varphi))(q, x). \end{aligned}$$

Умножая это равенство на $\bar{h}$ и интегрируя по x , получим (8).

4. Условия полной несамосопряженности. В дальнейшем функции φ_ℓ из определения оператора L предполагаются продолженными нулем с отрезка $[-1, 1]$ на всю вещественную ось.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $F(q, p) \in L^2(\mathbb{R}^2, |p| dq dp)$ удовлетворяет условиям

$$F(q, p) = 0 \quad \text{при } |p| < 1, \quad (9)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ipxq} F(q, p) \varphi_\ell \left(\frac{1}{p} \right) dp = 0 \quad (10)$$

при всех $\ell = 1, \dots, n$ и п.в. $q \in \mathbb{R}$, $x \in \text{supp } c_\ell$. Тогда вектор

$$f = \Phi^* u, \quad u(x, \mu) := \mu^{-2} F(q, \mu^{-1}), \quad |\mu| < 1, \quad (11)$$

принадлежит самосопряженному подпространству H_0 оператора (3). Соответствие $F \mapsto f$ определяет изоморфизм подпространства $X \subset L^2(\mathbb{R}^2, |p| dq dp)$, выделенного условиями (9) и (10), и пространства H_0 . В частности, пространство H_0 нетривиально, если и только если существует ненулевая функция F , удовлетворяющая этим условиям.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Равенство (10) понимается как условие обращения в нуль преобразования Фурье по второму аргументу от функции $G_\ell(q, p) = F(q, p) \overline{\varphi_\ell(p^{-1})}$, принадлежащей пространству $L^2(\mathbb{R}^2)$, на множестве

$$M_\ell \equiv \{(q, -xq) : q \in \mathbb{R}, x \in \text{supp } c_\ell\},$$

имеющем положительную плоскую меру Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изометричность отображения $F \mapsto f$ из X в H , построенного в теореме, непосредственно проверяется заменой переменной $p = \mu^{-1}$. Покажем, что $f \in H_0$ при любом F из (очевидно, плотного в X) множества функций $F \in X$ таких, что $F(q, p) = 0$ при $q \notin \omega$ для некоторого замкнутого интервала $\omega = \omega(F)$, не содержащего точку 0. Для таких F функция $v = u \overline{\varphi_\ell}$ удовлетворяет равенству (7):

$$\Psi[u \overline{\varphi_\ell}](q, x) = \mathcal{F}[F(q, p) \overline{\varphi_\ell(p^{-1})}](q, -xq). \quad (12)$$

По условию (10) правая часть равна нулю на множестве $\{(q, x) : q \in \mathbb{R}, x \in \text{supp } c_\ell\}$, и, стало быть, $\Psi[u \overline{\varphi_\ell}](q, x)h(x)$ — тождественный нуль при любой функции $h \in L^2(\mathbb{R})$,

сосредоточенной на $\text{supp } c_\ell$. Применяя тождество (8), отсюда заключаем, что

$$\int_{[-1,1] \times \mathbb{R}} d\mu dx \overline{h(x)\varphi_\ell(\mu)} (\Phi^* u)(x - \mu t, \mu) = 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $h \in \mathcal{D}_{c_\ell}$, т.е. f удовлетворяет условию следствия 1.

Остается доказать, что образ отображения $F \mapsto f$ совпадает со всем H_0 . Пусть $f_0 \in H$ – вектор вида $f_0 = P_\omega g$, где $g \in H_0$, ω – замкнутый интервал, не содержащий точку 0, а P_ω – спектральный проектор оператора L_0 , отвечающий интервалу ω . Тогда $f_0 \in H_0$, так как подпространство H_0 приводит оператор L_0 , а, значит, и любой его спектральный проектор. Покажем, что f_0 принадлежит образу построенной изометрии из X в H .

Пусть $u = \Phi f_0$. Положим: $F(q, p) = p^{-2}u(q, p^{-1})$ при $q \in \omega$ и $|p| > 1$, и $F(q, p) = 0$ при остальных $(q, p) \in \mathbb{R}^2$. По построению функция F принадлежит $L^2(\mathbb{R}^2, |p|dq dp)$ и удовлетворяет (9) и (11) с $f = f_0$. Заметим далее, что функция u обращается в нуль при $q \notin \omega$, так как согласно замечанию 1 $\Phi L_0 \Phi^*$ – оператор умножения на переменную q . Стало быть, функция $u \in H_\omega$. К ней применима лемма 2, и вполне-но равенство (12). Коль скоро функция f_0 принадлежит H_0 и, значит, удовлетворяет условию (2), левая часть в (8) обращается в нуль для рассматриваемого u при всех $t \in \mathbb{R}$ и $h \in \mathcal{D}_{c_\ell}$, $\ell = 1, \dots, n$. Следовательно, по единственности преобразования Фурье,

$$\langle \Psi[u\overline{\varphi_\ell}](q, \cdot), h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

при п.в. $q \in \mathbb{R}$ и всех $h \in \mathcal{D}_{c_\ell}$. Ввиду произвольности h это означает, что функция $\Psi[u\overline{\varphi_\ell}](q, x)$ обращается в нуль на $\mathbb{R} \times \text{supp } c_\ell$. Стало быть, правая часть равенства (12) также обращается в нуль на $\mathbb{R} \times \text{supp } c_\ell$, т.е. выполняется условие (10). Остается заметить, что множество векторов f_0 рассматриваемого вида плотно в H_0 , поскольку оператор L_0 абсолютно непрерывен.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $c(x)$ ограничена, и существуют $a, \varepsilon > 0$ такие, что $c(x) = 0$ при $|x - x_0 - aj| < \varepsilon$, $j \in \mathbb{Z}$, для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть все функции $\varphi_\ell(\mu)$, $1 \leq \ell \leq n$, являются полиномами. Тогда самосопряженное подпространство H_0 оператора

$$L = i\mu\partial_x + ic(x) \sum_{\ell=1}^n \varphi_\ell(\mu) \int_{-1}^1 (\cdot) \overline{\varphi_\ell(\mu')} d\mu' \quad (13)$$

нетривиально, и, более того, самосопряженная часть оператора L имеет счетно-кратный лебеговский спектр² на промежутке $[-\pi/a, \pi/a]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что $x_0 = 0$ и $n = 1 + \max_\ell \deg \varphi_\ell$. Будем искать функцию F , удовлетворяющую условиям теоремы 1, в виде $F(q, p) = \chi(q)f(pq)$, где χ – произвольная ограниченная функция на оси такая, что $\text{supp } \chi = [-b, b]$ для некоторого положительного $b < \pi/a$, и $\chi(q)/q \in L^2$. Условия теоремы 1 будут выполнены, если функция $f \in L^2(\mathbb{R}, |p|dp)$ удовлетворяет следующим требованиям:

²Это означает, что сужение самосопряженной части L на ее спектральное подпространство в H_0 , отвечающее указанному промежутку, унитарно эквивалентно ортогональной сумме бесконечного числа экземпляров оператора умножения на независимую переменную в L^2 на этом промежутке.

- (i) $f(p) = 0$ при $|p| \leq b$;
(ii) $\text{supp } \widehat{fp^{-j}}$ принадлежит ε -окрестности множества $a\mathbb{Z}$ при всех j , $0 \leq j \leq n-1$.

Воспользуемся следующим наблюдением: пусть $h \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ – произвольная 2π -периодическая функция, а ω – гладкая финитная функция на оси с носителем на промежутке $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$. Тогда функция $\xi = h\hat{\omega}$, очевидно, принадлежит $L^2(\mathbb{R}, |p| dp)$, а ее преобразование Фурье обращается в нуль вне δ -окрестности множества $\mathbb{Z}$. Указанное наблюдение вытекает из элементарных свойств свертки, поскольку $h = \hat{\rho}$, где $d\rho = \sum_j \rho_j \delta(x-j)$ – дискретная мера, нагрузками которой являются коэффициенты Фурье ρ_j сужения функции h на период.

Выберем ненулевую функцию h , удовлетворяющую описанным условиям и такую, что $h(p) = 0$ при $|p| \leq \pi - \nu$, $\nu > 0$, а в остальном произвольную. Положим $\delta = \varepsilon/a$, фиксируем произвольную ненулевую функцию $\omega_0 \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ с носителем на промежутке $(-\delta, \delta)$ и определим соответствующую функцию ξ , взяв $\omega = \omega_0^{(n)}$. Пусть $f(p) = \xi(ap)$. По построению условия (i) и (ii) выполнены для такой функции f при всех достаточно малых $\nu > 0$. Фиксируем такое ν и положим

$$u(q, \mu) = \mu^{-2} F\left(q, \frac{1}{\mu}\right).$$

По теореме 1 ненулевая функция $g \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^* u$ принадлежит H_0 , и нетривиальность подпространства H_0 доказана.

Чтобы доказать утверждение о кратности спектра, заметим, что, как следует из замечания 1, сужение оператора L_0 на приводящее подпространство, порожденное функцией g , унитарно эквивалентно оператору умножения на независимую переменную в пространстве L^2 на носителе χ , т.е. в $L^2(-b, b)$. Каждому выбору функции h в описанной выше конструкции при этом отвечает свое приводящее подпространство. Пусть h_j , $j = 1, \dots, N$, – конечный набор непрерывных линейно независимых в совокупности функций, удовлетворяющих указанным условиям. Тогда линейно независимы в совокупности и соответствующие приводящие подпространства $Y_j \subset H_0$. В самом деле, подпространства Y_j являются образами подпространств X_j в $L^2(\mathbb{R}^2, |p| dq dp)$, натянутых на функции вида $h_j(apq)\hat{\omega}(apq)k(q)$, $\text{supp } k \subset [-b, b]$, при изоморфизме, построенном в теореме 1, а в линейной независимости пространств X_j легко убедиться с помощью замены переменной. Таким образом, для любого конечного N и любого $b < \pi/a$ в H_0 имеется приводящее подпространство, сужение оператора на которое имеет N -кратный лебеговский спектр на $[-b, b]$. Так как оператор L_0 абсолютно непрерывен, отсюда следует доказываемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функция $s(x)$ имеет компактный носитель, и пусть все функции $\varphi_\ell(\mu)$, $1 \leq \ell \leq n$, являются полиномами. Тогда самосопряженная часть оператора L вида (13) имеет счетнократный лебеговский спектр, заполняющий всю вещественную ось³.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $n = 1$, $\varphi_1 \equiv 1$. Пусть I – произвольный замкнутый интервал, $\chi(q)$ – его индикатор. Будем искать функцию $F(q, p)$

³Теорема 2 в рассматриваемой ситуации гарантирует лишь наличие спектра в окрестности точки 0.

в виде произведения $\chi(q)f(p)$, где $f \in L^2(\mathbb{R}, |p| dp)$ – функция, равная нулю на $[-1, 1]$ и такая, что $\widehat{f} = 0$ на интервале $[-M, M]$. Ясно, что при достаточно большом M такая функция F удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Запас требуемых функций f строится в следующей лемме.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha > 0$, и пусть $\rho(z)$ – любая ненулевая функция, аналитическая на плоскости с разрезами $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ и такая, что ее сужения на $\mathbb{C}_\pm$ принадлежат $H_\pm^2$ соответственно, а граничные значения $\rho(z)$ на вещественной оси в смысле классов Харди принадлежат $L^2(\mathbb{R}, |p| dp)$. Положим

$$\phi_\alpha(z) = \exp \left[2i\alpha \left(-\frac{z}{2} + \frac{1}{1 - \sqrt{(z-1)/(z+1)}} \right) \right] \rho(z), \quad (14)$$

где ветвь корня выбрана таким образом, чтобы функция $\phi_\alpha(z)$ была аналитична на плоскости с разрезами $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, и $\operatorname{Im} \sqrt{(z-1)/(z+1)} > 0$. Пусть $f_\alpha^\pm$ – граничные значения в смысле классов Харди функции ϕ_α на вещественной оси.

Тогда функция

$$f_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_\alpha^+(x) - f_\alpha^-(x)$$

ненулевая и обладает следующими свойствами:

- 1) $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}, |p| dp)$;
- 2) $f_\alpha(x) = 0$ при $|x| < 1$;
- 3) $\widehat{f}_\alpha(p) = 0$ при $|p| \leq \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 2) очевидно. Поскольку граничные значения на вещественной оси экспоненты в (14) по модулю ≤ 1 при сделанном выборе ветви корня, включение $f_\alpha^\pm \in L^2(\mathbb{R}, |p| dp)$ следует из предположений о функции $\rho(z)$.

Проверим свойство 3). При $|z| \rightarrow \infty$ в каждой из полуплоскостей $\mathbb{C}_\pm$ справедливы следующие равномерные по $\arg z$ асимптотики:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{(z-1)/(z+1)}} = \begin{cases} z + O(1), & \operatorname{Im} z > 0; \\ O(1), & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Отсюда получим, что сужения функций $e^{\mp i\alpha z} \phi_\alpha$ на полуплоскости $\mathbb{C}_\pm$ принадлежат $H_\pm^2$ соответственно. Следовательно, по теореме Пэли–Винера $\widehat{f}_\alpha^\pm(p) = 0$ при $\pm p \leq \alpha$, и, значит, $\widehat{f}_\alpha(p) = 0$ при $|p| \leq \alpha$.

Наконец, функция $f_\alpha(x)$ ненулевая, так как функции $f_\alpha^\pm$ ненулевые и принадлежат ортогональным в $L^2(\mathbb{R})$ пространствам $e^{\pm i\alpha z} H_\pm^2$.

В качестве функции ρ в этой лемме можно взять, например, ветвь функции $\ln^n((z+a)/(z+b))$, $1 < b < a$, $n \geq 2$, аналитичную на плоскости с разрезом $[-a, -b]$, фиксированную условием

$$\operatorname{Im} \ln \frac{z+a}{z+b} \Big|_{z=0} = 0.$$

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть α – такое число, что $|qx| < \alpha$ при всех $q \in I$, $x \in \operatorname{supp} c$, и $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}, |p| dp)$ – произвольная ненулевая функция, равная нулю на $[-1, 1]$ и такая, что $\widehat{f}_\alpha = 0$ на интервале $[-\alpha, \alpha]$. Положим $F(q, p) = \chi(q)f_\alpha(p)$. По функции F определим вектор $g \in H_0$ так же, как и

в доказательстве теоремы 2. Сужение оператора L на приводящее подпространство $Y = Y(f_\alpha)$, порожденное вектором g , будет унитарно эквивалентно оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(I)$, причем если функции $f_{\alpha,j}$, $j = 1, \dots, n < \infty$, линейно независимы, то набор соответствующих подпространств $\{Y(f_{\alpha,j})\}$ также линейно независим. Так как линейное пространство функций f_α , построенное в лемме 3, бесконечномерно, отсюда следует, что оператор $L|_{H_0}$ имеет счетнократный лебеговский спектр на интервале I . Поскольку интервал I произволен, это равносильно доказываемому утверждению.

Общий случай ($n \neq 1$) рассматривается аналогично, нужно лишь потребовать дополнительно, чтобы функция ρ в лемме 3 имела в точке 0 нуль порядка $n - 1$. Если это требование удовлетворено, то преобразования Фурье от $f p^{-j}$ обращаются в нуль на $[-\alpha, \alpha]$ при всех $j \leq n - 1$, что и требуется.

КОММЕНТАРИЙ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 2. Вопрос о существовании ненулевой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ такой, что сужения $f|_S = 0$ и $\hat{f}|_\Sigma = 0$ для заданного интервала S и множества $\Sigma \subset \mathbb{R}$, известный как проблема Бёрлинга, изучается давно [7], [8]. В частности, из одного результата Митковского и Полторацкого [9] следует, что справедливо такое усиление теоремы 2: самосопряженное подпространство нетривиально, если функция s обращается в нуль на наборе непересекающихся интервалов $[x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, таких, что отношение $\#\{j : x_j \in \Pi_n\} / |\Pi_n|$ не стремится к нулю ни для какого набора непересекающихся интервалов Π_n удовлетворяющего условию

$$\sum \frac{|\Pi_n|^2}{1 + \text{dist}^2(0, \Pi_n)} = \infty.$$

Заметим, что использование известных результатов по проблеме Бёрлинга в нашей ситуации требует сглаживания, поскольку на функцию f наложено дополнительное условие квадратичной суммируемости с растущим весом $|p|$. По этой причине применение теоремы Амрайна–Бертье [7], гарантирующей существование функции f в ситуации, когда множество Σ имеет конечную меру, не дает нового по сравнению с утверждения предложением 2.

В противоположном теореме 2 направлении справедливо следующее простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функция $s \in L^\infty(\mathbb{R})$ отлична от нуля п.в. на некоторой полуоси. Тогда оператор

$$L = i\mu\partial_x + ic(x) \int_{-1}^1 (\cdot) d\mu'$$

вполне самосопряжен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ущерба общности можно считать, что $s(x) \neq 0$ при п.в. $x > 0$. Предположим, что самосопряженное подпространство $H_0 \neq \{0\}$. Тогда по теореме 1 (см. (10)) найдется ненулевая функция $F(q, p) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ такая, что при п.в. $q > 0$ будем иметь: $(\mathcal{F}^* F)(q, x) = 0$ при п.в. $x > 0$. По теореме Пэли–Винера это означает, что $F(q, \cdot) \in H_+^2$ при п.в. $q > 0$, а так как $F(q, p) = 0$ при $|p| < 1$, по свойствам классов Харди отсюда следует, что функция $F(q, \cdot) = 0$ при п.в. $q > 0$. Аналогично рассматривается случай $q < 0$. В итоге получим, что F – нулевая функция, что противоречит условию.

Следующее предложение имеет целью пояснить основной результат теоремы 2. Фигурирующий в нем оператор в полосе половинной ширины, возможно, не имеет непосредственного физического смысла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\varphi \in L^\infty(0, 1)$, $\text{supp } \varphi = [0, 1]$, $c \in L^\infty(\mathbb{R})$, и пусть L – оператор в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R} \times [0, 1])$, определенный формулой

$$(Lu)(x, \mu) = i\mu(\partial_x u)(x, \mu) + ic(x)\varphi(\mu) \int_0^1 u(x, \mu') \overline{\varphi(\mu')} d\mu' \quad (15)$$

на естественной области определения своей вещественной части $L_0 = i\mu\partial_x$. Тогда оператор L вполне несамосопряжен, если $c \not\equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, легко видеть, что оператор, заданный формулой (15), вполне несамосопряжен, если любая функция $F(q, p) \in L^2(\mathbb{R}^2, |p| dq dp)$, удовлетворяющая условию (10) и такая, что $F(q, p) = 0$ при $p < 1$, есть тождественный нуль. Условие (10) означает, что при п.в. $q \in \mathbb{R}$ преобразование Фурье по второму аргументу от функции $G(q, p) = F(q, p)\varphi(p^{-1})$ обращается в нуль на множестве положительной меры. С другой стороны, функция $G(q, p) = 0$ при $p < 1$. По свойствам классов Харди отсюда следует, что функция $G(q, \cdot) \equiv 0$ при п.в. $q \in \mathbb{R}$, т.е. $F \equiv 0$.

Аналогичное утверждение справедливо для оператора в полосе $\mathbb{R} \times [-1, 0]$. Рассматривая ортогональную сумму, получим такое

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функции $\varphi_{1,2} \in L^\infty(-1, 1)$ таковы, что $\text{supp } \varphi_1 = [0, 1]$, $\text{supp } \varphi_2 = [-1, 0]$. Тогда оператор

$$L = i\mu\partial_x + ic_1(x)\varphi_1(\mu) \int_{-1}^1 (\cdot) \overline{\varphi_1(\mu')} d\mu' + ic_2(x)\varphi_2(\mu) \int_{-1}^1 (\cdot) \overline{\varphi_2(\mu')} d\mu'$$

вполне несамосопряжен, если ни одна из функций c_1, c_2 не обращается в нуль тождественно.

Таким образом, в анизотропном случае оператор L может оказаться вполне несамосопряженным при произвольно малом носителе возмущения.

5. Трехмерный оператор переноса. Пусть $\mathbb{S}^2 = \{s \in \mathbb{R}^3 : |s| = 1\}$. Трехмерный оператор переноса T действует в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$ функций $u = u(x, \mu)$ ($x \in \mathbb{R}^3$, $\mu \in \mathbb{S}^2$) и задается формулой

$$(Tu)(x, \mu) = -(\mu \cdot \nabla_x u)(x, \mu) + \sum_{\ell=1}^n c_\ell(x)\varphi_\ell(\mu) \int_{\mathbb{S}^2} u(x, \mu') \overline{\varphi_\ell(\mu')} dS(\mu').$$

Здесь $c_\ell \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\varphi_\ell \in L^2(\mathbb{S}^2)$, $\ell = 1, \dots, n$, – известные функции, а точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Пусть $T = iL$. Оператор L является ограниченным возмущением оператора $L_0 = i\mu \cdot \nabla_x$, самосопряженного на своей естественной области определения.

ТЕОРЕМА 3. Самосопряженное подпространство оператора L нетривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U: H \rightarrow H$ – преобразование Фурье по переменной x . Положим $\hat{L} = ULU^*$, $\hat{L}_0 = UL_0U^*$ и т.д.

Аналогично одномерному случаю v лежит в самосопряженном подпространстве оператора L тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{S}^2} v(x - \mu t, \mu) \overline{\varphi_\ell(\mu)} dS(\mu) = 0$$

при всех $\ell = 1, \dots, n$, $t \in \mathbb{R}$, и п.в. $x \in \text{supp } c_\ell$. Легко понять, что это равенство выполнено, если функция $\widehat{v} := Uv$ удовлетворяет

$$\int_{\mathbb{S}^2} \exp(it \langle p, \mu \rangle_{\mathbb{R}^3}) \widehat{v}(p, \mu) \overline{\varphi_\ell(\mu)} dS(\mu) = 0 \quad (16)$$

при п.в. $p \in \mathbb{R}^3$, любых $t \in \mathbb{R}$, $\ell = 1, \dots, n$.

Для каждого $p \in \mathbb{R}^3$ введем на сфере $\mathbb{S}^2$ переменной μ сферические координаты (ψ_p, θ_p) , выбирая направление вектора p за направление полярной оси. Здесь θ_p – азимутальный угол, ψ_p – угол прецессии. Очевидно, что для любой гладкой функции $u \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$ такой, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(p, \mu(\psi_p, \theta_p)) \overline{\varphi_\ell(\mu(\psi_p, \theta_p))} d\psi_p = 0$$

при п.в. $p \in \mathbb{R}^3$, $\theta_p \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\ell = 1, \dots, n$, функция $v = U^*u$ удовлетворяет (16) и, следовательно, принадлежит самосопряженному подпространству.

6. Заключительные замечания. 1) Нетривиальность подпространства H_0 , установленная в теореме 2, означает, что в фазовом пространстве функций распределения нейтронов имеются начальные конфигурации, эволюция которых “не замечает” размножающий материал. Для таких начальных данных эволюция сводится к экспоненциальному убыванию (см. (4)): $f^t(x, \mu) = e^{-\sigma t} f^0(x - \mu t, \mu)$ при $f^0 \in H_0$. Авторы затрудняются дать этому явлению физическую интерпретацию, поскольку в интересных для физики ситуациях подпространство H_0 , по-видимому, не содержит ненулевых неотрицательных функций. Например, легко видеть, что пространство H_0 не содержит знакопостоянных функций в случае изотропного рассеяния.

2) Выбор L^2 вместо L^1 в качестве пространства функций распределения может показаться неестественным. Некоторые соображения в пользу такого выбора указаны в [10]. Заметим еще, что в работе [10], в ином контексте, рассматривался матричный элемент, формально похожий на левую часть (5). Именно, изучалось асимптотическое поведение при больших t интеграла с тем же подынтегральным выражением, что и в (5), для случая, когда функции f и h периодические, а переменная x меняется на торе.

Авторы признательны П. П. Каргаеву за полезное обсуждение и С. Н. Набоку за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Lehner, “The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab”, *J. Math. Mech.*, **11**:2 (1962), 173–181.

- [2] С. Б. Шихов, *Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ*, Атомиздат, М., 1973.
- [3] Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970.
- [4] С. Н. Набоко, “Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния”, *Краевые задачи математической физики*. 10, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **147**, 1980, 86–114.
- [5] J. Lehner, G.M. Wing, “On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8**:2 (1955), 217–234.
- [6] Yu. A. Kuperin, S.N. Naboko, R.V. Romanov, “Spectral analysis of the transport operator: a functional model approach”, *Indiana Univ. Math. J.*, **51**:6 (2002), 1389–1425.
- [7] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **28**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [8] П. П. Каргаев, “Преобразование Фурье характеристической функции множества, исчезающее на интервале”, *Матем. сб.*, **117**:3 (1982), 397–411.
- [9] M. Mitkovski, A. Poltoratski, *Polya Sequences, Toeplitz Kernels and Gap Theorems*, arXiv: [math.CV/0903.4499](https://arxiv.org/abs/math.CV/0903.4499).
- [10] В. В. Козлов, *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Современная математика, ИКИ, М.–Ижевск, 2002.

Р. В. Романов

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: morovom@gmail.com

Поступило

28.07.2009

М. А. Тихомиров

Санкт-Петербургский государственный университет